

Основные задачи логических систем (теорий)

1. **Выделить и систематизировать правильные умозаключения**, т.е. отобрать из множества переходов от n высказываний к одному высказыванию те, которые *гарантируют сохранение истины*. Дать четкие (**эффективные**, носящие алгоритмический характер) **критерии** установления (не) правильности умозаключений.
2. Из всего множества высказываний **выделить подмножество логически истинных**.

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Логика высказываний (ЛВ) – общее название для класса логических систем (точнее, теорий), выразительные средства (возможности) которых позволяют анализировать структуру контекстов (и посредством этого решать указанные выше основные задачи логических теорий), *абстрагируясь от структуры простых высказываний*, т.е. учитывая только логические связи простых высказываний между собой в составе сложных. *Это теория сложных высказываний.*

КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Теория типа «Логика высказываний» будет *классической*, если она основывается на принципах

* **двузначности** / бивалентности

(любое высказывание принимает одно и только одно значение из набора {истина, ложь})

* **экстенциональности**

(значение сложного высказывания есть *функция* от значений составляющих его простых высказываний).

СЛОЖНЫЕ И ПРОСТЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Сложные высказывания – такие высказывания, в составе которых можно выделить другие высказывания как их собственные части.

Простые высказывания – такие высказывания, в составе которых нельзя выделить других высказываний (в качестве собственных частей).

Рассмотрим предложения

простое 1. Катя и Маша – сестры (одноклассницы). **R (a,b)**

сложное 2. Катя и Маша – школьницы **a есть P, и b есть P**

СЛОЖНЫЕ И ПРОСТЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Сложные высказывания – такие высказывания, в составе которых можно выделить другие высказывания как их собственные части.

Простые высказывания – такие высказывания, в составе которых нельзя выделить других высказываний (в качестве собственных частей).

Сложные высказывания образуются из простых с помощью логических союзов (и, или, если...то..., неверно, что... и т.д.), которые называются **пропозициональными связками**. Каждой такой связке соответствует *свой* тип сложных высказываний, *свой принцип* порождения значения сложного высказывания из значений его составных частей.

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Высказывания с внешним отрицанием
(союз «неверно, что...»).

$\neg A$ — отрицание ситуации A

A	$\neg A$
I	L
L	I

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2. Конъюнктивные (соединительные)

(союзы «и», «а», «но»; бывает и «если...то» в

значении «и»: «Если Петр Первый был настоящим лидером государства, то о Николае Втором этого не скажешь»)

A & B – утверждение *одновременного* наличия ситуаций A и B.

A	B	A	&	B
И	И		И	
И	Л		Л	
Л	И		Л	
Л	Л		Л	

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

3. Дизъюнктивные (разделительные)

(союзы «или», «либо»)

$A \vee B$ – утверждение наличия
по крайней мере одной из двух ситуаций А, В.

А	В	А & В		А \vee В
И	И	И		И
И	Л	Л		И
Л	И	Л		И
Л	Л	Л		Л

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

4. Строго дизъюнктивные

(союзы «или...или...», «либо...либо...»)

$A \underline{\vee} B$ – утверждение наличия
ровно одной из двух ситуаций A, B.

A	B	A & B	A ∨ B	A <u>∨</u> B
И	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	И
Л	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	Л

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

5. Импликативные

(союзы «если...то...», «когда», «только когда», «необходимое условие для... есть...», «достаточное условие для... есть...»)

$A \supset B$ – (фактически) утверждение невозможности отсутствия ситуации B при наличии ситуации A .

При этом высказывание A называется антецедентом, а высказывание B – консеквентом импликации. Импликация $A \supset B$ равносильна выражению $(\neg A \vee B)$, или выражению $\neg (A \& \neg B)$

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

5. Импликативные

(союзы «если...то...», «когда», «только когда»,
«необходимое условие для... есть...»,
«достаточное условие для... есть...»)

A	B	A & B	A ∨ B	A ⊆ B	A ⊃ B
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	Л	Л	И

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

6. Высказывания с эквиваленцией

(союзы «если и только если», «тогда и только тогда, когда», «необходимое и достаточное условие для... есть...»)

$A \equiv B$ – фактически утверждение о совпадении значений истинности A и B .

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \underline{\vee} B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
И	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л	И	И

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

7. Высказывания с функтором Нико

(союз «ни...ни...»)

$A \downarrow B$ – утверждение об одновременном отсутствии ситуаций A и B .

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \underline{\vee} B$	$A \supset B$	$A \equiv B$	$A \downarrow B$
И	И	И	И	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И

$$\neg(A \equiv B) \quad \neg(A \& \neg B) \quad \neg(A \vee B)$$

$$\neg A \vee B \quad \neg(A \underline{\vee} B) \quad \neg A \& \neg B$$

ТИПЫ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

8. Высказывания с функтором Шеффера

(союз «или не...или не... или и то, и другое сразу»)

$A \mid B$ – утверждение об отсутствии хотя бы одной из двух ситуаций A и B .

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \underline{\vee} B$	$A \supset B$	$A \equiv B$	$A \mid B$
И	И	И	И	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И
Л	И	Л	И	И	И	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И

$$\neg(A \equiv B) \quad \neg(A \& \neg B) \quad \neg(A \& B)$$

$$\neg A \vee B \quad \neg(A \underline{\vee} B) \quad \neg A \vee \neg B$$

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И							И			И							

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И							И		Л	И							

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И									Л								

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И								Л						Л			

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	\mid	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И									Л					Л		Л	

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	\mid	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И									Л			Л				Л	

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И									Л			Л	И			Л	

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И									Л				И				

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И									Л		И		И				

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И											И						

Вычисление значения сложной формулы

$$(\neg (p \mid q) \supset (\neg p \equiv q)) \& \neg ((\neg q \underline{\vee} p) \vee (q \downarrow (\neg p \& q)))$$

Пусть значение переменной p – «истина», переменной q – «ложь»

		2		1		5	3		4		13	12	6		7		11		10	8		9	
p	q	$(\neg$	$(p$	$ $	$q)$	\supset	$(\neg$	p	\equiv	$q))$	$\&$	\neg	$((\neg$	q	$\underline{\vee}$	$p)$	\vee	$(q$	\downarrow	$(\neg$	p	$\&$	$q))$
И	Л					И						Л					И						

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Построим полную таблицу истинности (для всех возможных положений вещей) для высказывания

Если Смит не был убийцей, то Джонс лжет, а Браун не встречал Смита этой ночью

Смит был убийцей – p

Джонс лжет – q

Браун встречал Смита этой ночью – s

$$\neg p \supset (q \ \& \ \neg s)$$

Число строк в таблице = 2^n ,

где n – число различных переменных

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

р	q	s							
И	И	И							
И	И	Л							
И	Л	И							
И	Л	Л							
Л	И	И							
Л	И	Л							
Л	Л	И							
Л	Л	Л							

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

p	q	s	¬	p	⊃	(q	&	¬	s)
И	И	И							
И	И	Л							
И	Л	И							
И	Л	Л							
Л	И	И							
Л	И	Л							
Л	Л	И							
Л	Л	Л							

