

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Раздел № 3.

## «ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ»

### *Изучаемые подразделы:*

Понятие предиката

Логические операции над предикатами

Кванторные операции

Определение формулы логики предикатов

Равносильные формулы логики предикатов

Предварённая нормальная форма

Выполнимость и общезначимость формул

Применение языка логики предикатов в математике и технике

## 3.1. Понятие предиката

- Исчисление высказываний рассматривает каждое высказывание как единое целое, не разделяя его на составные части. Это приводит к тому, что участвующие в логических операциях высказывания по смыслу могут быть совершенно не связанными между собой, а, полученные из них новые сложные высказывания будут правильными с точки зрения исчисления высказываний, но абсурдными с точки зрения естественного языка. Но в науке и практике существуют такие заключения, которые существенным образом зависят не только от структуры, но и от содержания используемых в них высказываний. Символика исчисления высказываний бедна и не позволяет выражать смысловое содержание высказываний.
- Значительно большими возможностями обладает другая логическая теория – **алгебра предикатов** и соответственно **исчисление предикатов** (всё вместе взятое называют **логикой предикатов**).
- В логику предикатов **алгебра высказываний** и **исчисление высказываний** входят как составные части.



Все законы алгебры логики и исчисления высказываний действуют в логике предикатов. Высказываниям вновь возвращаются понятия истинности и ложности.

Логика предикатов расчленяет простое высказывание на:

- субъект (подлежащее, дополнение),
- предикат (сказуемое, определение).



Определение:

- Субъект – это то, о чем что-то утверждается в высказывании.
- Предикат – это то, что именно утверждается о субъекте.

**Пример.** в высказывании “12 – составное число” “12” – субъект, “составное число” – предикат. Это высказывание утверждает, что “12” обладает свойством быть составным числом.

Если в приведенном примере заменить конкретное число 12 переменной  $x$  из множества натуральных чисел, то получим так называемую высказывательную форму: “ $x$  – составное число”. Обратим внимание, что в данном примере при замене числа 12 на  $x$  мы получим повествовательное предложение, о котором не можем определенно сказать, истинно оно или ложно. Следовательно, это предложение не подпадает под определение высказывания, поэтому и говорят, что предложение имеет высказывательную форму, а соответствующее переменное называют высказывательным переменным



Определение:

**Одноместным предикатом  $P(x)$**  называется произвольная функция переменной  $x$ , определенная на некотором множестве  $M$  и принимающая значения из множества  $\{0, 1\}$ .

Множество, на котором определен предикат  $P(x)$ , называется областью определения предиката.

Множество всех элементов  $x \in M$ , при которых предикат принимает значение “истина”, называется множеством истинности этого предиката.

Символически множество истинности предиката  $P(x)$  записывают так:

$I_P = \{x: x \in M, P(x) = 1\}$ . Эта запись означает, что множество состоит из элементов, обладающих свойством, указанным после двоеточия.

- **Пример.** Предикат  $P(x)$  – “ $x$  – составное число” определен на множестве (всех натуральных чисел), а множество  $I_P$  для него есть множество всех составных чисел.

Другой предикат  $F(x)$  – “диагонали параллелограмма  $x$  перпендикулярны” определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Нетрудно заметить, что приведенные примеры одноместных предикатов выражают свойства предметов.





Определение:

Предикат  $P(x)$ , определенный на множестве  $M$ , называется тождественно истинным (тождественно ложным), если  $I_P=M$  ( $I_P=0$ ).

- Обобщением понятия одноместного предиката является понятие  $n$ -местного предиката, с помощью которого выражается отношение между  $n$  предметами.
- Так, примером бинарного отношения (отношение между двумя предметами) является отношение “меньше”. Пусть это отношение рассматривается на множестве  $Z$  целых чисел. Тогда оно может быть охарактеризовано высказывательной формой “ $x < y$ ”, где  $x, y \in Z$  т.е. является функцией двух переменных  $P(x, y)$ , определенной на множестве  $Z \times Z$  с множеством значений  $\{1, 0\}$ .

- Здесь множество  $Z \times Z$  является частным случаем так называемого декартова произведения двух множеств  $M_1$  и  $M_2$ , под которым понимается множество всех упорядоченных пар, первый и второй элементы которых соответственно принадлежат множествам  $M_1$  и  $M_2$ .

- Если  $M_1$  – конечное множество, состоящее из  $n$  элементов, т.е.  $M_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и  $M_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ , то *декартово произведение*  $M_1 \times M_2$  также будет конечным множеством с элементами:  
 $(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_1, y_m), (x_2, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_2, y_m), \dots, (x_n, y_1), (x_n, y_2), \dots,$   
 $\dots, (x_n, y_m).$

Число элементов *декартова произведения*  $M_1 \times M_2$  будет, очевидно, равно  $n \cdot m$ . *Декартово произведение*  $Z \times Z$  множества всех целых чисел  $Z$  будет представлять собой бесконечное множество всех упорядоченных пар целых чисел, количество которых будет бесконечным. *Декартово произведение* одного и того же множества часто обозначают  $Z^2 = Z \times Z$ .





