

1.4 Полные множества булевых функций

- **Множество булевых функций F называется *полным*, если любая булева функция может быть представлена некоторой формулой над F .**

Пример.

- Множество функций $\{\neg, \&, \vee\}$ является полным множеством в силу теоремы о представлении любой булевой функции ДНФ (или КНФ)
- Из множества можно удалить конъюнкцию (дизъюнкцию), поскольку $\&$ (\vee) можно выразить по законам де Моргана через \neg и \vee ($\&$)

- **Множество, состоящее из единственной функции штриха Шеффера $\{x | y = \neg(x \& y)\}$ является полным, поскольку**

$$\neg x = (x | x)$$

$$x \& y = \neg(x | y) = ((x | y) | (x | y))$$

- 
- **Множество функций
(базис Жегалкина)**

$$\{\oplus, \&, 1\}$$

является полным множеством

- Полином Жегалкина от n переменных представление булевой функции в виде

$$P(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subseteq I} a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

- где $I = \{1, 2, \dots, n\}$ коэффициенты

полинома $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$ индексированы всеми возможными подмножествами множества I

Утверждение


Полином Жегалкина для любой булевой функции определен однозначно.

Пример

- Пусть $f=(1,1,0,0,1,0,1,1)$

Функция f представляется некоторым полиномом Жегалкина от 3 переменных, т.е.

$$f = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$


$$f(0,0,0) = a_0 = 1$$

$$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = a_3 \oplus 1 = 1 \quad a_3 = 0$$

$$f(0,1,0) = a_2 \oplus 1 = 0 \quad a_2 = 1$$

$$f(1,0,0) = a_1 \oplus 1 = 1 \quad a_1 = 0$$

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0 = \\ &= a_{12} \oplus 1 \oplus 1 = 1 \end{aligned}$$

$$a_{12} = 1 \quad a_{23} = 0 \quad a_{13} = 1 \quad a_{123} = 1$$

$$f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus 1$$



1.5 Классы Поста

- Функцию f называют *функцией, сохраняющей константу 0*, если $f(0,0,\dots,0) = 0$
- Функцию f называют *функцией, сохраняющей константу 1*, если $f(1,1,\dots,1) = 1$
- Множество всех функций, сохраняющих константу 0 обозначим T_0 . Множество всех функций, сохраняющих константу 1 -- T_1 .



Пример.

Функция $f = (00111101)$ является функцией, сохраняющей и константу 0, и константу 1.

Отрицание не сохраняет ни 0, ни 1.

- Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булева функция. *Двойственной* к ней называется функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n)$.

Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f , то такая функция f называется *самодвойственной*.

- **Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах она принимает взаимно противоположные значения.**
- **Множество всех самодвойственных функций обозначим S**

- Функцию f монотонная, если $f(\alpha) \leq f(\beta)$ для всех наборов значений переменных таких, что $\alpha \leq \beta$
- Множество всех монотонных функций принято обозначать через M

- Если функция f не является монотонной, то найдутся два таких набора α , β и индекс i , что

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$$

и $f(\alpha)=1$, $f(\beta)=0$,

т.е. эти два набора различаются значениями в точности одной компоненты, а значение функции равно 0 на большем наборе и равно 1 на меньшем




Пример.

- **Функция $f = (0011)$ монотонна.**
- **Отрицание немонотонная функция**

- **Функция f линейная, если f представима в виде полинома Жегалкина первой степени, т.е.**

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_0$$

- **Множество всех линейных функций обозначают через L**

- 
- 
- Множества функций T_0 , T_1 , S , M , L называются *классами Поста*

Пример



- Штрих Шеффера $x | y = \neg(x \& y)$
не принадлежит ни одному из классов Поста.

x	y	$x y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Все свойства, кроме нелинейности, следуют из таблицы этой функции. Нелинейность доказывается выводом нелинейного полинома Жегалкина для штриха Шеффера

$$x | y = \neg(x \& y) = (x \& y) \oplus 1$$

- Множество булевых функций F называют *замкнутым*, если любая формула над F представляет некоторую функцию из F

- 
- 
- **Множество F булевых функций**
полное,
если замыкание F совпадает с
множеством всех булевых функций



Теорема.

Каждый класс Поста замкнут.

- Нужно показать, что для каждого класса Поста \mathcal{P} любая функция из \mathcal{P} , представляемая подстановкой функций из \mathcal{P} принадлежит этому же классу \mathcal{P} .

1-2. Замкнутость классов T_0 и T_1

Пусть f, g_1, \dots, g_n из класса T_0 , т.е.

$$f(0,0,\dots,0)=0, g_i(0)=0$$

Тогда $f(g_1(0), \dots, g_n(0))=0$

Следовательно, подстановка функций
из T_0 содержится в классе T_0

Для класса T_1 доказательство
аналогично.

