ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И МИНОРЫ.

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

- Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.
- Пусть дана квадратная матрица ***A*** порядка ***n*** . Сопоставим ей число, которое называется определителем (детерминантом) матрицы ***A***, обозначается ***det A***, Δ или $|A|$ и вычисляется по определенному правилу. Число ***n*** определяет порядок определителя.
- В частных случаях это правило имеет вид:

1. $n=1,\ A=\|a_1\|,\ \det A=a_1.$

2. $n=2,\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$

Пример 1. Найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

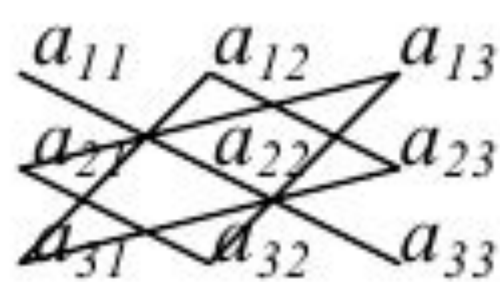
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 4 - (-6) = 10.$$

3. $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определители третьего порядка обычно вычисляются с помощью правила Саррюса, которое символически можно определить так.

Произведение элементов матрицы, которые берутся со **знаком плюс** –



<u>Решение</u>.

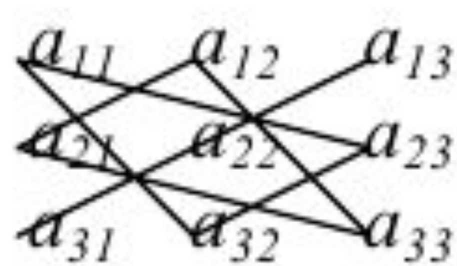
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 4 - (-6) = 10 .$$

3. $\quad n = 3,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} .$$

Определители третьего порядка обычно вычисляются с помощью правила Саррюса, которое символически можно определить так.

Произведение элементов матрицы, которые берутся со **знаком минус** –



- Пример 2. Вычислить определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

- Решение.

$$\det A = 3\cdot 1\cdot(-2) + (-2)\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot(-4)\cdot(0) - 1\cdot(-2)\cdot\left(-2\right) =$$

$$= -6 + 16 - 4 - 4 = 16 - 14 = 2.$$

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

m=n

- Дадим определение определителя ***n***-го порядка матрицы ***A***

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- В дальнейшем, под элементами, строками и столбцами определителя матрицы будем подразумевать элементы, строки и столбцы этой матрицы.
- Определителем ***n***-го порядка квадратной матрицы называется число, равное алгебраической сумме ***n!*** слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение ***n*** элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя. Произведения отличаются одно от другого набором элементов.

- Перед каждым произведением ставится знак "+" или "−".
- Определим знак перед произведением. Поскольку в каждом произведении присутствует один элемент из ***1***-й строки, один элемент из ***2***-ой и т.д., то произведение можно записать так:
- $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}.$
- Здесь ***i, j, k, …, s*** – номера столбцов, в которых стоят элементы, выбранные из ***1***-й, ***2***-й, ***3***-й, ... ***n***-й строк, соответственно. Из сказанного выше ясно, что каждое из различных чисел ***i, j, k, …, s*** равно какому-либо из чисел ***1, 2, ..., n***.
- Расположенные в данном порядке номера столбцов ***i, j, k, …, s,*** образуют ***перестановку*** из чисел ***1, 2, ..., n.*** Всего существует ***n!*** различных перестановок из ***n*** натуральных чисел.

- ***Инверсией*** называется взаимное расположение двух чисел в перестановке, когда большее предшествует меньшему. Например, в перестановке 4,1,3,6,5 три инверсии, а в перестановке 3,7,4,2,5,6 – шесть инверсий.
- Перестановка называется ***четной***, если в ней четное число инверсий и ***нечетной***, если число инверсий нечетное.
- Тогда произведение $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}$ берется со знаком "+", если индексы столбцов образуют четную перестановку, и со знаком "−", если - нечетную.

§2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

- Рассмотрим некоторые наиболее важные свойства определителей.
- ***Свойство 1.*** При перестановке местами двух параллельных строк или столбцов определителя его знак меняется на обратный.
- ***Свойство 2.*** Определитель, содержащий две одинаковые строки или столбца, равен нулю.
- ***Свойство 3***. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному определителю, умноженному на это число.
- ***Свойство 4.*** При транспонировании матрицы её определитель не меняет своего значения.

- ***Свойство 5.*** Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.
- ***Свойство 6.*** Если каждый элемент какой-либо строки или столбца определителя представляем в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.
- ***Свойство 7.*** Общий множитель элементов какой-либо строки или столбца определителя можно выносить за знак определителя.
- ***Свойство 8.*** Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.
- Введем основные понятия, используемые при вычислении определителей различных порядков.

- ***Минором любого элемента a_{ij} квадратной матрицы A*** порядка ***n*** называется определитель матрицы порядка ***n-1***, которая получается из матрицы ***A*** вычеркиванием ***i***-й строки и ***j***-го столбца. Обозначение - M_{ij}.
- ***Алгебраическим дополнением любого элемента a_{ij} квадратной матрицы A*** порядка ***n*** называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ - четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- ***Свойство 9.*** Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения.
- Докажем данное свойство на примере определителя 3-го порядка.
- Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta .$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя выберем первый столбец, поскольку в нём есть нулевые элементы.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-18 + 5 - 16 + 3 - 8 + 60) - 2(0 + 0 + 6 - 0 - 0 + 10) = -26 - 32 = -58.$$

Свойство 10. Сумма произведений элементов какой-либо строки или столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки или столбца равна нулю.

Свойство 11. Определитель произведения $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ двух квадратных матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ порядка $\boldsymbol{n}$ равен произведению их определителей, т.е. $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.