Определение:

**Двухместным предикатом  $P(x)$**  называется функция двух переменных  $x$  и  $y$ , определенная на множестве  $M=M_1 \times M_2$  и принимающая значение из множества  $\{1,0\}$ .

Примерами двухместных предикатов являются: предикат равенства  $E(x,y) - "x=y"$ , определенный на множестве действительных чисел  $R^2 = R \times R$  и предикат делимости нацело  $D(x,y) - "x/y"$ , определенный на множестве  $N^2$

- Таким образом, предикат – это функция или, как мы уже говорили выше, высказывательная форма. Если, например, в высказывательную форму  $D(x,y)$  мы подставим вместо  $x$  и  $y$  какие-то конкретные значения, то высказывательная форма становится высказыванием, принимающим вполне определенные значения истины или лжи (1 или 0). Так,  $D(x,y)$  есть предикат (высказывательная форма), но  $D(8,2)$  уже является истинным высказыванием, а  $D(5,2)$  – ложным высказыванием. В то же время  $D(x,2)$  является высказывательной формой (предикатом), так как его значение истинности зависит от того, каким натуральным числом будет заменена переменная  $x$  (т.е. является функцией от  $x$ , а значит, предикатом). В то же время  $D(x,1)$  является высказыванием, причем истинным, так как любое  $x \in N$  делится на единицу.

## 3.2. Логические операции над предикатами

Поскольку понятие предиката является обобщением понятия высказывания, то к ним применимы все операции логики высказываний.

- Пусть на некотором множестве  $M$  определены два одноместных предиката  $P(x)$  и  $Q(x)$ :
- **Отрицанием** предиката  $P(x)$  называется новый предикат  $\bar{P}(x)$ , который принимает значение “**истина**” при всех значениях  $x \in M$  при которых предикат  $P(x)$  принимает значение “**ложь**”, и принимает значение “**ложь**” при тех значениях  $x \in M$ , при которых предикат  $P(x)$  принимает значение “**истина**”.
- Из этого определения следует, что множеством истинности предиката  $\bar{P}(x)$  является разность множеств  $M$  и  $I_P$ , где  $I_P$  – множество истинности предиката  $P(x)$ , что записывается так:

$$I_{\bar{P}} = M \setminus I_P$$





**Конъюнкцией** двух предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \wedge Q(x)$ , который принимает значение “истина” при тех значениях  $x \in M$ , при которых оба эти предиката принимают значение “истина” и принимают значение “ложь” во всех остальных случаях.



Множеством истинности предиката  $P(x) \wedge Q(x)$  является общая часть множеств истинности предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , т.е. пересечение  $I_P \cap I_Q$ .

Так, *например*, для предикатов  $P(x)$  – “ $x$  – четное число” и  $Q(x)$  – “ $x$  – кратно 5”, определенных на  $M=N$ , конъюнкцией  $P(x) \wedge Q(x)$  является предикат “ $x$  – четное число и  $x$  – кратно 5”.

Так как  $I_P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots\}$ ,  $I_Q = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$

то множество истинности  $I_P \cap I_Q = \{10, 20, 30, \dots\}$ .



**Дизъюнкцией** двух предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \vee Q(x)$ , который принимает значение “ложь” при тех значениях  $x \in M$ , при которых каждый из предикатов принимает значение “ложь”, и принимает значение “истина” во всех остальных случаях.



Очевидно, что множеством истинности предиката  $P(x) \vee Q(x)$  является объединение множеств истинности предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , т.е.  $I_P \cup I_Q$ .

**Например**, для тех же предикатов, что и в выше приведенном примере их дизъюнкцией  $P(x) \vee Q(x)$  будет предикат “ $x$  – четное число или  $x$  кратно 5”, множество истинности которого есть  $I_P \cup I_Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 20, \dots, 28, 30, \dots\}$





**Импликацией** предикатов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется новый предикат  $P(x) \rightarrow Q(x)$ , который является ложным при тех значениях  $x \in M$ , при которых предикат  $P(x)$  принимает значение “истина”, а предикат  $Q(x)$  – значение “ложь”, и принимает значение “истина” во всех остальных случаях.



Множество истинности этой импликации определяется из следующих рассуждений:  $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x)$  ,  
следовательно  $I_{P \rightarrow Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = M \setminus I_P \cup I_Q$  .