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	¬	p	⊃	(q	&	¬	s)
И	И	И							
И	И	Л							
И	Л	И							
И	Л	Л							
Л	И	И							
Л	И	Л							
Л	Л	И							
Л	Л	Л							

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л						
И	И	Л	Л						
И	Л	И	Л						
И	Л	Л	Л						
Л	И	И	И						
Л	И	Л	И						
Л	Л	И	И						
Л	Л	Л	И						

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л					Л	
И	И	Л	Л					И	
И	Л	И	Л					Л	
И	Л	Л	Л					И	
Л	И	И	И					Л	
Л	И	Л	И					И	
Л	Л	И	И					Л	
Л	Л	Л	И					И	

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л			И		Л	
И	И	Л	Л			И		И	
И	Л	И	Л			Л		Л	
И	Л	Л	Л			Л		И	
Л	И	И	И			И		Л	
Л	И	Л	И			И		И	
Л	Л	И	И			Л		Л	
Л	Л	Л	И			Л		И	

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л			И		Л	
И	И	Л	Л			И	И	И	
И	Л	И	Л			Л		Л	
И	Л	Л	Л			Л		И	
Л	И	И	И			И		Л	
Л	И	Л	И			И	И	И	
Л	Л	И	И			Л		Л	
Л	Л	Л	И			Л		И	

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л			И	Л	Л	
И	И	Л	Л			И	И	И	
И	Л	И	Л			Л	Л	Л	
И	Л	Л	Л			Л	Л	И	
Л	И	И	И			И	Л	Л	
Л	И	Л	И			И	И	И	
Л	Л	И	И			Л	Л	Л	
Л	Л	Л	И			Л	Л	И	

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	¬	p	⊃	(q	&	¬	s)
И	И	И	Л				Л		
И	И	Л	Л				И		
И	Л	И	Л				Л		
И	Л	Л	Л				Л		
Л	И	И	И				Л		
Л	И	Л	И				И		
Л	Л	И	И				Л		
Л	Л	Л	И				Л		

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л				Л		
И	И	Л	Л				И		
И	Л	И	Л				Л		
И	Л	Л	Л				Л		
Л	И	И	И		Л		Л		
Л	И	Л	И				И		
Л	Л	И	И		Л		Л		
Л	Л	Л	И		Л		Л		

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И	Л		И		Л		
И	И	Л	Л		И		И		
И	Л	И	Л		И		Л		
И	Л	Л	Л		И		Л		
Л	И	И	И		Л		Л		
Л	И	Л	И		И		И		
Л	Л	И	И		Л		Л		
Л	Л	Л	И		Л		Л		

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

Каковы условия истинности?

				1		4		3	2	
	p	q	s	\neg	p	\supset	$(q$	$\&$	\neg	s)
	И	И	И			И				
	И	И	Л			И				
	И	Л	И			И				
	И	Л	Л			И				
	Л	И	И			Л				
	Л	И	Л			И				
	Л	Л	И			Л				
	Л	Л	Л			Л				

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

Каковы условия истинности?

				1		4		3	2	
	p	q	s	\neg	p	\supset	(q	$\&$	\neg	s)
*	И	И	И			И				
*	И	И	Л			И				
*	И	Л	И			И				
*	И	Л	Л			И				
	Л	И	И			Л				
*	Л	И	Л			И				
	Л	Л	И			Л				
	Л	Л	Л			Л				

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$\neg p \supset (q \& \neg s)$

Каковы условия ложности?

				1		4		3	2	
	p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
	И	И	И			И				
	И	И	Л			И				
	И	Л	И			И				
	И	Л	Л			И				
	Л	И	И			Л				
	Л	И	Л			И				
	Л	Л	И			Л				
	Л	Л	Л			Л				

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

Каковы условия ложности?

				1		4		3	2	
	p	q	s	\neg	p	\supset	(q	$\&$	\neg	s)
	И	И	И			И				
	И	И	Л			И				
	И	Л	И			И				
	И	Л	Л			И				
*	Л	И	И			Л				
	Л	И	Л			И				
*	Л	Л	И			Л				
*	Л	Л	Л			Л				

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$\neg p \supset (q \& \neg s)$

Каков тип этой формулы?

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И			И				
И	И	Л			И				
И	Л	И			И				
И	Л	Л			И				
Л	И	И			Л				
Л	И	Л			И				
Л	Л	И			Л				
Л	Л	Л			Л				

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

$$\neg p \supset (q \& \neg s)$$

Каков тип этой формулы?

			1		4		3	2	
p	q	s	\neg	p	\supset	(q	&	\neg	s)
И	И	И			И				
И	И	Л			И				
И	Л	И			И				
И	Л	Л			И				
Л	И	И			Л				
Л	И	Л			И				
Л	Л	И			Л				
Л	Л	Л			Л				

Классификация формул в логических теориях

Выполнимая формула – формула, принимающая значение «истина» хотя бы при одном возможном положении вещей...

Общезначимая формула (тождественно-истинная, логический закон, логическая тавтология) – формула, принимающая значение «истина» при всех возможных положениях вещей (для КЛВ – комбинациях значений пропозициональных переменных, т.е. в каждой строчке таблицы).

Невыполнимая формула – формула, не принимающая значение «истина» ни при одном возможном положении вещей...

Классификация формул в логических теориях

Невыполнимая формула – формула, не принимающая значение «истина» ни при одном возможном положении вещей...

Тождественно-ложная формула (логическое противоречие) – формула, принимающая значение «ложь» при всех возможных положениях вещей...

Очевидно, что для системы КЛВ множества *невыполнимых* и *тождественно-ложных* формул **совпадают**, ибо *не быть истинным* и *быть ложным* для этой теории суть одно и то же (в силу принципа бивалентности). Но в общем случае это совсем необязательно. Если формула (скажем, в логике Лукасевича) несколько раз ложна (принимает значение 0), а в остальных случаях неопределенна ($1/2$), она *невыполнима*, но *не тождественно-ложна*.

Классификация формул в логических теориях

Общезначимая формула (тождественно-истинная, логический закон, логическая тавтология) – формула, принимающая значение «истина» при всех возможных положениях вещей (для КЛВ – комбинациях значений пропозициональных переменных, т.е. в каждой строчке таблицы).

Необщезначимая формула – формула, не принимающая значение «истина» хотя бы при одном возможном положении вещей...

