Обратные функции

Подготовила ученица 10 «А» класса
МАОУ «Лицей №3 им. А.С.Пушкина»
Селихова Камилла
Научный руководитель: Попова Нина Фёдоровна

Определение 1.

- Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют обратимой, если любое свое значение она принимает только в одной точке промежутка X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1.

- Если функция $y = f(x)$ монотонна на промежутке X, то она обратима.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X и пусть $x_1 \neq x_2$ — две точки множества X. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Тогда из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т. е. функция обратима.

Определение 2.

- Пусть обратимая функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т.е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X – область значения функции. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$ и называют обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Теорема 2.

- Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, а Y – область значений функции, то обратная функция

  $y = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на Y.

Доказательство теоремы 2.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая функция, y_1 и y_2 — два ее значения, причем $y_1 < y_2$. Так как функция обратима, то каждое из этих значений достигается в одной точке: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Значения x_1 и x_2 связаны неравенством $x_1 < x_2$. В самом деле, если предположить, что $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т. е. $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию. Значит, из $y_1 < y_2$ следует $x_1 < x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, а это означает, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y.

Пример 1.

- Найти функцию обратную для $y = 2^x$.

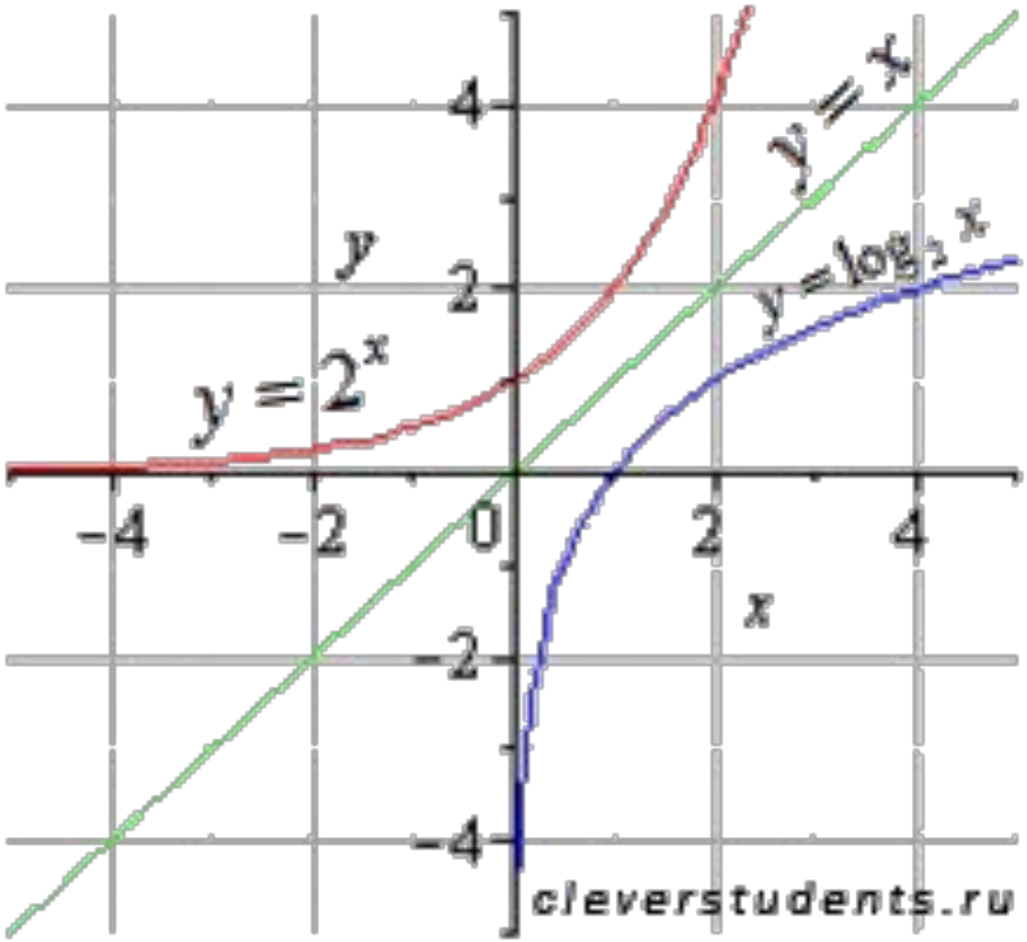
Решение.