**Например**, для предикатов  $P(x)$  – “ $x$  кратно 4” и  $Q(x)$  – “ $x$  - четное число”, определенных на  $M = \mathbb{N}$ , импликацией  $P(x) \rightarrow Q(x)$  является предикат, словесная формулировка которого будет: “если  $x$  кратно 4, то  $x$  - четное число”.

Если учесть, что  $I_{P \rightarrow Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = M \setminus I_P \cup I_Q$ ,  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  ,  
 $I_P = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ ,  $M \setminus I_P = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \dots\}$ , то  
 $M \setminus I_P \cup I_Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$ , т.е. все натуральные числа.

### 3.3. Кванторные операции.

- Кроме операций, общих как для алгебры логики, так и для логики предикатов, в последней используются логические операции, которые не применяются в алгебре логики. Эти операции превращают одноместный предикат в высказывание. Таких операций две. Они имеют собственное название и символически обозначаются с помощью так называемых **кванторов** (от лат. quantum – сколько) **всеобщности** ( $\forall$ ) и **существования** ( $\exists$ ).
- Поскольку эти операции по смысловому содержанию квантора должны отвечать на вопрос “**сколько**”, то, очевидно, должен следовать ответ “**все**” или “**хотя бы один**”, то и применяться они могут только к предикатам, являющихся по определению функцией некоторой переменной, принимающей, в общем случае, бесчисленное множество значений.



Предикаты могут быть как одноместными, так и многоместными, т.е. являются функцией одной или многих переменных, а каждый квантор должен выделять только одну переменную (относиться к одной переменной). Поэтому справа от символа квантора указывают переменную, которую квантор выделяет из предиката.

Тогда кванторная операция всеобщности для одноместного предиката  $P(x)$  записывается как  $\forall xP(x)$  а кванторная операция существования для того же предиката — как  $\exists xP(x)$

Рассмотрим теперь логический смысл, который придается кванторам всеобщности и существования.





Определение:

- **Квантор всеобщности**. Пусть  $P(x)$  – предикат, определенный на множестве  $M$ . Под выражением  $\forall xP(x)$  понимают высказывание, которое является истинным, когда предикат  $P(x)$  истинен для всех элементов  $x \in M$ , и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от  $x$ .
- Соответствующее ему словесное выражение будет “для всякого  $x$   $P(x)$  истинно” или “для всех  $x$   $P(x)$  истинно”.

Переменную  $x$  в предикате  $P(x)$  называют свободной (ей можно придавать различные значения из множества  $M$ ), в высказывании  $\forall xP(x)$  переменная  $x$  уже является связанной квантором  $\forall$ .



- Определение:
- **Квантор существования**. Пусть  $P(x)$  — предикат, определенный на множестве  $M$ . Под выражением  $\exists xP(x)$  понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент  $x \in M$ , для которого предикат  $P(x)$  истинен, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от  $x$ .
- Соответствующее ему словесное выражение читается так: “существует  $x$ , при котором  $P(x)$  истинно”.

В предикате  $P(x)$  переменная  $x$  является свободной, а в высказывании  $\exists xP(x)$  она уже связана квантором  $\exists$ .



- Из определения кванторной операции всеобщности следует, что высказывание  $\forall xP(x)$  истинно только в том единственном случае, когда  $P(x)$  – тождественно истинный предикат, а высказывание  $\exists xP(x)$  ложно только в том единственном случае, когда  $P(x)$  – тождественно ложный предикат.

Кванторные операции применяются не только к одноместным, но и к многоместным предикатам. Так, например, если на множестве  $M$  задан двухместный предикат  $P(x, y)$ , то применение к этому предикату кванторных операций всеобщности и существования по переменной  $x$  приводит к получению одноместных предикатов  $\forall xP(x, y)$  и  $\exists xP(x, y)$  зависящих от переменной  $y$  и не зависящих от переменной  $x$ .

К этим предикатам можно применить кванторные операции по переменной  $y$ , которые приведут уже к четырем высказываниям

$$\forall y\forall xP(x, y) \quad \exists y\forall xP(x, y) \quad \forall y\exists xP(x, y) \quad \exists y\exists xP(x, y)$$

Кванторные операции можно менять местами. Тогда, если поменять местами кванторы, то получим еще четыре высказывания:

$$\forall x\forall yP(x, y) \quad \forall x\exists yP(x, y) \quad \exists x\forall yP(x, y) \quad \exists x\exists yP(x, y)$$

То есть для двухместного предиката применение двух кванторных операций дает восемь возможных высказываний.

**Рассмотрим пример конкретного предиката**  $P(x, y)$ ,  
определенного на множестве  $\mathbb{N}$ . Для всех восьми возможных  
высказываний запишем их словесную формулировку и определим их  
логические значения.