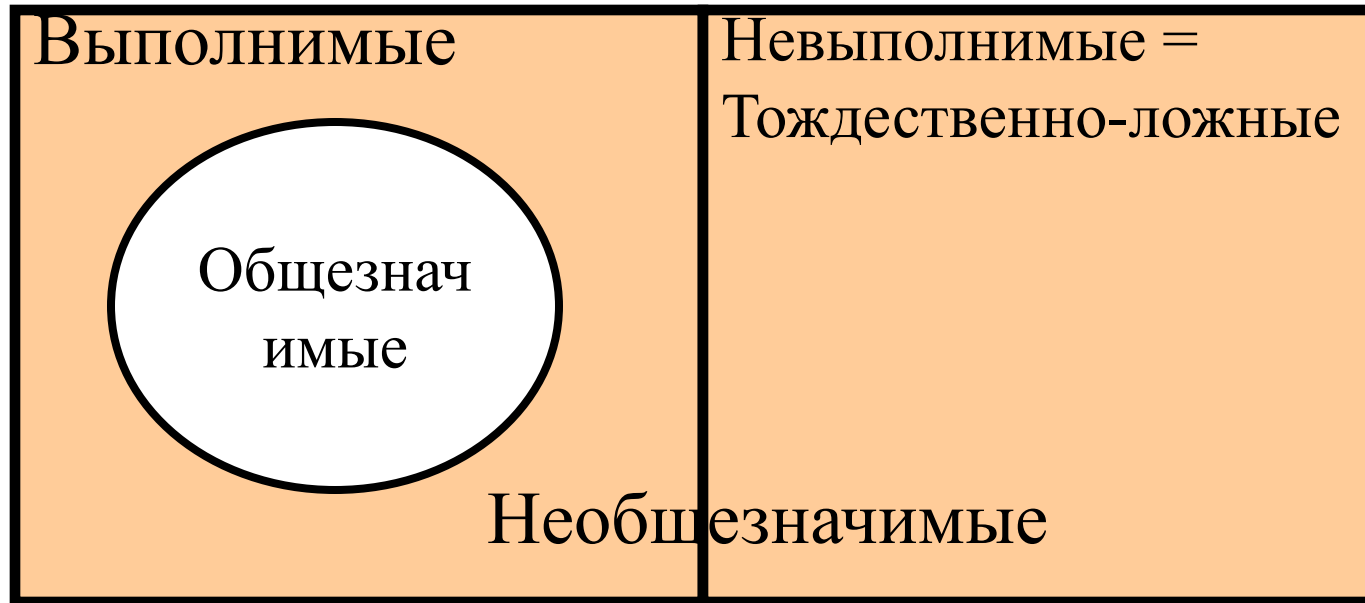
Таким образом, в рамках КЛВ множества *невыполнимых* и *тождественно-ложных* формул **совпадают** и составляют собственное подмножество *необщезначимых*, а *общезначимые* составляют собственное подмножество *выполнимых*.

Классификация формул в логической теории КЛВ



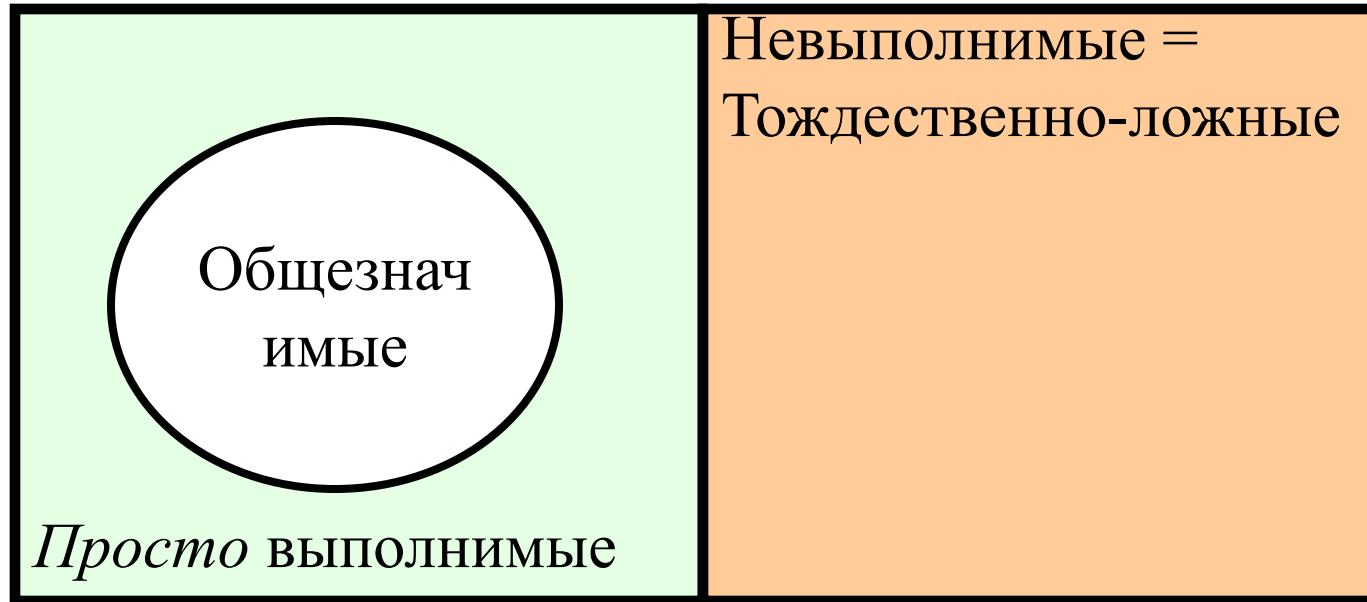
Таким образом, в рамках КЛВ множества *невыполнимых* и *тождественно-ложных* формул **совпадают** и составляют собственное подмножество *необщезначимых*, а *общезначимые* составляют собственное подмножество *выполнимых*.

Классификация формул в логической теории КЛВ



Таким образом, в рамках КЛВ множества *невыполнимых* и *тавтоженно-ложных* формул **совпадают** и составляют собственное подмножество *необщезначимых*, а *общезначимые* составляют собственное подмножество *выполнимых*.

Классификация формул в логической теории КЛВ



Таким образом, в рамках КЛВ множества *невыполнимых* и *тавтоженно-ложных* формул **совпадают** и составляют собственное подмножество *необщезначимых*, а *общезначимые* составляют собственное подмножество *выполнимых*.

Классификация формул в логических теориях и логическая классификация высказываний

ФОРМУЛА	ВЫСКАЗЫВАНИЕ
Тождественно-истинная (общезначимая)	Логически истинное
Тождественно-ложная	Логически ложное
<i>Просто</i> выполнимая (выполнимая, но не общезначимая)	Логически случайное (недетерминированное)

Основные законы КЛВ

1. Закон непротиворечия

$$\neg (A \& \neg A)$$

Два противоречащих друг другу высказывания не могут быть одновременно истинными.

2. Закон исключенного третьего

$$A \vee \neg A$$

Из двух противоречащих друг другу высказывания по крайней мере одно истинно.

Основные законы КЛВ

3. Закон двойного отрицания

$$\neg \neg A \equiv A$$

Двойное отрицание высказывания
равнозначно его утверждению.

Директор школы возражает против отмены
решения о запрете контроля над прическами (???)