3. Замкнутость класса S

■ Пусть f, g_1, \dots, g_n из класса S , т.е.

$$f = f^*, g_i = g_i^*$$

Показать, что $f(g_1, \dots, g_n)$ из S

4. Замкнутость класса M

- Пусть f, g_1, \dots, g_n из класса M
Показать, что $f(g_1, \dots, g_n)$ из M

5. Замкнутость класса L

- Очевидно, что при подстановке в линейную функцию вместо ее переменных произвольных линейных функций получится снова линейная функция.
- Доказана замкнутость каждого класса Поста.

Реализация констант 0 и 1

■ Случай 1

Пусть $f_0 \notin T_0$ $f_0 \in T_1$,

т.е. $f_0(0, \dots, 0) = 1, f_0(1, \dots, 1) = 1$

Тогда $1 = f_0(x, \dots, x)$

Для получения 0 нужно использовать $g \notin T_1$

$$0 = g(1, \dots, 1) = g(f_0(x, \dots, x), \dots, f_0(x, \dots, x))$$

- Аналогично реализуются константы, если имеется функция $f_1 \notin T_1 \quad f_1 \in T_0$,

Случай 2

- Пусть $f_S \notin \mathcal{S}$ Тогда найдется такой набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $f_S(\neg\alpha) = f_S(\alpha)$

- Определим функцию $h(x) = f_S(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$

где $x^\sigma = \begin{cases} \neg x, & \sigma = 0 \\ x, & \sigma = 1 \end{cases}$ $0^\sigma = \neg\sigma, 1^\sigma = \sigma$

Тогда

$$h(0) = f_S(\neg\alpha) = f_S(\alpha) = h(1)$$

Реализация отрицания

- Если функция f_M немонотонная, то с использованием констант 0 и 1 из нее можно реализовать отрицание
- Для немонотонной функции f_M найдутся два таких набора α и β и индекс i , что

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$$

и $f(\alpha)=1$, $f(\beta)=0$,

Тогда


$$\neg x = f_M(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

- Если немонотонная функция f_M не сохраняет 0 и 1,

$$f_M(0, \dots, 0) = 1, f_M(1, \dots, 1) = 0$$

- ТО

$$\neg x = f_M(x, \dots, x)$$



**Реализация конъюнкции с
использованием констант и
отрицания**

**Если функция f_L нелинейная, то с
использованием констант и
отрицания из нее можно реализовать
конъюнкцию**

Критерий Поста

- *Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов Поста.*

Необходимость.

- Пусть множество F булевых функций полно. Предположим, что оно содержится целиком в одном из классов Поста. Всякая суперпозиция над F снова лежала бы в классе Поста.
- Существуют функции, не содержащиеся ни в одном из классов Поста, например штрих Шеффера.
- Таким образом, нашлась функция, которую нельзя представить в виде суперпозиции над F , что противоречит предположению о полноте F .

Достаточность

- Для доказательства полноты множества F , удовлетворяющего условию теоремы, построим формулы над F для отрицания и конъюнкции, поскольку множество, образованное этими функциями, полно.
- Тогда полным и множество F .

- По условию теоремы в F найдется хотя бы одна функция $f_1 \notin T_0$
- Если $f_1 \in T_1$ то можно реализовать константу 1.
- Если $f_1 \notin T_1$ то можно реализовать отрицание.

- По условию теоремы в F найдется хотя бы одна функция $f_2 \notin T_1$
- Если $f_2 \in T_0$, то можно реализовать константу 0.
- Если $f_2 \notin T_1$, то можно реализовать отрицание.
- Таким образом, могут быть реализованы либо две константы 0 и 1, либо только отрицание, либо константы и отрицание

- В случае, если из первых двух классов (T_0, T_1) построены только формулы для констант, с использованием немонотонной функции f_m можно реализовать отрицание.
- Если реализовано только отрицание, с использованием несамодвойственной функции f_s можно реализовать константы.



- Имея константы и отрицание, из нелинейной функции f_L можно реализовать конъюнкцию.
- Таким образом, отрицание и конъюнкция реализованы формулами над F .
- Множество полно.

Пример.

- Проверить на полноту множество булевых функций $F = \{\approx, \vee, 0\}$
- Для исследования используют критериальную таблицу. Строки таблицы соответствуют функциям исследуемого множества, а столбцы -- классам Поста

+

	T_0	T_1	S	M	L
\sim	—	+	—	—	+
V	+	+	—	+	—
0	+	—	—	+	+

- 
- 
- В множестве F есть функции, не принадлежащие каждому из пяти классов Поста.
 - Согласно теореме Поста, множество F полное