1.  $\forall y \forall x P(x, y)$  – “для всякого  $y$  и для всякого  $x$   $y$  является делителем  $x$ ”.
2.  $\exists y \forall x P(x, y)$  – “существует  $y$ , который для всякого  $x$  является делителем”.
3.  $\forall y \exists x P(x, y)$  – “для всякого  $y$  существует такое  $x$ , что оно делится на  $y$ ”.
4.  $\exists y \exists x P(x, y)$  – “существует  $y$  и существует  $x$  такое, что оно делится на  $y$ ”.
5.  $\forall x \forall y P(x, y)$  – “для всякого  $x$  и для всякого  $y$   $y$  является делителем  $x$ ”.
6.  $\forall x \exists y P(x, y)$  – “для всякого  $x$  существует такой  $y$ , что  $y$  является делителем  $x$ ”.
7.  $\exists x \forall y P(x, y)$  – “существует  $x$  такое, что для всякого  $y$   $x$  делится на  $y$ ”.
8.  $\exists x \exists y P(x, y)$  – “существует  $x$  и существует  $y$  такой, что  $y$  является делителем  $x$ ”.

Анализируя приведенные высказывания, можно отметить, что высказывания 1,  
5, 7 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 8 истинны



**ВЫВОД:** в общем случае изменение порядка следования  
кванторов изменяет смысл высказывания (когда они применяются к  
многоместным предикатам), а значит, и его логическое значение.

Возникает естественный вопрос: связаны ли кванторные операции с какими-нибудь другими логическими операциями?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим предикат  $P(x)$ , определенный на множестве  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ . Если предикат  $P(x)$  является тождественно истинным, то истинными будут высказывания

При этом  $P(m_1), P(m_2), \dots, P(m_n)$  истинными будут высказывания и конъюнкция

$$P(m_1) \wedge P(m_2) \wedge \dots \wedge P(m_n)$$

Если же хотя бы для одного элемента  $m_k \in M$   $P(m_k)$  окажется ложным, то ложными будут и высказывания  $\forall x P(x)$  и конъюнкция  $P(m_1) \wedge P(m_2) \wedge \dots \wedge P(m_n)$ .

Следовательно, справедлива будет равносильность

$$\forall x P(x) \equiv P(m_1) \wedge P(m_2) \wedge \dots \wedge P(m_n).$$

Нетрудно также показать, что справедлива равносильность

$$\exists x P(x) \equiv P(m_1) \vee P(m_2) \vee \dots \vee P(m_n).$$



Отсюда можно сделать вывод, что кванторные операции являются обобщением операций конъюнкции и дизъюнкции на бесконечных областях.

Интересно отметить, что перестановочное свойство кванторов отражает зависимость логического смысла предложений традиционной формальной логики (логики, в которой рассуждения, умозаключения и выводы осуществляются средствами естественного языка) от порядка расположения в них членов предложений.

Рассмотрим два простых предложения, состоящих из одних и тех же членов, но имеющих различное местоположение. Вот эти предложения: “Они все там” и “Там все они”. Под словами “они” и “все” мы будем полагать некоторые множества (например, людей). Очевидно, что множество “все” либо полностью включает множество “они”, либо эти множества являются совпадающими. Другими словами, множество “они” является либо частью множества “все”, либо совпадает с ним, но никак не наоборот. Тогда первое предложение следует понимать так, что в некотором месте (т.е. “там” – на собрании, конференции, в правительстве и т.д.) присутствует или находится полный состав элементов множества “все”. Второе же предложение следует понимать так, что на некотором мероприятии находятся все, но из множества “они”.

Таким образом, в соответствии с первым предложением на мероприятии находятся все элементы из множества “все”, а в соответствии со вторым предложением на мероприятии находятся все элементы из множества “они”, которое меньше или, по крайней мере, равно множеству “все”. **А это не одно и то же.**

## 3.4. Определение формулы логики предикатов

*Символы, используемые в логике предикатов:*

1. Символами  $p, q, r$  будем обозначать переменные высказывания, принимающие два значения: 1 – истина и 0 – ложь.
2. Символами  $x, y, z$  будем обозначать так называемые предметные переменные, т.е. этим символам ставятся в соответствие имена некоторых предметов; символами будем обозначать предметные константы, т.е. конкретные значения предметных переменных.
3. Большими буквами латинского алфавита с предметными переменными в скобках, т.е.  $P(x), Q(x) \dots$ , будем обозначать одноместные предикаты (их еще называют предикатными переменными или переменными предикатами, если под одним и тем же обозначением понимают разные предикаты). Иначе говоря, возможными значениями предикатных переменных являются предикаты.
4. Символы логических операций:  $\wedge, \vee, \rightarrow, -$ .
5. Символы кванторных операций:  $\forall x, \exists x$ .
6. Символы отношений:  $=, <, \leq, >, \geq, \neq$ .
7. Вспомогательные символы: скобки, запятые.