4. Закон тождества

$$A \supset A$$

Если высказывание истинно, то оно
истинно.

Основные законы КЛВ

5. Закон Клавия

$$(\neg A \supset A) \supset A$$

Если из отрицания суждения вытекает оно само, то такое суждение заведомо истинно.

6. Закон Дунса Скота

$$\neg A \supset (A \supset B)$$

Из заведомо ложного высказывания вытекает любое высказывание.

Если он – футболист, то я – китайский император
(известно, что он даже никогда не держал в руках
футбольного мяча)

Основные законы КЛВ

7-8. Законы де Моргана

$$\neg (A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

Отрицание конъюнкции равнозначно дизъюнкции двух отрицаний.

$$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B)$$

Отрицание дизъюнкции равнозначно конъюнкции двух отрицаний.

9. Закон контрапозиции

$$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$$

Если из одного высказывания вытекает второе, то из отрицания второго вытекает отрицание первого – прямая контрапозиция (и наоборот – обратная).

Основные законы КЛВ

10. Закон транзитивности (импликации)

$$(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$$

вариант: $((A \supset B) \& (B \supset C)) \supset (A \supset C)$

Если из одного высказывания вытекает второе, а из него – третье, то и из первого высказывания вытекает третье.

11. Закон отрицания импликации

$$\neg(A \supset B) \equiv (A \& \neg B)$$

Основные законы КЛВ

12-22. Законы взаимовыразимости пропозициональных связок

1. $(A \& B) \equiv \neg (\neg A \vee \neg B)$ «конъюнкцию через дизъюнкцию»
2. $(A \& B) \equiv \neg (A \supset \neg B)$ «конъюнкцию через импликацию»
3. $(A \vee B) \equiv \neg (\neg A \& \neg B)$ «дизъюнкцию через конъюнкцию»
4. $(A \vee B) \equiv (\neg A \supset B)$ «дизъюнкцию через импликацию (и отрицание)»
5. $(A \vee B) \equiv ((A \supset B) \supset B)$ «дизъюнкцию только через импликацию»

Основные законы КЛВ

11-22. Законы взаимовыразимости пропозициональных связок

6. $(A \supset B) \equiv (\neg A \vee B)$ «импликацию через дизъюнкцию»
7. $(A \supset B) \equiv \neg (A \& \neg B)$ «импликацию через конъюнкцию»
8. $(A \equiv B) \equiv ((A \supset B) \& (B \supset A))$
«эквиваленция по определению»
9. $(A \underline{\vee} B) \equiv ((A \& \neg B) \vee (B \& \neg A))$
«строгая дизъюнкция по определению»
10. $(A \downarrow B) \equiv (\neg A \& \neg B)$ «штрих Нико по определению»
11. $(A \mid B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ «штрих Шеффера по определению»

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

Возникает вопрос: какие пропозициональные связки следует использовать при построении логики высказываний? Все возможные? Только те, для которых есть аналог среди союзов естественного языка? Только двухместные и отрицание? Что лежит в основании выбора нами того или иного набора связок?

A	B	&	∨	⊂	⊃	≡	 	↓	⊃	⊄		
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л		
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л		
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И		
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л		

Сколько существует различных двухместных функций истинности?

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

А	В	&	∨	⊂	⊃	≡	┌	↓	⊆	⊄
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

Сколько существует различных двухместных функций истинности?

Очевидно, что 2^4 , где 2 – число возможных значений, $4 = 2^2$, где основание степени – число возможных значений, показатель – число различных переменных (аргументов функции).

$$N_f^n = m^{(mn)}, \text{ где } m \text{ – число возможных значений, } n \text{ – число переменных (аргументов функции)}$$

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	⊂	⊃	≡		↓	⊃	⊄
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

Оказывается, что все функции с местностью больше двух можно выразить формулами, включающими только двухместные связки и отрицание (их комбинацию, называемую суперпозицией). Например трехместную конъюнкцию $\&^3(A, B, C)$ можно эквивалентным образом записать как $((A \& B) \& C)$. Существует специальная теорема, доказывающая подобную универсальную выразимость многоместных связок.

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	∧	⊃	≡	┆	↓	⊂	⊘								
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л								
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л								
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И								
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И								

Более того, существуют совершенно определенные наборы связок, с помощью которых можно выразить ВСЕ возможные связки вообще. Такие наборы называются

функционально полными наборами связок.

Поэтому в выборе используемого набора главное – убедиться, чтобы он был функционально полным.

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	⊔	⊃	≡		↓	⊃	⊘
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

$$\neg A \vee B \quad \neg A \& \neg B \quad \neg A \& B$$

$$B \quad \neg A \vee \neg B \quad \neg(\neg A \& B)$$

Каноническим из таких наборов считается набор **КДО** (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание). Остальные связки вводятся по определению (такие, как строгая дизъюнкция, импликация, эквиваленция, а также, если нужно, обратная импликация, антиимпликация, функции Нико и Шеффера и т.д.)

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	⊂	⊃	≡	 	↓	⊃	⊄
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

$$\neg A \vee B \quad \neg A \& \neg B \quad \neg A \& B$$

$$B \quad \neg A \vee \neg B \quad \neg(\neg A \& B)$$

Из законов взаимовыразимостей связок очевидно, что набор КДО можно сократить до набора КО или ДО (по законам де Моргана) или взять набор ИО (импликация, отрицание с опорой на законы выразимости конъюнкции \ дизъюнкции через импликацию)

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	⊂	⊃	≡		↓	⊃	⊄
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

$$\neg A \vee B \quad \neg A \& \neg B \quad \neg A \& B$$

$$B \quad \neg A \vee \neg B \quad \neg(\neg A \& B)$$

Однако это не очень удобно с практической точки зрения. Выражения приобретают слишком громоздкий вид. Поэтому набор КДО не сокращают, а расширяют до набора КДИСДЭО, как мы и сделали. Указанные связки имеют, кроме того, аналоги, часто употребляемые в естественном языке.

