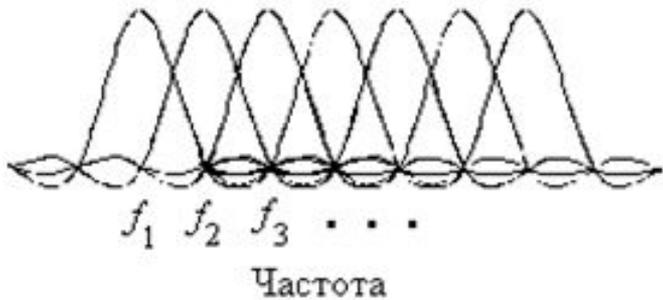


Лекция 13. Частотная и временная синхронизация в OFDM системе

Ортогональные многомерные сигналы с частотным сдвигом

$$s_m(t) = \text{Re} [s_{0m}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos[2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t] \quad 0 \leq t \leq T_s, m=1, 2, \dots, M.$$

$$s_{0m}(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \exp(j2\pi m \Delta f t) \quad \rho_{km} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{j2\pi(m-k)\Delta f t} dt \quad |\rho_{km}| = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{T_s}$$



Спектры синусоид с ортогональными частотами

Формирование OFDM-сигнала

d_k – информационный символ, передаваемый на k -й поднесущей,
 n – дискретное время, N_F – число точек БПФ.

Передаваемый узкополосный сигнал
(n – дискретное время, N_F – размерность БПФ)

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{k=1}^{N_F} d_k \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N_F}\right)$$

$$f_k = k\Delta f, \quad N_F = \frac{T_s}{\Delta t}$$

*



Прием OFDM-сигнала

Принятый низкочастотный сигнал $x(n) = \sum_{l=0} h(l)s(n-l) + z(n)$

$z(n)$ – гауссов собственный шум приемника с нулевым средним и дисперсией σ_0^2

Приемник выполняет прямое БПФ

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp\left(\frac{j2\pi mn}{N_F}\right)$$

$$g_m = g_m^{(1)} + g_m^{(2)}$$

$$g_m^{(1)} = \sqrt{N_F} H_m d_m \quad H_m = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{l=0} h(l) \exp\left(\frac{j2\pi ml}{N_F}\right)$$

