Численные методы алгебры

Основные задачи

Решение СЛУ $Ax = b$

Вычисление определителя

Нахождение обратной матрицы

Определение собственных значений и собственных векторов матрицы

Методы решения

- Точные (с малым числом неизвестных $n \approx 10^3$)
- Итерационные (с числом неизвестных $n \approx 10^6$)
- Вероятностные, (большое число неизвестных $n > 10^7$)

Точные (с малым числом неизвестных $n \approx 10^3$)

Недостатки:

- Требуют хранения в ОП сразу всей матрицы.
- Не учитывают структуру матрицы (много нулей).
- Накапливание погрешностей в процессе решения.

Число арифметических операций в методе Крамера

$$n!\left(n-1\right)+n!-1=n\cdot n!-n!+n!-1\approx n\cdot n!$$

Итерационные, (число неизвестных $n \approx 10^6$)

<u>Норма вектора:</u>

Пусть имеется n-мерное линейное пространство E^n

n-мерных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Если для любого вектора $x \in E^n$ существует

Такое число $\|x\|$ такое, что

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad для\ \forall x \in E^n$$

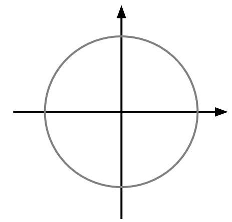
$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad для\ \forall x, y \in E^n$$

$$\|x\| = 0, \quad если \ \ x = 0.$$

Такое число $\|x\|$ называют нормой вектора x.

Примеры норм.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{(x,\, x)}$$

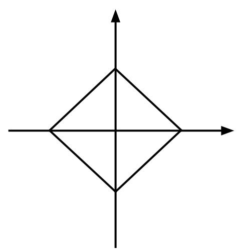


$$\|x\|_2 \le r$$

$$\sqrt{(x,\, x)} \le r$$

Евклидова норма

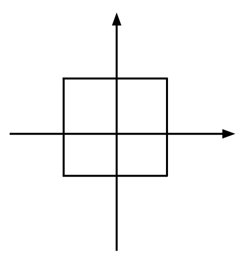
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$



$$\|x\|_1 \le r$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \le r$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$



$$\|x\|_\infty \le r$$

$$\max_{1 \le i \le n} |x_i| \le r$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda^{i}_{A^* A}}$$

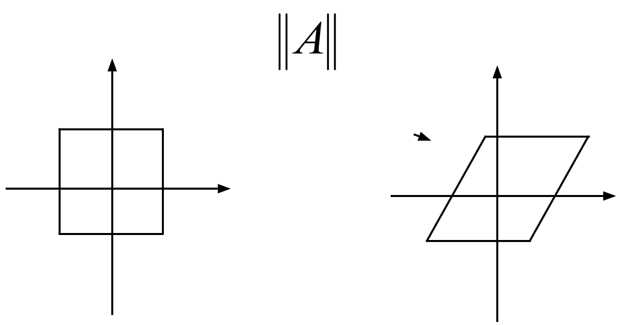
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

Норма матрицы, согласованная с нормой вектора:

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|A x\|}{\|x\|}$$

Геометрическая интерпретация нормы матрицы – максимальная норма вектора, получаемого преобразованием A единичной сферы. Или: радиус шара вектора образа изменяется в $\|A\|$ раз.



Итерационные методы (общие принципы)

С их помощью строится последовательность $\{x^{(k)}\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x,$$

где x – точное решение.

Эффективность итерационных методов определяется скоростью сходимости последовательности приближений $\{x^{(k)}\}$ к решению.

Пусть ищется решение невырожденной системы уравнений

$$A\,x = b$$

ШАГ 1. Преобразование исходной системы к виду $C\,x = B\,x + d$
Причём, системы эквивалентны, т.е. их решения совпадают.

ШАГ 2. Расстановка индексов (номеров приближений) в системе $C\,x = B\,x + d$ и задание нулевого приближения.

Например, $C\,x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + d$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

где $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ заданный вектор.

ШАГ 3. Обоснование сходимости последовательных приближений $\left\{x^{(k)}\right\}$ полученных из $C\,x^{(k+1)} = B\,x^{(k)} + d$ к точному решению x и оценка погрешности k-го приближения $\left\|x^{(k)} - x\right\| \le \varepsilon$

Оценка $\left\|x^{(k)} - x\right\| \le \varepsilon$ позволяет при заданном ε остановить итерационный процесс.

Различные итерационные методы отличаются шагами 1 и 2. Выбор конкретного метода производится на основании оценки погрешности.