### Дадим определение формуле логики предикатов:

1. Каждое переменное высказывание является формулой.
2. Каждая  $n$ -местная предикатная переменная  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или  $n$ -местный постоянный предикат  $F_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть формула. Такие формулы, как и формулы пункта 1, называются элементарными. В них предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.
3. Если  $A$  и  $B$  – формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная входит в обе формулы либо связно, либо свободно, то слова  $A \vee B$ ,  $A \wedge B$  и  $A \rightarrow B$  есть формулы.
4. Если  $A$  – формула, то  $\overline{A}$  – тоже формула, и характер предметной (имя) переменной при переходе от формулы  $A$  к формуле  $\overline{A}$  не меняется.
5. Если  $A(x)$  – формула, в которую предметная переменная  $x$  входит свободно, то слова  $\forall x A(x)$  и  $\exists x A(x)$  являются формулами, причем предметная переменная входит в них связно.
6. Всякие слова, отличные от тех, которые названы формулами в пунктах 1 – 5, не являются формулами.

## Примеры:

Если  $A(x)$  и  $B(x,y)$  – одноместный и двухместный предикаты,  $x,y$  – предметные переменные, а  $q,r$  – переменные высказывания, то слова  $q$ ,  $A(x)$ ,  $B(x,y)$ ,  $A(x)B(x,y)$ ,  $\forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x,y)$ ,  $\exists xB(x,y) \vee q \rightarrow r$  являются формулами.

Примером слова, не являющегося формулой, является  $\forall x(A(x) \vee B(x,y))$ . Здесь условие пункта 3 не выполняется, так как в формулу  $\forall x(A(x) \vee B(x,y))$  переменная  $x$  входит связно, а в формулу  $A(x)$  – свободно.



## 3.5. Равносильные формулы логики предикатов.



Определение:

Две формулы  $A$  и  $B$  логики предикатов называются равносильными на области  $M$ , если они принимают одинаковые логические значения для всех значений, входящих в них переменных, принадлежащих области  $M$ .



Определение:

Две формулы  $A$  и  $B$  логики предикатов называются равносильными, если они равносильны на всякой области.

Как и в алгебре логики, для равносильности формул используют обозначение  $A \equiv B$ .

Все равносильности алгебры логики будут верны, если в них вместо высказываний подставить формулы логики предикатов.



В логике предикатов, кроме равносильностей, аналогичных равносильностям алгебры логики, имеются еще собственные, не имеющие аналогов в алгебре логики. Эти дополнительные равносильности обусловлены кванторными операциями.

Приведем основные из этих равносильностей. Пусть  $A(x)$  и  $B(x)$  – переменные предикаты, а  $C$  – переменное высказывание, тогда имеют место следующие равносильности:

$$1) \overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)} ;$$

$$2) \overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)} ;$$

$$3) \forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}} ;$$

$$4) \exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}} ;$$

$$5) \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$$

– эта равносильность свидетельствует о том, что квантор всеобщности можно вносить и выносить за скобки в конъюнкции;

$$6) C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (C \wedge B(x));$$

$$7) C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x (C \vee B(x));$$

$$8) C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x (C \rightarrow B(x));$$

$$9) \forall x (B(x) \rightarrow C) \equiv \exists x B(x) \rightarrow C;$$

Равносильности 6 – 8 говорят о том, что переменное высказывание можно вносить под знак квантора всеобщности и выносить из-под знака этого квантора в конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

Несколько особой в этом смысле является равносильность 9. В ней переменное высказывание вносится под квантор  $\exists$  (правая часть этой равносильности), а выносится квантор  $\forall$  (левая часть этой равносильности). Покажем, что это правильно, и одновременно отметим, что в некоторых учебных пособиях ошибочно в этой равносильности переменное высказывание вносится и выносится из-под одного и того же квантора  $\forall$  :

$$\forall x (B(x) \rightarrow C) = \forall x (\overline{B(x)} \vee C) \equiv \forall x (C \vee \overline{B(x)}) \equiv C \vee \forall x \overline{B(x)}$$

Последняя формула получена на основании равносильности 7.

$$\text{Далее: } C \vee \forall x \overline{B(x)} \equiv C \vee \overline{\exists x B(x)} \equiv \overline{\exists x B(x)} \vee C = \exists x B(x) \rightarrow C$$

В алгебре предикатов логическое значение предиката зависит уже от переменных, принимающих значения не из множества  $\{0, 1\}$ , а из множеств различной природы, в том числе из бесконечных дискретных и непрерывных множеств. Построить же такие таблицы истинности невозможно, так как такие таблицы должны иметь неограниченные размеры.