H_m – коэффициент передачи
многолучевого канала на
 m -й поднесущей

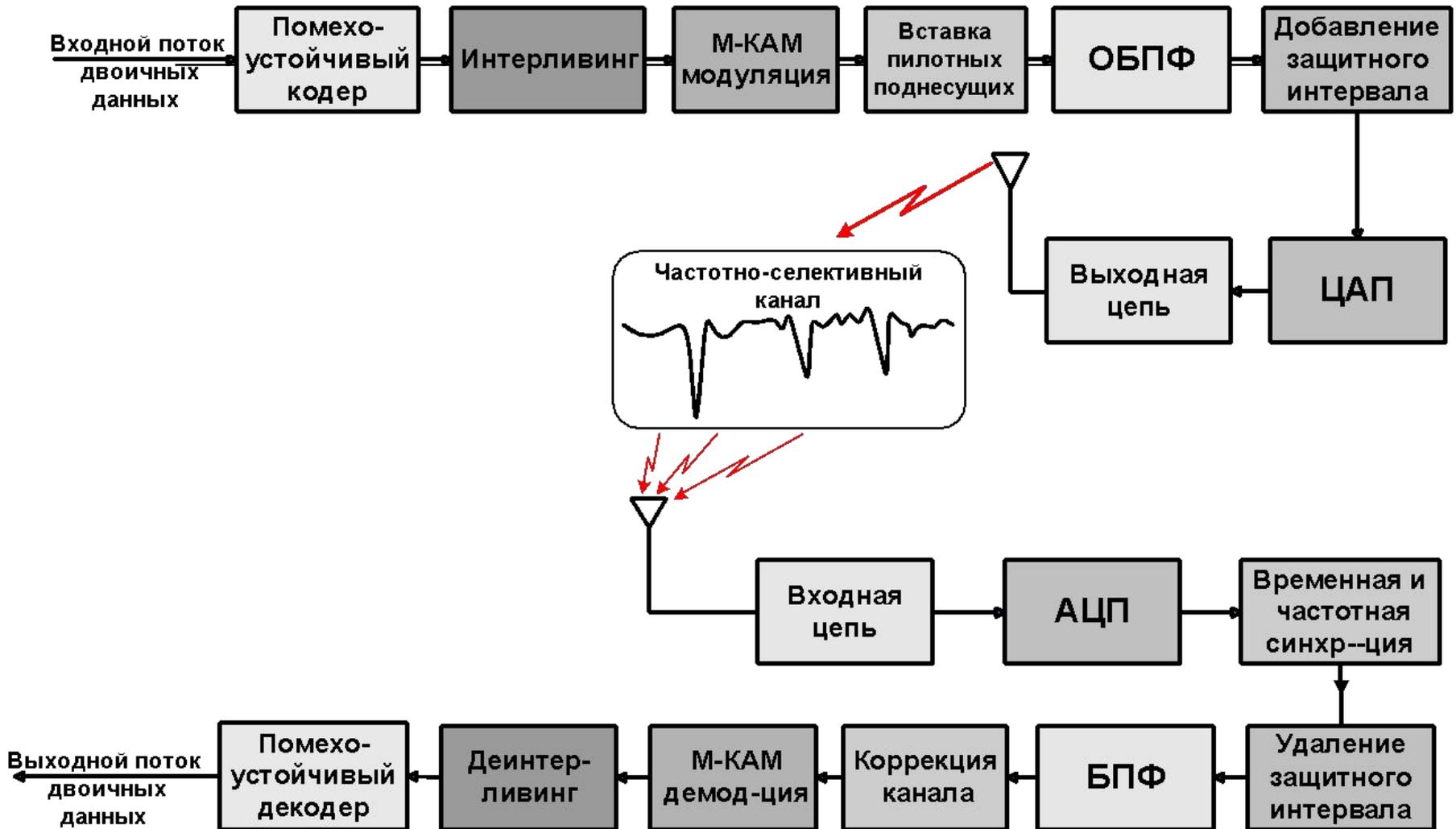
$$\langle g_m^{(2)} \rangle = 0 \quad \langle |g_m^{(2)}|^2 \rangle = \sigma_0^2$$

$$\gamma_m = \frac{|d_m|^2}{\langle |d_m|^2 \rangle} \frac{P_0}{\sigma_0^2}$$

$$\langle \gamma_m \rangle = P_0 / \sigma_0^2$$

ОСШ на m -й поднесущей

4. Структурная схема OFDM-системы связи



1. Влияние ошибок частотной синхронизации

$$S_k(f) = \text{sinc}\left(\frac{f - f_k}{\Delta f}\right),$$

$$\text{sinc}(f) = \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

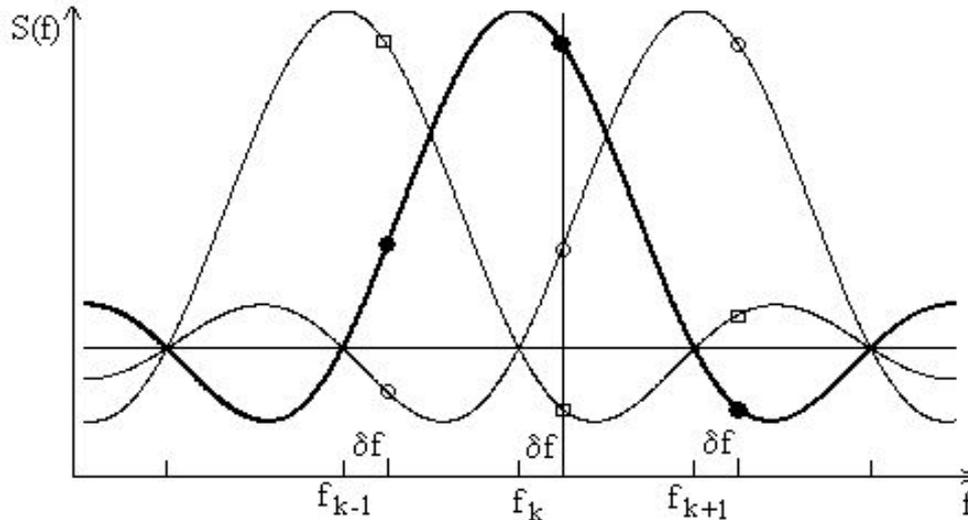
- спектр сигнала, передаваемого на k -ой поднесущей