Метод простой итерации. (МПИ)

ШАГ 1. Матрица $C = E$, т.е. $x = Bx + b$

$$Ax = b \qquad \Big| + Ex$$

$$Ex + Ax = Ex + b$$

$$Ex = Ex - Ax + b$$

$$Ex = \underbrace{(E - A)}_{B}x + b$$

$$x = Bx + b$$

ШАГ 2. Составим рекуррентную формулу

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = b_{11}x_1^k + b_{12}x_2^k + \dots + b_{1n}x_n^k + b_1, \\ x_2^{k+1} = b_{21}x_1^k + b_{22}x_2^k + \dots + b_{2n}x_n^k + b_2, \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^k + b_{n2}x_2^k + \dots + b_{nn}x_n^k + b_n. \end{cases}$$

ШАГ 3. Выбираем начальное приближение $x^{(0)}$ из каких-либо условий.

По рекуррентной формуле находим $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$

Если метод сходится, тогда $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|$ уменьшается при $k \to \infty$

Теорема 1 (достаточное условие сходимости МПИ).

Если $\|B\| < 1$, то система $x = Bx + b$ имеет единственное решение и итерационный процесс по формуле $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$ сходится к точному решению со скоростью убывающей геометрической прогрессии

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие сходимости МПИ).

Пусть система $x = Bx + b$ имеет единственное решение и итерационный процесс по формуле $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$ сходится к решению системы при любом начальном приближении тогда и только тогда когда все собственные числа матрицы B по модулю меньше 1.

Теорема 3

Пусть $\|B\| \le q < 1$. Тогда при любом начальном векторе $x^{(0)}$ МПИ сходится к единственному решению системы $x = Bx + b$ и при $\forall k \in N$ справедливы оценки погрешности:

$$\left\|x - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q} \cdot \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$ апостериорная оценка

$$\left\|x - x^{(k)}\right\| \le \frac{q^k}{1-q} \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$$ априорная оценка

На практике используют оценку: $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \le \varepsilon$

Это неравенство гарантирует сходимость МПИ только если $q \le 1/2$

Замечание 1

Априорная оценка позволяет подсчитать заранее число итераций k, достаточное для получения искомого решения с заданной точностью ε, при выбранном начальном векторе $x^{(0)}$

Замечание 2

Чем ближе $x^{(0)}$к точному решению тем меньше потребуется итераций. Если нет никакой дополнительной информации о решении задачи, тогда за $x^{(0)}$обычно принимают вектор b свободных членов системы

Метод Зейделя

1. Решаем систему $A \cdot x = b$

2. Важно – в матрице A все диагональные элементы отличны от нуля.

$$\left(B + C\right) \cdot x = b$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Построим рекуррентную формулу

$$B \cdot x^{(k+1)} + C \cdot x^{(k)} = b$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^{k} + \cdots + a_{1n}x_n^{k} = b_1, \\
& a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} = b_2, \\
& \quad \vdots \\
& a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{n\,n}x_n^{(k+1)} = b_n,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x_1^{k+1} = -\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{k} + \cdots + a_{1n}x_n^{k} - b_1\right), \\
& x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2\right), \\
& \quad \vdots \\
& x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{n\,n}}\left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Если $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$ уменьшается, то метод сходится.

Формула $B \cdot x^{(k+1)} + C \cdot x^{(k)} = b$ равносильна формуле

$$B\,x^{(k+1)} = -C \cdot x^{(k)} + b \;\; \Rightarrow x^{(k+1)} = -B^{-1}\,C \cdot x^{(k)} + B^{-1}\,b$$

Итерационный процесс сходится если $\left\| - B^{-1}\,C \right\| < 1$

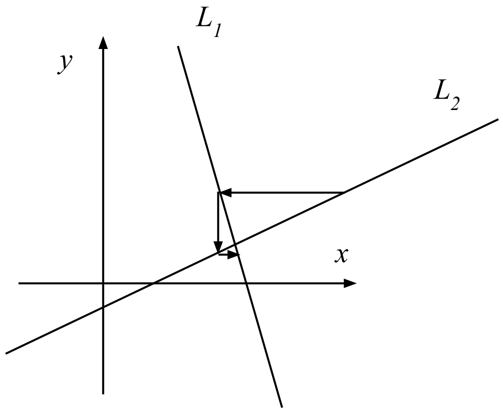
Геометрическая интерпретация метода

Каждое уравнение описывает плоскость $L_i: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j - b_i = 0$