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	⊂	⊃	≡		↓	⊃	⊄
И	И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

Если же стремиться к минимизации, то достаточно взять одну-единственную связку – штрих Шеффера или штрих Нико, чтобы получить функционально полную систему!!! Через них выразимы все связки набора КДО. Убедитесь в этом сами:

$$\neg A \equiv (A \downarrow A); \quad \neg A \equiv (A | A)$$

$$(A \& B) \equiv (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B); \quad (A \& B) \equiv (A | B) | (A | B)$$

$$(A \vee B) \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B); \quad (A \vee B) \equiv (A | A) | (B | B)$$

Проблема функциональной полноты наборов пропозициональных связок

A	B	&	∨	⊃	≡	 	↓	⊆	⊄
И	И	И	Л	И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	Л

Итак, основные функционально полные наборы связок:

- 1.** $\{\&, \vee, \neg\}$
- 2.** $\{\&, \supset, \neg\}$
- 3.** $\{\vee, \supset, \neg\}$
- 4.** $\{\neg, \supset\}$ **сокращ-е 3-го набора**
- 5.** $\{\neg, \&\}$ **сокращ-е 2-го набора**
- 6.** $\{\neg, \vee\}$ **сокращ-е 1-го набора**
- 7.** $\{| \}$
- 8.** $\{\downarrow\}$

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

1. **Условно-категорические умозаключения.** Это двухпосылочные умозаключения, которые содержат имплицативную посылку $A \supset B$. Другая посылка, а также заключение могут быть либо антецедентом (**A**), либо консеквентом (**B**) первой посылки, либо отрицанием того или другого ($\neg A$ или $\neg B$). К числу **правильных** условно-категорических умозаключений относятся:

— *modus ponens*
(утверждающий способ)

$$\frac{A \supset B, A}{B}$$

— *modus tollens*
(отрицающий способ).

$$\frac{A \supset B, \neg B}{\neg A}$$

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

1. Правильные условно-категорические умозаключения.

modus ponens

(утверждающий способ)

$$\frac{A \supset B, A}{B}$$

— *modus tollens*

(отрицающий способ).

$$\frac{A \supset B, \neg B}{\neg A}$$

Таким образом, правильными являются умозаключения от утверждения антецедента (основания) (**A**) к утверждению консеквента (следствия) (**B**) и от отрицания консеквента (следствия) (**¬B**) к отрицанию антецедента (основания) (**¬A**).

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

1. Правильные условно-категорические умозаключения.

modus ponens

(утверждающий способ)

$$\frac{A \supset B, A}{B}$$

Если число делится на 4,
оно делится на 2.
Число 12 делится на 4.
Значит, число 12 делится на 2.

— *modus tollens*

(отрицающий способ).

$$\frac{A \supset B, \neg B}{\neg A}$$

Если бы шел дождь, асфальт
был бы мокрым.
Но асфальт сухой.
Значит, дождя не было.

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

2. Разделительно-категорические умозаключения.

Эти умозаключения также являются двухпосылочными, причем в них имеется дизъюнктивная посылка ($A \vee B$) или строго дизъюнктивная посылка ($A \underline{\vee} B$). Другая же посылка и заключение совпадают с одним из дизъюнктов (A или B) или с его отрицанием ($\neg A$ или $\neg B$). К числу правильных разделительно-категорических умозаключений относятся:

— *modus tollendo ponens*

(отрицающе-утверждающий способ)

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B} \quad \frac{A \vee B, \neg B}{A}$$

— *modus ponendo tollens*

(утверждающе-отрицающий способ).

$$\frac{A \underline{\vee} B, A}{\neg B} \quad \frac{A \underline{\vee} B, B}{\neg A}$$

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

2. Правильные разделительно-категорические умозаключения.

— *modus tollendo ponens* (отрицающе-утверждающий способ) — *modus ponendo tollens* (утверждающе-отрицающий способ).

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

$$\frac{A \vee B, \neg B}{A}$$

$$\frac{A \vee B, A}{\neg B}$$

$$\frac{A \vee B, B}{\neg A}$$

Таким образом, правильными являются умозаключения от отрицания одного из дизъюнктов к утверждению другого в обычной дизъюнкции и от утверждения одного из дизъюнктов к отрицанию другого – в строгой.

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

2. Правильные разделительно-категорические умозаключения.

— *modus tollendo ponens*
(отрицающе-утверждающий способ)

— *modus ponendo tollens*
(утверждающе-отрицающий способ).

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

$$\frac{A \vee B, \neg B}{A}$$

$$\frac{A \vee B, A}{\neg B}$$

$$\frac{A \vee B, B}{\neg A}$$

Этот человек заблуждается или сознательно вводит других в заблуждение.

Но он человек честный.

Значит, он сам заблуждается.

Сегодня вечером мы можем пойти в кино или в театр.

Мы решили пойти в кино.

Значит, в театре нас сегодня не будет.

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

- 3. Условно-разделительные (лемматические) умозаключения.** Эти умозаключения содержат несколько имплицативных и одну дизъюнктивную посылку. В дизъюнктивной посылке разделяются определенные варианты развития событий, каждый из которых имеет свое следствие. Рассмотрев и сравнив эти следствия, мы приходим к одному общему заключению. Если число рассматриваемых вариантов равно двум, такие умозаключения называются *дилеммами*. В *простых* дилеммах заключение представляет собой простое суждение, в *сложных* – разделительное. В *конструктивных* дилеммах заключение является утвердительным, в *деструктивных* – отрицательным.

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

3. **Условно-разделительные (лемматические) умозаключения.** Правильные дилеммы:

— *простая конструктивная* — *сложная конструктивная*

$$\frac{A \supset C, B \supset C, A \vee B}{C}$$

$$\frac{A \supset C, B \supset D, A \vee B}{C \vee D}$$

— *простая деструктивная* — *сложная деструктивная*

$$\frac{A \supset B, A \supset C, \neg B \vee \neg C}{\neg A}$$

$$\frac{A \supset C, B \supset D, \neg C \vee \neg D}{\neg A \vee \neg B}$$

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

3. Условно-разделительные (лемматические) умозаключения. Правильные дилеммы:

— *простая конструктивная* — *сложная конструктивная*

$$\underline{A \supset C, B \supset C, A \vee B}$$

B

C

Если в адмиралтействе есть мыши, то деньги на питание кота не нужны, поскольку он может питаться мышами. Если мышей нет, то деньги тоже не нужны, поскольку незачем тогда держать кота. Следовательно, деньги на кота не нужны.

$$\underline{A \supset C, B \supset D, A \vee B}$$

B

C \vee D

Если сказать правду, обидится жена.

Если правды не говорить, обидится мать.

Следовательно, обидится жена или мать.

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

3. Условно-разделительные (лемматические) умозаключения. Правильные дилеммы:

— *простая деструктивная*

$$\underline{A \supset B, A \supset C, \neg B \vee \neg C}$$

C

$\neg A$

Если верить всему тому, что о нем говорят, он богат.

Если верить всему тому, что о нем говорят, он честен.

Но люди не бывают одновременно честными и богатыми.

Значит, нельзя верить всему тому, что о нем говорят.

— *сложная деструктивная*

$$\underline{A \supset C, B \supset D, \neg C \vee \neg D}$$

D

Если он не ~~глупый~~ $\neg A$ и ~~слепой~~ $\neg B$, он должен меня слышать.

Если он не идиот, он должен понимать, о чем я говорю.

Он не понимает моих слов или вообще меня не слышит.

Следовательно, он идиот или глухой.

Основные способы правильных рассуждений в КЛВ

Все приведенные схемы относились к числу **прямых** способов аргументации, при осуществлении которых мы переходили от одних высказываний к другим. Но существуют и более сложные, чем умозаключения, способы рассуждений. Рассмотрим **непрямые** способы аргументации.