Поэтому в алгебре предикатов при установлении тех или иных их свойств в основном пользуются непосредственными рассуждениями, применяя аксиомы и законы алгебры логики.

Особый интерес представляют две последние равносильности – 15 и 16. Казалось бы, что в дизъюнкции, образованной двумя высказываниями, каждое из которых получено путем применения квантора  $\forall$ , последний можно вынести за скобку. Но оказывается, что  $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \neq \forall x (A(x) \vee B(x))$  и аналогично в конъюнкции  $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \neq \exists x (A(x) \wedge B(x))$ . в таких формулах нельзя выносить за скобки и вносить в них кванторы  $\forall$  и  $\exists$ !

## 3.6. Предварённая нормальная форма.



Определение:

- **Нормальной формой формулы логики предикатов** является такая формула, которая содержит **только** операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания применяется **только** к элементарным формулам. Под элементарной формулой понимается один отдельно взятый предикат.



Замечание:

- Иногда вместо термина нормальная форма используется термин приведенная форма. Однако, по мнению автора, второй термин является неудачным, так как он не сохраняет преемственности между логикой предикатов и алгеброй логики. И если использовать этот термин, то окажется, что в логике предикатов и в алгебре логики **очень** похожие понятия называются разными словами, что делает саму логику не логичной.



Пример:

Приведем пример приведения формулы к нормальному виду. Для этого будем использовать равносильные преобразования.

$$\begin{aligned}(\exists xP(x) \rightarrow \forall yQ(y)) \rightarrow F(z) &\equiv \overline{\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)} \vee F(z) \equiv \overline{\overline{\exists xP(x)} \wedge \overline{\forall yQ(y)}} \vee F(z) \\ &\equiv \exists xP(x) \wedge \overline{\exists yQ(y)} \vee F(z)\end{aligned}$$

Кванторные операции обуславливают появление новых форм формул (новых относительно алгебры логики). Такой формой является так называемая предваренная нормальная форма (ПНФ).



Определение:

- Под **ПНФ** понимается такая форма, в которой кванторные операции либо **полностью** отсутствуют, либо они **предшествуют** всем формулам логики предикатов. Иначе говоря, ПНФ имеет вид:

$$(\delta x_1)(\delta x_2)\dots(\delta x_n)B(x_1, x_2, \dots, x_m), n \leq m$$

где под символами  $(\delta x_i)$  понимается один из кванторов  $\forall x_i$  или  $\exists x_i$ , а формула  $B$  кванторов не содержит.



Теорема:

Всякая формула логики предикатов может быть приведена к ПНФ.

- Пример приведения формулы логики предикатов к ПНФ:

$$A \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \forall y \exists y Q(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{Q(x, y)}$$

$$\equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y \overline{Q(x, y)}) \equiv \exists x (\forall x P(x, y) \vee$$

$$\vee \forall z \overline{Q(x, z)}) \equiv \exists x \forall y (P(x, y) \vee \forall z \overline{Q(x, z)}) \equiv \exists x \forall z \forall y (P(x, y) \vee \overline{Q(x, z)})$$

## 3.7. Выполнимость и общезначимость.



Определение:

- Формула **V** логики предикатов называется выполнимой в области M, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и принадлежащих множеству **M**, при которых формула **V** принимает истинные значения.
- Это определение очень похоже на то определение, которое мы дали для квантора существования в подразделе 3.1, но отличается тем, что оно применяется не к отдельному предикату, а к формуле, состоящей из нескольких предикатов.



Определение:

- Формула **V** называется выполнимой, если существует область, на которой эта формула выполнима.
- Это определение не следует понимать так, что если формула выполнима, то она выполнима в любой области. Для выполнимости достаточно существования любой области, на которой она выполнима.





Определение:

- Формула **B** называется тождественно истинной в области M, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и принадлежащих множеству M.

Это определение похоже на определение из подраздела 3.1., но отличается тем, что то определение давалось для предиката, а данное – для формулы, т.е. предложения, состоящего из нескольких предикатов.



Определение:

- Формула **B** называется общезначимой, если она тождественно истинная на **всякой** области. В подразделе 2.9., мы упомянули о понятии общезначимость и отметили, что его используют иногда для обозначения тождественно истинных формул алгебры логики и обозначают символом  $\vDash$ . Таким образом преемственность и аналогия полностью сохраняются. И в алгебре логики, и в логике предикатов термин общезначимость употребляется для обозначения одинаковых по смыслу понятий – тождественно истинных формул.



Определение:

- Формула **B** называется тождественно ложной в области M, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и принадлежащих множеству M.