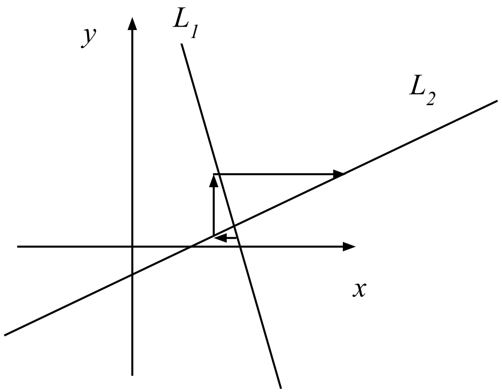
При получении приближения $\left(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \right)$

из приближения $\left(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \right)$ происходит

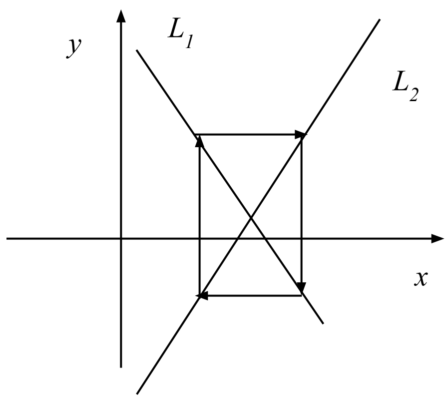
перемещение параллельно оси x_i до пересечения с плоскостью L_i



Метод сходится



Метод расходится



зацикливание

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ -7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

методом простых итераций.

Решение.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{-7}{2}x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 - 3, \\ x_3 = \frac{8}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 0 \cdot x_3 - 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-7}{2} & 0 & 2 \\ \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_\infty = \max\left\{\left|-\frac{3}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|; \left|-\frac{7}{2}\right| + |2|; \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right|\right\} = \frac{11}{2} > 1$$

$$\|B\|_1 = \max\left\{\left|-\frac{7}{2}\right| + \left|\frac{8}{3}\right|; \left|-\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right|; \left|-\frac{1}{2}\right| + |2|\right\} = \frac{37}{6} > 1$$

Не выполняется достаточное условие сходимости (доминирование диагональных элементов)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -7 & -2 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 4 + I \\ (+II+I)\cdot 2 + I \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 10 & 8 & 10 \\ -1 & 2 & 8 & 44 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 - \dfrac{2}{7} x_2 + \dfrac{4}{7} x_3 - \dfrac{6}{7}, \\ x_2 = \dfrac{-1}{10} x_1 + 0 \cdot x_2 - \dfrac{8}{10} x_3 + 1, \\ x_3 = \dfrac{1}{8} x_1 - \dfrac{2}{8} x_2 + 0 \cdot x_3 + \dfrac{44}{8} \end{cases}$$

$$\|B\|_\infty = \frac{9}{10} < 1$$

$$\|B\|_2 = \frac{48}{35} > 1$$

$$\|d\|_\infty = \max\left\{\frac{6}{7}; 1; \frac{11}{2}\right\} = \frac{11}{2}$$

$$x^{(0)} = d \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} -6/7 \\ 1 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^1 = 0 \cdot \left(-\dfrac{6}{7}\right) - \dfrac{2}{7} \cdot 1 + \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{11}{2} - \dfrac{6}{7} = \dfrac{14}{7} = 2, \\ x_2^1 = \dfrac{-1}{10} \cdot \left(-\dfrac{6}{7}\right) + 0 \cdot 1 - \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{11}{2} + 1 = -3\dfrac{11}{35}, \\ x_3^1 = \dfrac{1}{8} \cdot \left(-\dfrac{6}{7}\right) - \dfrac{2}{8} \cdot 1 + 0 \cdot \dfrac{11}{2} + \dfrac{11}{2} = 5\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Оценка погрешности найденных $x_i^{(1)}$ по формуле $\left\| x - x^{(k)} \right\| \le \dfrac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|d\|$

$x^{(1)}$ даёт значение корня с погрешностью

$$\varepsilon_1 = \frac{0.9}{1-0.9} \cdot \frac{11}{2} = \frac{99}{2} = 49{,}5$$

$$\delta_1 = \left\| x^{(0)} - x^{(1)} \right\| = \max\left\{ \left| -\frac{6}{7} - 2 \right|; \left| 1 + 3\frac{11}{35} \right|; \left| \frac{11}{2} + \frac{36}{7} \right| \right\} = 10\frac{9}{14}$$

Следующий шаг итерации. Находим $x_i^{(2)}$ и

$$\varepsilon_2 = \frac{(0.9)^2}{1-0.9} \cdot \frac{11}{2}$$

Точное решение: $\left\{ 5; -\frac{11}{2}; \frac{15}{2} \right\}$

Методы вариационного типа

$$Ax = b$$

Где A вещественная положительно определённая (симметричная) матрица, т.е. $(Ax, x) > 0$

Построим квадратичный функционал $\Phi(x) = (Ax, x) - 2(b, x) + C$

где $C - const$

Задача решения системы и задача минимизации функционала эквивалентны.