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{B}$$

$$\frac{A \supset B, B \supset C}{A \supset C}$$

Прямой способ рассуждения – от нескольких *высказываний* к одному *высказыванию*

$$\frac{\begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \vdash D \\ B_1, \dots, B_n \vdash D_1 \\ C_1, \dots, C_n \vdash D_2 \\ \hline E_1, \dots, E_n \vdash F \end{array}}$$

Непрямой способ рассуждения – от нескольких *утверждений о выводимостях* к одному *утверждению о выводимости*

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ НЕПРЯМЫХ СПОСОБОВ АРГУМЕНТАЦИИ

1. Рассуждение по правилу дедукции

Из Γ и A выведено B

Из Γ выведено A

$\supset B$

[Γ – некое множество аргументов (формул)]

2. Рассуждение от противного

Из Γ и $\neg A$ выведено

\perp

Из Γ выведено A

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ НЕПРЯМЫХ СПОСОБОВ АРГУМЕНТАЦИИ

3. Рассуждение сведением к абсурду

Из Γ и A выведено

\perp

Из Γ выведено $\neg A$

4. Рассуждение разбором случаев

Из Γ и A выведено C

Из Γ и B выведено C

Из Γ и $A \vee B$ выведено
 C

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)

У нас имеется автоматическое устройство,
имеющее механизмы А, В и С.

Перечислим следующие свойства этого устройства:

1. Механизмы А и В не могут работать одновременно.
2. Механизм С работает, когда работает механизм А.
3. Обязательно работает по крайней мере один из механизмов В или С.

Может ли существовать устройство со всеми тремя свойствами?

Может ли существовать устройство без всех этих свойств?

Есть ли «информативно излишнее» условие?

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)

Логические отношения между формулами устанавливаются в зависимости от соотношения тех значений (истина/ложь), которые формулы принимают при различных положениях вещей.

Будем считать, что между данными высказываниями существует то или иное логическое отношение, если и только если оно существует между формулами, выражающими логическую форму этих высказываний.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)

Рассмотрим установление и сущность логических отношений в случае с двумя формулами (высказываниями) А и В.

Установить логические отношения – это значит ответить на один или несколько из следующих четырех вопросов:

1. Возможно ли такое положение вещей, при котором обе формулы принимают значение «истина»?
2. Возможно ли такое положение вещей, при котором обе формулы принимают значение «ложь»?
3. Возможно ли такое положение вещей, при котором формула А принимает значение «истина», а формула В – значение «ложь»?
4. Возможно ли такое положение вещей, при котором формула А принимает значение «ложь», а формула В – значение «истина»?

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)

1. Возможно ли такое положение вещей, при котором обе формулы принимают значение «истина»? 2. Возможно ли такое положение вещей, при котором обе формулы принимают значение «ложь»?
3. Возможно ли такое положение вещей, при котором формула А принимает значение «истина», а формула В – значение «ложь»? 4. Возможно ли такое положение вещей, при котором формула А принимает значение «ложь», а формула В – значение «истина»?

Пусть А – формула $p \ \& \ q$ (соответствующая высказыванию, например, «У меня есть брат и сестра»), В – формула $p \ \vee \ q$ («У меня есть брат или сестра»). Каковы будут ответы?

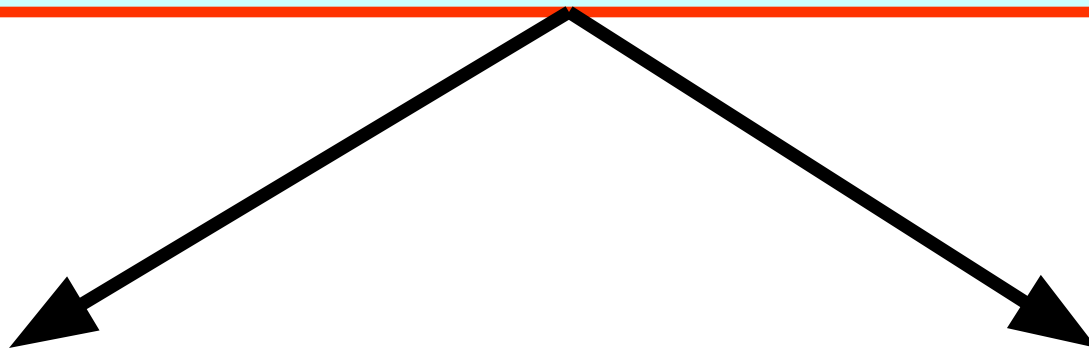
1. да

2. да

3. нет

4. да

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)



ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ

Устанавливаются ответом
на какой-либо один вопрос

ПРОИЗВОДНЫЕ

Устанавливаются
комбинацией ответов на
несколько вопросов

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ

Устанавливаются ответом
на какой-либо один вопрос

1 – (не) совместимость по истинности

2 – (не) совместимость по ложности

3 – логическое следование $A \models B$

4 – логическое следование $B \models A$

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

1 – (не) совместимость по истинности

2 – (не) совместимость по ложности

Формулы $A_1 \dots A_n$ **совместимы по истинности (ложности)**, если и только если существует хотя бы одна интерпретация параметров, входящих в состав этих формул (хотя бы одно положение вещей), при которой каждая из этих формул принимает значение «истина» («ложь»). В противном случае (когда такой интерпретации нет) они называются **несовместимыми по истинности (ложности)**.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

3 – логическое следование $A \models B$

4 – логическое следование $B \models A$

$X \not\models Y$, если и только если **не существует** такой интерпретации параметров, входящих в состав X и Y (такого положения вещей), при которой (котором) формула X принимает значение «истина», а формула Y – значение «ложь».

Вариант определения:

$X \not\models Y$, если и только если **при всех таких** интерпретациях параметров, входящих в состав X и Y (таких положениях вещей), когда формула X принимает значение «истина», формула Y тоже принимает значение «истина».

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

3 – логическое следование $A \models B$

4 – логическое следование $B \models A$

$X_1 \dots X_n \not\models Y$, если и только если **не существует** такой интерпретации параметров, входящих в состав $X_1 \dots X_n$ и Y (такого положения вещей), при которой (котором) каждая из формул $X_1 \dots X_n$ приняла бы значение «истина», а формула Y – значение «ложь».

Вариант определения:

$X_1 \dots X_n \models Y$, если и только если **при всех таких** интерпретациях параметров, входящих в состав $X_1 \dots X_n$ и Y (таких положениях вещей), когда формулы $X_1 \dots X_n$ одновременно принимают значение «истина», формула Y тоже принимает значение «истина».

ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ (ФОРМУЛАМИ)

ПРОИЗВОДНЫЕ

Устанавливаются
комбинацией ответов на
несколько вопросов

- 1 – противоречие
- 2 – противоположность
- 3 – подпротивоположность
- 4 – логическое подчинение
- 5 – логическая эквивалентность
- 6 – логическая независимость

ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

Отношения несовместимости

1 – противоречие (контрадикторность)

2 – противоположность (контрарность)

1. Формулы А и В находятся в отношении **противоречия** (контрадикторности), если и только если они несовместимы ни по истинности, ни по ложности.