Из приведенных определений вытекают следующие свойства формул логики предикатов:

1. Если формула B общезначимая, то она и выполнима на всякой области.
2. Если формула B тождественно истинная в области M, то она и выполнима в этой области.
3. Если формула B тождественно ложная в области M, то она и не выполнима в этой области.
4. Если формула B не выполнима, то она тождественно ложна на всякой области.

На основании приведенных определений выделяют два класса формул логики предикатов: выполнимых и не выполнимых формул.

Примеры выполнимых, невыполнимых и общезначимых формул:

Пусть формула задана в виде:  $\forall x \exists y P(x, y)$  где предикат означает  $P(x, y)$  и определен на области  $M = E$  (символ означает  $E$ ), где  $M = E$  (символ означает  $E$ ) что рассматриваемая переменная  $x$  принимает значения от  $a$  до  $b$ , то же и для  $y$ ). Ясно, что в этом случае формула тождественно истинная в области  $M$ , а поэтому и выполнима в этой области.

Если же предикат  $\sin x < \cos x$  рассматривать в другой области, например  $M = E_1$  где  $E_1 = \{46, 0, 2\}$  формула  $\forall x \exists y P(x, y)$  тождественно ложной. Поскольку рассматриваемая формула не является тождественно истинной на всякой области, то она и не общезначима.



## Рассмотрим другой пример:

Пусть заданы предикаты:  $P(x)$  – “число кратно 7”,  $Q(y)$  – “число кратно 3” и  $R(x, y)$  – “число  $x$  кратно  $y$ ”, где  $E = \{1, 2, \dots, 20\}$ . На какой области формула  $P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x, y)$  выполнима, невыполнима и является ли она общезначимой? Так как для предиката  $P(x)$  и  $Q(y)$  область определения  $E$ , то для предиката  $R(x, y)$  область определения  $E \times E$ . А это означает, что существуют такие  $x$  и  $y$ , что среди натуральных чисел  $N$  всегда найдется такое число, при котором будет истинна формула  $P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x, y)$ . Это число  $21$ . Например, для чисел  $x=7$  и  $y=3$  существует число  $21$  (это же число принадлежит и каждому  $v \in I_{P \wedge Q}$  отдельности множеству  $I_P$  и  $I_Q$ ). Следовательно, рассматриваемая формула является истинной на множестве  $I_{P \wedge Q}$ , т.е. она выполнима в этой области (на этом множестве), а следовательно, и в области  $M$ .

Кроме того, какие бы числа  $x$  и  $y$  мы ни взяли соответственно из  $I_P$  и  $I_Q$ , для них всегда найдется такое число из  $I_{P \wedge Q}$  что будет истинна формула  $\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$  эта формула тождественно истинная в этой области.

Если же предикат  $P(x) \wedge Q(y)$  будем рассматривать в области  $M_1 = E_1 \times E_1$ , где  $E_1 = \{1, 2, \dots, 20\}$ , то формула  $\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$  является тождественно ложной. Действительно, среди пар чисел множества  $M_1$  не найдется ни одной такой пары чисел, для которой были бы истинны предикаты  $P(x)$  и  $Q(y)$ . Следовательно, на множестве  $M_1$  формула является тождественно ложной, а значит, и невыполнимой. И, наконец, эта формула необщезначима, так как не является тождественно истинной на всякой области.

Интерес представляют общезначимые формулы, так как они являются логическими законами. Такой простейшей формулой является формула  $\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)})$ . Причем, независимо от конкретного смыслового содержания предиката  $P(x)$ , эта формула является тождественно истинной в любой области  $M$ .

Действительно,  $\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)}) \equiv \forall x(1) \equiv 1$

Если квантор всеобщности применить к конъюнкции любого предиката  $P(x)$  и его отрицанию, т.е.  $\forall x(P(x) \wedge \overline{P(x)})$  получим тождественно ложную формулу в любой области  $M$ .

Действительно,  $\forall x(P(x) \wedge \overline{P(x)}) \equiv \forall x(0) \equiv 0$ .

В то же время  $\overline{\forall x(0)}$  значит, формула  $\overline{\forall x(P(x) \wedge \overline{P(x)})}$  является логическим законом.





Пример:

Рассмотрим еще один пример, показывающий, как с помощью равносильных преобразований устанавливается общезначимость формул логики предикатов:

$$\begin{aligned} \forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists xP(x) \wedge \forall xQ(x)} &\equiv \overline{\forall x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \exists xP(x) \wedge \forall xQ(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x\overline{P(x) \vee \overline{Q(x)}} \vee \overline{\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)} \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists xP(x) \vee \exists x\overline{Q(x)}} \equiv \\ &\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists xQ(x) \vee \exists xP(x) \equiv \exists xP(x) \wedge Q(x) \vee Q(x) \vee \exists xP(x) \equiv \\ &\equiv \exists x(P(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(x) \vee Q(x)) \vee \exists xP(x) \equiv \exists xP(x) \vee Q(x) \vee \exists xQ(x) \equiv \\ &\equiv \exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \vee \exists xP(x) \equiv 1 \vee \exists xQ(x) \equiv 1 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили заданную формулу, которая является тождественно истинной для любых двух одноместных предикатов и в любой области (поскольку область заранее не оговаривалась). Значит, формула общезначима.