Нормальная система имеет единственное решение: обозначим его x^*

Тогда при любом векторе $x = x^* + \Delta$

$$\Phi(x^* + \Delta) = (A(x^* + \Delta), x^* + \Delta) - 2(b, x^* + \Delta) + C =$$

$$= \underline{(Ax^*, x^*)} + (Ax^*, \Delta) + (A\Delta, x^*) + (A\Delta, \Delta) \underline{- 2(b, x^*)} - 2(b, \Delta) + \underline{C} =$$

$$= \Phi(x^*) + \cancel{\left(\underbrace{Ax^*}_{b}, \Delta\right)} + \cancel{\underbrace{(A\Delta, x^*)}_{(Ax^*, \Delta)}} + (A\Delta, \Delta) - \cancel{2(b, \Delta)} = \Phi(x^*) + (A\Delta, \Delta) > \Phi(x^*)$$

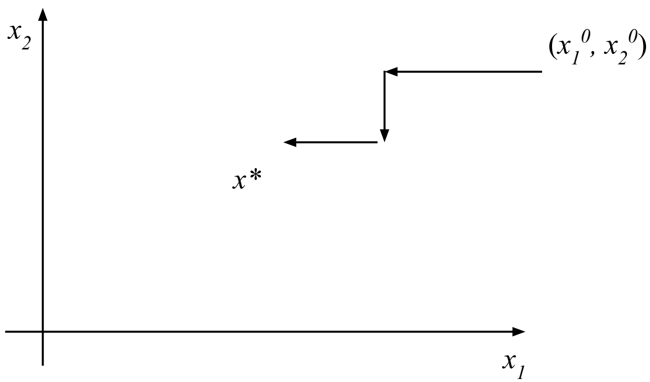
В силу самосопряжённости и положительности A,

$$\Phi\left(x^*\right) = \min_{x \in R^n} \Phi(x)$$

Решение СЛАУ можно заменить задачей поиска минимума функции многих переменных:

- метод покоординатного спуска,
- метод градиентного спуска,
- метод минимальных невязок,
- метод минимальных поправок,
- метод минимальных итераций.

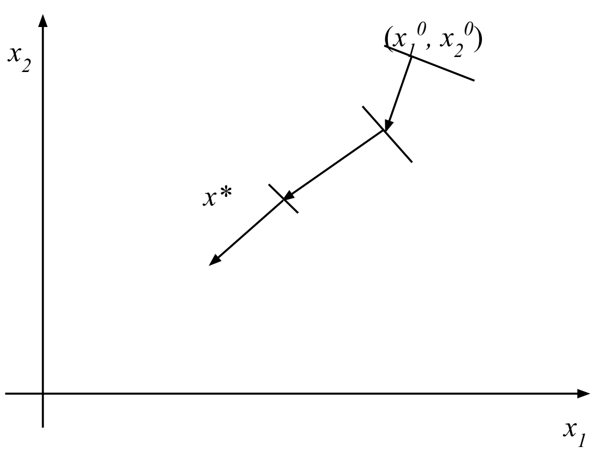
Метод покоординатного спуска



$$x_1^0 \to x_1^1 \qquad \min_{x \in R^2} \Phi\left(x_1, x_2^0 - const\right)$$

$$x_2^0 \to x_2^1 \qquad \min_{x \in R^2} \Phi\left(x_1^1, x_2\right)$$

Метод градиентного спуска



$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \delta_k \cdot grad\, \Phi\left(x^{(k)}\right)$$

$$\Phi\left(x^{(k+1)}\right) = \Phi\left(x^{(k)} - \delta_k \cdot grad\, \Phi\left(x^{(k)}\right)\right)$$