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp(j2\pi f_k n \Delta t)$$

- прямое БПФ на приемнике при идеальной синхронизации поднесущих на передатчике и приемнике

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{N_F}} \sum_{n=1}^{N_F} x(n) \exp[j2\pi(f_k + \delta f)n \Delta t]$$

- прямое БПФ на приемнике при ошибке δf синхронизации поднесущих на передатчике и приемнике



Из-за ошибки синхронизации:
 - сигнал на k -ой поднесущей уменьшается,
 - появляется помеха между поднесущими (inter-subcarrier interference - ISI).



Помеха между поднесущими

$$I_k = \sum_{j=1, j \neq k} d_j S_j(f_k + \delta f)$$

Символ d_j , передаваемый на j -ой поднесущей, является случайным.

Поэтому, помеха I_k также является случайной величиной.

При достаточно большом числе поднесущих помеха I_k в соответствии с центральной предельной теоремой подчиняется гауссовой статистике (гауссов шум с нулевым средним и дисперсией)

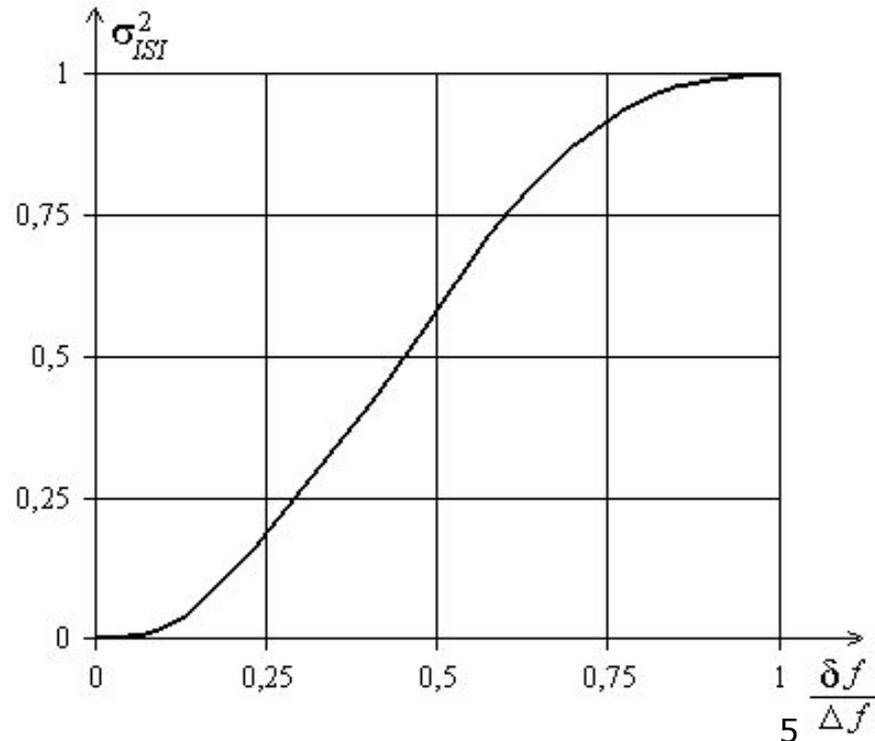
$$(\sigma_{ISI}^2)_k = \sum_{j=1, j \neq k} \sigma_j^2 |S_j(f_k + \delta f)|^2 \quad (\sigma_j^2 = \sigma^2) \quad \text{- дисперсия передаваемых символов (не зависит от номера поднесущей)}$$

Имеем $S_j(f_k + \delta f) = \text{sinc}\left((k-j) + \frac{\delta f}{\Delta f}\right)$

Тогда $\sigma_{ISI}^2 = \sigma^2 \sum_{j=1, j \neq k} \left| \text{sinc}\left((k-j) + \frac{\delta f}{\Delta f}\right) \right|^2$

Дисперсия помехи между поднесущими для размерности БПФ 64, 512 и 4096 (соответствующие кривые совпадают)