## 3.8. Применение языка логики предикатов в математике и технике.

Как было показано в разделе 1 на соответствующих примерах, алгебра логики является основным теоретическим средством для построения цифровых автоматов и, в частности, электронных цифровых вычислительных машин.

Именно благодаря алгебре логики стало возможным появление в 1945 г. первой электронной ЭВМ ЭНИАК.

Логика предикатов пока такого широкого применения не нашла. Тем не менее, в самой математике она применяется для компактной записи определений, теорем и доказательств, а в технике может быть той благодатной почвой, на основе которой строятся системы искусственного интеллекта.



Рассмотрим некоторые примеры использования языка логики предикатов в математике. Предварительно введем соглашение о том, что для большей ясности после кванторов  $\exists$  и  $\forall$  в соответствующей переменной в некоторых случаях будем указывать область ее определения, а также будем применять символ эквивалентности .

Тогда определение предела числовой последовательности на языке логики предикатов запишется так:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \in N (n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Здесь использован трехместный предикат:  $P(\varepsilon, n, n_0) \text{---} (n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

Определение возрастающей функции можно записать так:

$$\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

Здесь использован двухместный предикат  $P(x_1, x_2)$

$$(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$



Рассмотрим записи некоторых теорем на языке логики предикатов:

- $\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x)) ; (1)$
- $\forall x \in E(\underline{Q(x)} \rightarrow \underline{P(x)}) ; (2)$
- $\forall x \in E(\underline{P(x)} \rightarrow \underline{Q(x)}) ; (3)$
- $\forall x \in E(\underline{Q(x)} \rightarrow \underline{P(x)}) . (4)$

Две теоремы, у которых условие первой является заключением второй, а условие второй является заключением первой, называются взаимно обратными друг другу. Так, теоремы (1) и (2), а также (3) и (4) – взаимно обратные теоремы. При этом если одну из них называют прямой теоремой, то вторая называется обратной.

Две теоремы, у которых условие и заключение одной являются отрицанием соответственно условия и заключения другой, называются взаимно противоположными.



Значительный интерес представляет построение утверждения, отрицающего справедливость некоторой теоремы, если она может быть записана в таком виде:

$$\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))$$

Очевидно, что для опровержения этой теоремы необходимо доказать справедливость противоположного утверждения:

$$\overline{\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))} \equiv \exists x \in \overline{E(P(x) \vee Q(x))} \equiv \exists x \in E(P(x) \wedge \overline{Q(x)})$$

Следовательно, чтобы доказать, что теорема  $\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))$  неверна, достаточно указать такой элемент  $x \in E$ , для которого предикат  $P(x)$  истинен, а предикат  $Q(x)$  – ложен. Другими словами, нужно привести контрпример, опровергающий теорему  $\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))$



Как уже говорилось, алгебра логики сыграла решающую роль в создании цифровых ЭВМ. Первые ЭВМ могли выполнять только арифметические действия над числами. Но человеку этого было мало. И уже практически сразу встал вопрос: а нельзя ли сделать ЭВМ усилителем интеллектуальных способностей человека? Иными словами, нельзя ли создать мыслящую машину?

Чтобы решить эту глобальную проблему, человек должен был научить машину понимать естественный язык, чтобы он мог на нем общаться с машиной. Но чтобы этого достигнуть, процесс должен быть не односторонним (когда машину пытаются заставить понимать естественный язык), а двухсторонним (когда в естественном языке находят такие его особенности и законы, которые позволили бы формировать его и сделать науку о языке – лингвистику – не описательной, а точной).



Для построения систем искусственного интеллекта необходимо, в первую очередь, уметь автоматизировать процесс логических рассуждений (т.е. наделить такой способностью ЭВМ). Без использования специального языка, на котором можно формулировать посылки и делать верные логические выводы, такую задачу решить, очевидно, невозможно.

В настоящее время считается, что язык логики предикатов, являющийся важнейшей составной частью математической логики, представляет собой такую логическую систему, с помощью которой можно выразить большую часть знаний, относящихся к математике, а также к естественному разговорному языку. Логика предикатов содержит правила логического вывода, позволяющие делать верные логические построения новых утверждений, исходя из некоторого заданного множества утверждений. Благодаря своей общности и логической силе логика предикатов может претендовать на использование ее для машинного построения умозаключений.

*Конец раздела №3*

