МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Царева В.В.
учитель математики МОУ Инзенская СОШ №2

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ:

Цель занятия: познакомить учащихся с методом замены множителей, как эффективным способом решения целого класса неравенств.

Задачи занятия:

- ввести понятие метода замены множителей и рассмотреть применение этого метода для решения различных видов неравенств;
- повторение и обобщение метода интервалов;
- расширение кругозора учащихся;
- воспитание познавательной активности;
- повышение интереса к изучению математики на примере красоты метода замены множителей;
- подготовка учащихся к решению задачи С3 ЕГЭ по математике.

I.ПОВТОРЕНИЕ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

$$а)(x-2)(x+1)\le 0$$

$$б)\ \frac{(x^2-1)(x+3)}{x}\ge 0$$

II.Метод замены множителей

Определения возрастающей и убывающей функций можно сформулировать по другому:

Функция ***y=f(x)*** *называется возрастающей (убывающей) на множестве М, если для любых* ***a и b*** *из множества М выражения* ***a-b*** *и* ***f(a)-f(b)*** *имеют одинаковый (противоположный) знак.*

Этот факт можно использовать при решении неравенств, в правой части которых стоит ноль. Можно в левой части (числителе и/или знаменателе левой части) заменить разность значений монотонной функции разностью значений аргумента. При этом, если функция возрастающая, то знак неравенства сохранится, а если функция убывающая, то знак неравенства поменяется на противоположный. Такой прием решения неравенств и называется ***методом замены множителей***.

Базовая информация по методу замены множителей

1.*Стандартный вид неравенств,* когда применяется метод замены множителей

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} \vee 0$$

где символ «v» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: <, >, $\leq, \geq$

2. *Основная идея метода замены множителей* состоит в замене любого множителя в числителе или в знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ЗАМЕНЫ

$1)\,|t| \leftrightarrow t^2$

$2)\,|t_1|-|t_2| \leftrightarrow t_1^2-t_2^2=(t_1-t_2)(t_1+t_2)$

$3)\,\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1-t_2$

$4)\,|t_1|-\sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1^2-t_2$

$5)\,f-g \leftrightarrow f^2-g^2\,(f\geq 0, g\geq 0)$

$6)\,\log_a f-\log_a g \leftrightarrow (a-1)(f-g)$

$7)\,a^f-a^g \leftrightarrow (a-1)(f-g)$

III. ЗАКРЕПЛЕНИЕ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

$$а)\left|x+2\right| \le \left|4-x\right|$$

$$б)(\left|x+1\right|-3)(\left|x-2\right|-5) < 0$$

$$в)x^2-6\left|x\right|+8 < 0$$

$$г)\left|x^3-1\right| > 1-x$$

$$д)(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

$a)|x+2| \le |4-x|$

$Решение:$

$|x+2|-|4-x| \le 0$

$(x+2)^2-(4-x)^2 \le 0$

$(x+2-4+x)(x+2+4-x) \le 0$

$6(2x-2) \le 0$

$2x-2 \le 0$

$2x \le 2$

$x \le 1$

$Ответ: x \le 1$

$$б)(|x+1|-3)(|x-2|-5)<0$$

$Решение:$

$$((x+1)^2-3^2)((x-2)^2-5^2)<0$$

$$(x+1-3)(x+1+3)(x-2-5)(x-2+5)<0$$

$$(x-2)(x+4)(x-7)(x+3)<0$$

$$x\in(-4;-3)\cup(2;7)$$

$Ответ: x\in(-4;-3)\cup(2;7)$

$$в)\, x^2 - 6|x| + 8 < 0$$

Решение:

$$|x|^2 - 6|x| + 8 < 0$$

$$(|x| - 4)(|x| - 2) < 0$$

$$(x^2 - 16)(x^2 - 4) < 0$$

$$x \in (-4; -2) \cup (2; 4)$$

Ответ: $x \in (-4; -2) \cup (2; 4)$

$г) \left| x^3 - 1 \right| > 1 - x$

Решение:

$$\left| x^3 - 1 \right| - (1 - x) > 0$$

$$(x^3 - 1)^2 - (1 - x)^2 > 0$$

$$(x-1)^2(x^2 + x + 1)^2 - (x-1)^2 > 0$$

$$(x-1)^2((x^2 + x + 1)^2 - 1) > 0$$

$$(x-1)^2(x^2 + x + 1 - 1)(x^2 + x + 1 + 1) > 0$$

$$(x-1)^2(x^2 + x)(x^2 + x + 2) > 0$$

$$x(x-1)^2(x+1)(x^2 + x + 2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$

$$г)(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2-9$$

Решение :

$$(x-3)\sqrt{x^2+4}-(x^2-9) \le 0$$

$$(x-3)\sqrt{x^2+4}-(x-3)(x+3) \le 0$$

$$(x-3)(\sqrt{x^2+4}-(x+3)) \le 0$$

$$(x-3)(x^2+4-(x+3)^2) \le 0$$

$$(x-3)(x^2+4-(x^2+6x+9)) \le 0$$

$$(x-3)(x^2+4-x^2-6x-9) \le 0$$

$$(x-3)(-6x-5) \le 0$$

$$x \in (-\infty;-\frac{5}{6}] \cup [3;+\infty)$$

$$Ответ : x \in (-\infty;-\frac{5}{6}] \cup [3;+\infty)$$

IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$а)\ \frac{(|x-2|-4-x^2)\cdot(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2})}{(|1-x|-4)\cdot(|3+x|-|x-5|)}>0$$

$$Ответ: x\in(-3;-2)\cup[2;5)$$

$$б)(x^2+x-6)\cdot\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0$$

$$Ответ: x\in(-\infty;-3]\cup\{-1\}\cup[3;+\infty)$$

$$в)\ \frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$$

$$Ответ: x\in(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$$

V. ЛИТЕРАТУРА

1)«Квантор» В. И. Голубев; В. И. Тарасов. «Эффективные пути решения неравенств».

2)«Сборник по математике доя поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави.

3)Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: Илекса, 2007

Дерзайте, думайте, решайте.

Спасибо за внимание!