Основной вклад в помеху вносят только ближние поднесущие





Коэффициент уменьшения амплитуды сигнала из-за ошибки синхронизации $\text{sinc}(\delta f / \Delta f)$

Эквивалентное ОСШ $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k \frac{\text{sinc}(\delta f / \Delta f) \cdot \sigma^2}{\gamma_k \cdot \sigma_{ISI}^2 + \sigma^2}$ (γ_k – ОСШ при идеальной синхронизации при $\delta f=0$)

$$\tilde{\gamma}_{\gamma_k \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\text{sinc}(\delta f / \Delta f) \cdot \sigma^2}{\sigma_{ISI}^2}$$

При неограниченном увеличении ОСШ γ_k , или при неограниченном увеличении мощности передатчика эквивалентное ОСШ стремится к конечному пределу

Пример. 4-ФМ сигналы единичной мощности $d_k = \frac{(\pm 1 \pm j)}{\sqrt{2}}$

Среднее значение $\langle d_k \rangle = 0$, дисперсия $\sigma^2 = 1$

Относительная ошибка синхронизации $\delta f / \Delta f = 0.25$

Максимально достижимое ОСШ ≈ 13.5 дБ.

Относительная ошибка синхронизации $\delta f / \Delta f = 0.1$

Максимально достижимое ОСШ ≈ 32 дБ.



2. Влияние ошибок временной синхронизации

Ошибка синхронизация по времени не приводит к появлению помехи между поднесущими.

Однако если область времени, на которой выполняется БПФ на приемнике, захватывает выборки из двух последовательных символов, то появляется **межсимвольная помеха**.

Свойство преобразования Фурье: сдвиг δt по времени приводит в спектре сигнала к дополнительному фазовому множителю $\exp(j2\pi f\delta t)$

Фазовый сдвиг между соседними поднесущими будет составлять $\Delta\varphi = 2\pi\Delta f\delta t$

Если $\delta t = m\Delta t$, где Δt – интервал времени между выборками, то $\Delta\varphi = 2\pi m / N_F$

Поворот фазы происходит к соответствующему повороту диаграммы отображения бит в символы, что приводит к ошибкам при демодуляции передаваемых данных.

Величина ошибки демодуляции зависит от типа модуляции

3. Совместное влияние ошибок синхронизации

Предположим теперь, что имеются ошибки синхронизации по частоте (δf) и времени (δt)

Помеху между поднесущими можно учесть добавляя к дисперсии собственных шумов дисперсию помехи между поднесущими

$$\sigma_{ISI}^2 = \sigma^2 \sum_{j=1, j \neq k} \left| \text{sinc} \left((k-j) + \frac{\delta f}{\Delta f} \right) \right|^2$$

Если ошибок синхронизации нет, то в результате прямого БПФ, выполняемого на приемной стороне, сигнал на m -ой поднесущей (z_m – гауссов шум с нулевым средним и дисперсией σ_0^2)

$$g_m = \sqrt{N_F} H_m d_m + z_m$$

При наличии ошибок синхронизации

$$g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)}) + z_m^{(k)},$$

$$\Psi_m^{(k)} = \vartheta_0 + 2\pi\delta f (kT_s + 0.5N_F\Delta t + \delta t) + 2\pi\delta t (m\Delta f).$$

ϑ_0 смещение фазы на несущей частоте, верхний индекс k обозначает номер OFDM символа.

Считается, что поднесущие частоты расположены симметрично относительно центральной частоты

$$f_m = f_0 + m\Delta f$$

$$m = -N_F/2 \dots N_F/2$$

$$m \neq 0$$

$$g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)}) + z_m^{(k)},$$

$$\Psi_m^{(k)} = \vartheta_0 + 2\pi\delta f (kT_s + 0.5N_F\Delta t + \delta t) + 2\pi\delta t(m\Delta f).$$

Имеем из формулы, что

- имеется общий поворот фазы сигнала на всех поднесущих из-за частотного смещения δf и смещения θ_0 фазы на несущей частоте (первые два слагаемых)
- общий поворот фазы увеличивается с увеличением номера k OFDM символа (слагаемое $2\pi\delta f k T_s$)
- частотное смещение δf приводит к ослаблению сигнала на всех поднесущих (множитель $\text{sinc}(\delta f / \Delta f)$), а также к появлению помехи между поднесущими
- ошибка δt синхронизации по времени (то есть ошибка определения стартового положения OFDM символа) приводит к прогрессивно нарастающему фазовому повороту, пропорциональному номеру m поднесущей (последнее слагаемое)