Комбинация ответов: **Нет – Нет – х – х** (х означает, что уточнение для определения отношения несущественно).

2. Формулы А и В находятся в отношении **противоположности** (контрарности), если и только если они несовместимы по истинности, но совместимы по ложности.

Комбинация ответов: **Нет – Да – х – х**

ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

Отношения совместимости

3 – подпротивоположность

4 – логическое подчинение

3. Формулы А и В находятся в отношении **подпротивоположности** (субконтрарности), если и только если они совместимы по истинности, но несовместимы по ложности.

Комбинация ответов: **Да – Нет – х – х**

4. Формула Y **подчиняется** формуле X, если и только если $X \models Y$, но $\neg (Y \models X)$.

Комбинация ответов: **х – х – Да – Нет** (А подчиняется В), или **х – х – Нет – Да** (В подчиняется А)

ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

Отношения совместимости

5 – логическая эквивалентность

6 – логическая независимость

5. Формулы А и В находятся в отношении **логической эквивалентности**, если и только если они логически следуют друг из друга.

Комбинация ответов: **х – х – Нет – Нет**

6. Формулы А и В находятся в отношении **логической независимости**, если и только если они совместимы по истинности, совместимы по ложности и логически не следуют друг из друга.

Комбинация ответов: **Да – Да – Да – Да**

ПРОИЗВОДНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

- 1 – противоречие
- 2 – противоположность
- 3 – подпротивоположность
- 4 – логическое подчинение
- 5 – логическая эквивалентность
- 6 – логическая независимость

Следует иметь в виду, что данные определения и вся эта классификация производных логических отношений применимы в случае, когда мы имеем дело с выполнимыми, но не общезначимыми формулами. Иначе, скажем, мы вынуждены были бы признать, что тождественно-истинная и тождественно ложная формула одновременно находятся в отношениях противоречия и подчинения (первой по отношению ко второй).

Производное отношение	$A(и)B$	$A(л)B$	$A \neq B$	$B \neq A$
Противоречие	нет	нет	X	X
Противоположность	нет	да	X	X
Подпротивоположность	да	нет	X	X
A подчиняется B	X	X	нет (ответ «да»)	да (ответ «нет»)

Производное отношение	$A(и)B$	$A(л)B$	$A \vDash B$	$B \vDash A$
В подчиняется А	Х	Х	да (ответ «нет»)	нет (ответ «да»)
Логическая эквивалентность	Х	Х	да (ответ «нет»)	да (ответ «нет»)
Логическая независимость	да	да	нет (ответ «да»)	нет (ответ «да»)

УСТАНОВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ

Установим, в каких логических отношениях
находятся следующие высказывания:

1. Если Смит не был убийцей, то Джонс лжет, а Браун не встречал Смита этой ночью.
2. Если Смит был убийцей, а Джонс не лгал, то Браун и Смит встречались этой ночью.

Логические формы:

1. $\neg p \supset (q \ \& \ \neg s)$
2. $(p \ \& \ \neg q) \supset s$

Алгоритм установления Л.О. между двумя формулами:
построение совместной таблицы истинности

			1		4		3	2				2	1		3	
p	q	s	$\neg p$	p	\supset	$(q \ \& \ \neg s)$						$(p \ \& \ \neg q)$	\supset	s		
И	И	И			И										И	
И	И	Л			И										И	
И	Л	И			И										И	
И	Л	Л			И										Л	
Л	И	И			Л										И	
Л	И	Л			И										И	
Л	Л	И			Л										И	
Л	Л	Л			Л										И	

			1		4		3	2				2	1		3		
p	q	s	$\neg p$	p	\supset	$(q \& \neg s)$						$(p \& \neg q)$	\supset	s			
И	И	И			И										И		
И	И	Л			И										И		
И	Л	И			И										И		
И	Л	Л			И										Л		
Л	И	И			Л										И		
Л	И	Л			И										И		
Л	Л	И			Л										И		
Л	Л	Л			Л										И		

1. Да.

			1	4	3	2				2	1		3	
p	q	s	$\neg p$	$\supset p$	$(q \& \neg s)$					$(p \& \neg q)$	$\supset s$			
И	И	И		И									И	
И	И	Л		И									И	
И	Л	И		И									И	
И	Л	Л		И									Л	
Л	И	И		Л									И	
Л	И	Л		И									И	
Л	Л	И		Л									И	
Л	Л	Л		Л									И	

1. Да. 2. Нет.

			1		4		3	2				2	1		3	
p	q	s	\neg	p	\supset	$(q$	&	\neg	s)		$(p$	&	\neg	q)	\supset	s
И	И	И			И											И
И	И	Л			И											И
И	Л	И			И											И
И	Л	Л			И											Л
Л	И	И			Л											И
Л	И	Л			И											И
Л	Л	И			Л											И
Л	Л	Л			Л											И

1. Да. 2. Нет. 3. Да.

			1		4		3	2				2	1		3	
p	q	s	\neg	p	\supset	$(q \ \& \ \neg \ s)$					$(p \ \& \ \neg \ q)$	\supset	s			
И	И	И			И										И	
И	И	Л			И										И	
И	Л	И			И										И	
И	Л	Л			И										Л	
Л	И	И			Л										И	
Л	И	Л			И										И	
Л	Л	И			Л										И	
Л	Л	Л			Л										И	

1. Да. 2. Нет. 3. Да. 4. Да.

Подпротивоположность

ПРОВЕРКА УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ ТАБЛИЧНЫМ МЕТОДОМ

Умозаключение является правильным
тогда и только тогда, когда
из его посылок логически следует его заключение.

$$\frac{A_1 \dots A_n}{B} \text{ является } \textit{правильным} \Leftrightarrow A_1 \dots A_n \vDash B$$

Таким образом, вопрос *содержательного* характера о
правильности данного УЗ, состоящего из конкретных
высказываний, сводится к вопросу *формального* характера о
наличии *отношения логического следования*
между формулами, логическими формами этих высказываний.

ТАБЛИЧНАЯ ПРОВЕРКА УЗ

1. Если в мире есть справедливость, злые люди не могут быть счастливы.
2. Если мир сотворил злой гений, то злые люди могут быть счастливы.

Следовательно, если в мире есть справедливость, он не может быть творением злого гения.