Областью определения этой функции является все множество действительных чисел, областью значений является интервал $(0; +\infty)$. Выразим *x* через *y* (другими словами, решим уравнение $y = 2^x$ относительно *x*).

$x = \log_2 y$ - это и есть обратная функция. Переставив буквы *x* и *y* , имеем $y = \log_2 x$.

Таким образом, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ - показательная и логарифмическая функции есть взаимно обратные функции на области определения.

График взаимно обратных показательной и логарифмической функций .



Примеры нахождения обратных функций:

- 1) $y=3x-8$

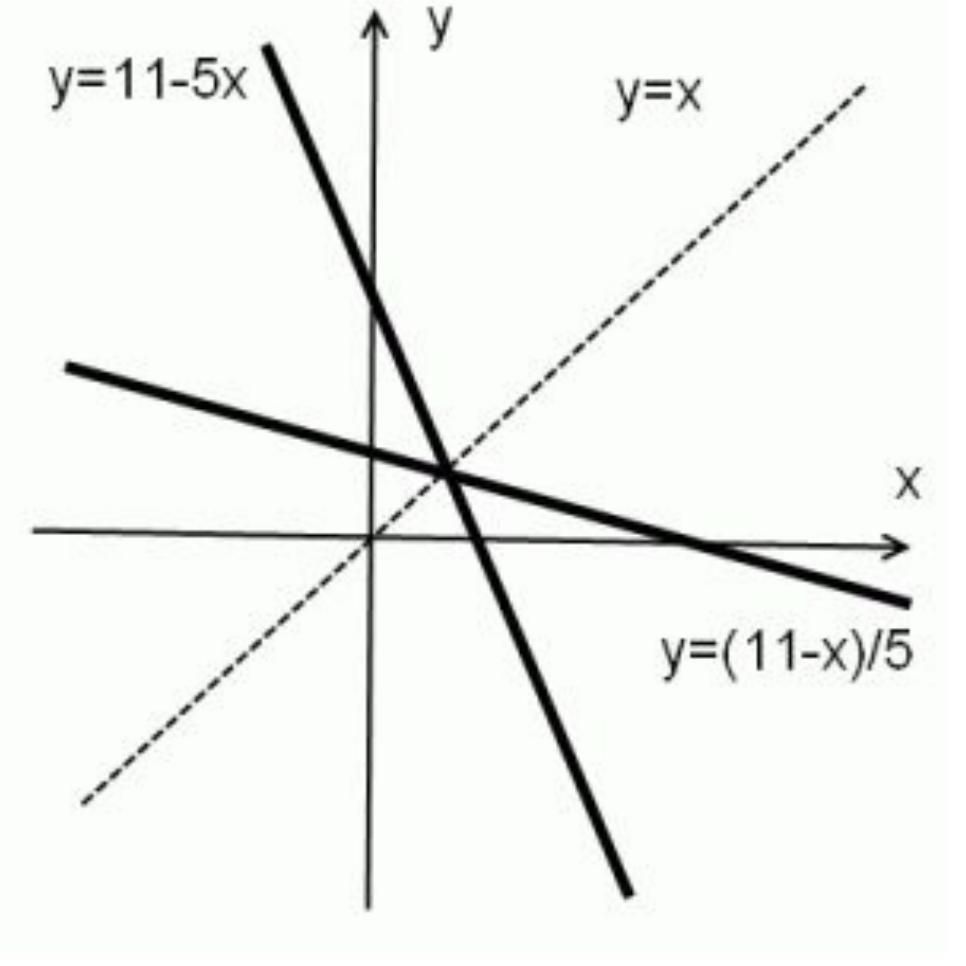
1. $x=3y-8$
2. $3y=x+8$

   $y=(x+8)/3.$

- 2) $y=11-5x$

1. $x=11-5y$
2. $5y=11-x$

   $y=(11-x)/5.$



Пример 2.

- $y=x^2$.
- Это — квадратичная функция. Она убывает на промежутке $(-\infty;0)$, и возрастает на промежутке $(0;\infty)$. Возьмем промежуток $[0;\infty)$. На этом промежутке функция монотонна, поэтому обратима. Ищем обратную функцию.

1. $x=y^2$
2. $y=\sqrt{x}$.

- $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ на $[0;\infty)$ — взаимно обратные функции.
- Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.