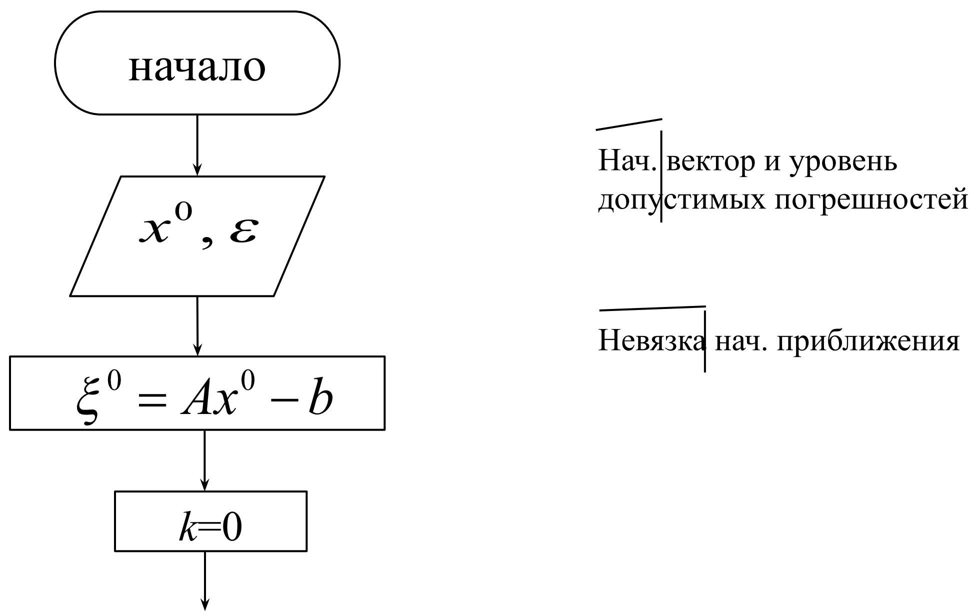
Как выбирается параметр δ_k ?

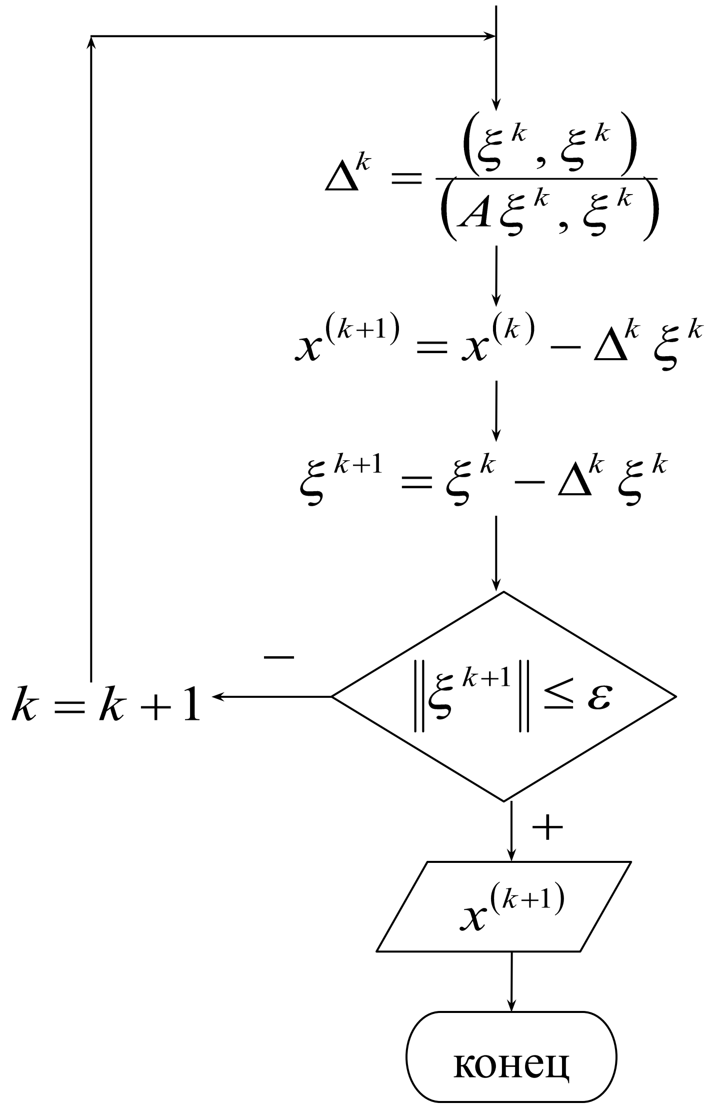
Например выбирают из условия

$$\min \Phi\left(x^{(k)} - \delta_k \cdot grad\, \Phi\left(x^{(k)}\right)\right) \quad \rightarrow \quad \text{метод наискорейшего спуска}$$

$$\delta_k = \frac{\left(A x^k - b,\, A x^k - b\right)}{\left(A\left(A x^k - b\right),\, A x^k - b\right)}$$

Популярный метод сопряжённых градиентов




$\Delta^k = \frac{(\xi^k, \xi^k)}{(A\xi^k, \xi^k)}$
$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Delta^k \xi^k$
$\xi^{k+1} = \xi^k - \Delta^k \xi^k$
$\|\xi^{k+1}\| \le \varepsilon$
$-$
$k = k + 1$
$+$
$x^{(k+1)}$
конец