Логическая форма умозаключения:

$$p \supset \neg q$$
$$s \supset q$$

$$p \supset \neg s$$

p	q	s	p	⊃	¬	q		s	⊃	q		p	⊃	¬	s
И	И	И		Л					И				Л		
И	И	Л		Л					И				И		
И	Л	И		И					Л				Л		
И	Л	Л		И					И				И		
Л	И	И		И					И				И		
Л	И	Л		И					И				И		
Л	Л	И		И					Л				И		
Л	Л	Л		И					И				И		

Есть ли такая строчка, в которой первые две формулы («посылки») истинны, а третья («заключение») ложна?

p	q	s	p	⊃	¬	q		s	⊃	q		p	⊃	¬	s
И	И	И		Л					И				Л		
И	И	Л		Л					И				И		
И	Л	И		И					Л				Л		
И	Л	Л		И					И				И		
Л	И	И		И					И				И		
Л	И	Л		И					И				И		
Л	Л	И		И					Л				И		
Л	Л	Л		И					И				И		

Нет, такой строчки нет, значит, $p \supset \neg q, s \supset q \vDash p \supset \neg s$,
поэтому умозаключение правильно

р	q	s	р	⊃	⌊	q	s	⊃	q		р	⊃	⌊	s
И	И	И		Л				И				Л		
И	И	Л		Л				И				И		
И	Л	И		И				Л				Л		
И	Л	Л		И				И				И		
Л	И	И		И				И				И		
Л	И	Л		И				И				И		
Л	Л	И		И				Л				И		
Л	Л	Л		И				И				И		

Если вычеркнуть все строчки, в которых хотя бы одна из посылок ложна, останется ли в столбике «заключения» хотя бы одна **невычеркнутая** ложь?

p	q	s	p	⊃	⌈	q	s	⊃	q		p	⊃	⌈	s
И	И	И		Л				И				Л		
И	И	Л		Л				И				И		
И	Л	И		И				Л				Л		
И	Л	Л		И				И				И		
Л	И	И		И				И				И		
Л	И	Л		И				И				И		
Л	Л	И		И				Л				И		
Л	Л	Л		И				И				И		

Если нет, то логическое следование есть, если да, то следования нет. В нашем случае остались только 4 истины, поэтому следование имеет место, УЗ правильно.

р	q	s	р	⊃	¬	q	s	⊃	q		р	⊃	¬	s
И	И	И		Л				И				Л		
И	И	Л		Л				И				И		
И	Л	И		И				Л				Л		
И	Л	Л		И				И				И		
Л	И	И		И				И				И		
Л	И	Л		И				И				И		
Л	Л	И		И				Л				И		
Л	Л	Л		И				И				И		

Следует заметить, что $A_1 \dots A_n \models B \Leftrightarrow \models (A_1 \& \dots \& A_n) \supset B$ (запись $\models X$ означает, что формула X является логическим

ПОНЯТИЯ НЕОБХОДИМОГО И ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЙ

Сравним два высказывания:

1. Холмс играет на скрипке, **когда** у него лирическое настроение.
2. Холмс играет на скрипке, **только когда** у него лирическое настроение

Случай 1:

наличие у Холмса лирического настроения (всегда) ведет к тому, что он начинает играть на скрипке
(лирическое настроение – **достаточное** условие игры)

Случай 2:

Отсутствие у Холмса лирического настроения исключает его игру на скрипке
(лирическое настроение – **необходимое** условие игры)

ПОНЯТИЯ НЕОБХОДИМОГО И ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЙ

Событие А называется **необходимым условием** для события В, если без события А событие В не происходит.

Логическая форма высказываний о необходимом условии

$$\neg A \supset \neg B, \text{ или } B \supset A$$

(необходимое условие ставится в консеквент)

Событие А называется **достаточным условием** для события В, если всегда, когда есть А, есть (затем) и В.

Логическая форма высказываний о достаточном условии

$$A \supset B$$

(достаточное условие ставится в антецедент)

ПОНЯТИЯ НЕОБХОДИМОГО И ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЙ

Событие А называется **необходимым условием** для события В, если без события А событие В не происходит.

$$\neg A \supset \neg B, \text{ или } B \supset A$$

(необходимое условие ставится в консеквент)

Событие А называется **достаточным условием** для события В, если всегда, когда есть А, есть затем и В.

$$A \supset B$$

(достаточное условие ставится в антецедент)

Следовательно, если А достаточно для В, то В необходимо для А, и наоборот.

ПОНЯТИЯ НЕОБХОДИМОГО И ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЙ

$$\neg A \supset \neg B, \text{ или } B \supset A$$

(необходимое условие ставится в *консеквент*)

$$A \supset B$$

(достаточное условие ставится в *антецедент*)

p – число делится на 2,

q – число делится на 4

Необходимым условием для делимости числа на 4 является делимость его на 2.

$$\neg p \supset \neg q, \text{ или } q \supset p$$

Достаточным условием для делимости числа на 2 является делимость его на 4.

$$q \supset p$$

«Парадоксы следования» в классической логике

$X_1 \dots X_n \vDash Y$, если и только если **не существует** такой интерпретации параметров, входящих в состав $X_1 \dots X_n$ и Y (такого положения вещей), при которой (котором) каждая из формул $X_1 \dots X_n$ приняла бы значение «истина», а формула Y – значение «ложь».

Пусть множество формул $X_1 \dots X_n$ противоречиво, то есть формулы $X_1 \dots X_n$ несовместимы по истинности:

$$(X_1 \ \& \dots \ \& \ X_n) \equiv \perp.$$

Тогда какое удивительное заключение можно сделать относительно них на основании этого определения?

$X_1 \dots X_n \vDash Y$ для **ЛЮБОГО** Y .

$\perp \vDash Y$ – из противоречия следует все, что

«Парадоксы следования» в классической логике

$X_1 \dots X_n \not\models Y$, если и только если **не существует** такой интерпретации параметров, входящих в состав $X_1 \dots X_n$ и Y (такого положения вещей), при которой (котором) каждая из формул $X_1 \dots X_n$ приняла бы значение «истина», а формула Y – значение «ложь».

$\perp \models Y$ – **из противоречия следует все, что угодно**

Двойственный случай

(если Y – тождественно-истинная формула, $Y \equiv T$):

$X_1 \dots X_n \models Y$ для **ЛЮБЫХ** $X_1 \dots X_n$.

$X \models T$ – **логический закон следует из чего угодно**

«Парадоксы следования» в классической логике

$\perp \vDash Y$ – из противоречия следует все, что

угодно

$X \vDash T$ – логический закон следует из чего угодно

В чем же заключается «парадоксальность» этих утверждений? – В несоответствии их обыденной интерпретации логического следования (как предполагающей реальное обусловливание). Это противоречие между **формальными свойствами** следования в классической логике и тем **интуитивным смыслом**, который мы пытаемся вложить в это понятие следования.

«Парадоксы следования» в классической логике

$\perp \vDash Y$ – из противоречия следует все, что

угодно

$X \vDash T$ – логический закон следует из чего угодно

Если трактовать информативность высказывания как степень снижения неопределенности нашего знания при его принятии, как степень сужения множества возможностей, обусловленного принятием данного высказывания, то мы будем вынуждены трактовать информацию, заключенную в противоречивом высказывании, как максимальную, в логически истинном – как нулевую. Получается, что противоречие включает в себе всю информацию о мире, а логические законы не являются информативными вообще.