Обозначим $\delta t' = \delta t / \Delta t$ (Δt – временное расстояние между выборками)

Фазовый поворот (например, на 90°) будет достигаться, если $\frac{2\pi}{N_F} m \delta t' = \frac{\pi}{2}$ $\delta t' = \frac{N_F}{4m}$

Т.о. фазовый сдвиг 90° на первой поднесущей соответствует ошибке синхронизации по времени равной 32 выборкам при использовании 128 поднесущих.

На поднесущих с большими номерами фазовый сдвиг увеличивается пропорционально номеру поднесущей.

Если ограничить 90° фазовый сдвиг крайних поднесущих ($m=0.5N_F$), то ошибка синхронизации δt не должна превышать величины $0.5\Delta t$.

4. Символьная синхронизация «вслепую»

Защитный интервал (циклический префикс) в последовательности передаваемых OFDM сигналов дает возможность выполнять символьную синхронизацию без специальных синхросигналов (**синхронизация «вслепую»**).

Будем пренебрегать собственным шумом и считать коэффициент передачи канала постоянным на рассматриваемом интервале двух OFDM-символов. Пусть также в канале нет задержанных сигналов (однолучевой канал).

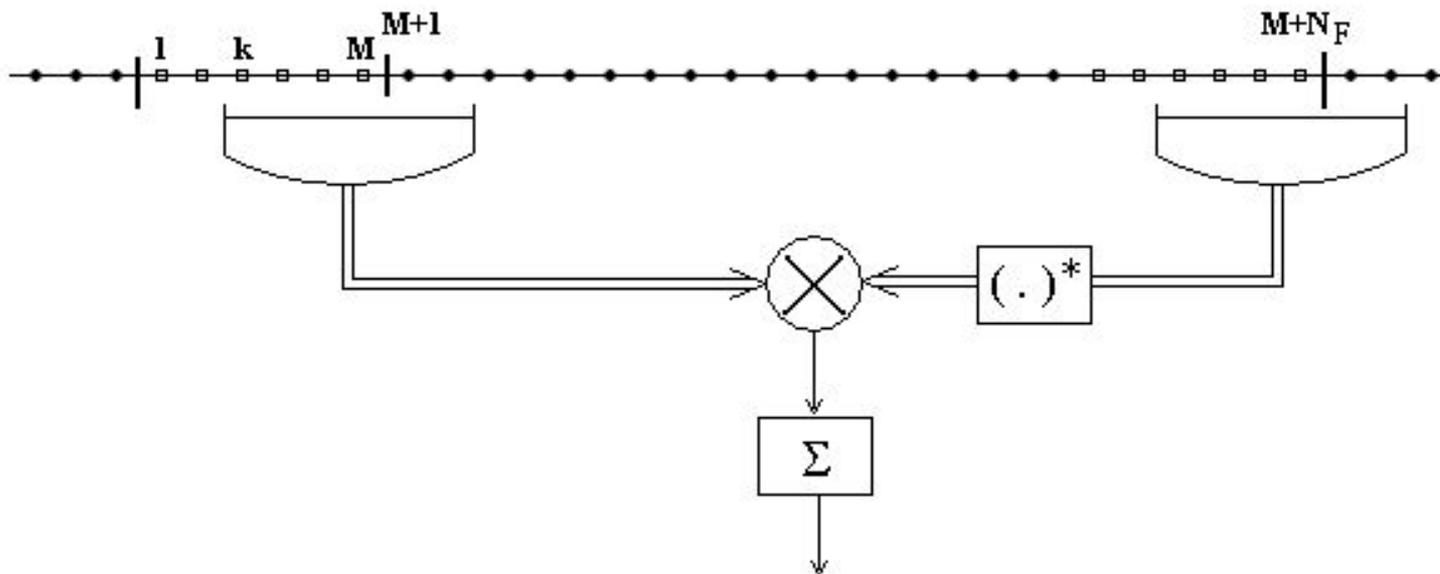


Схема
символьной
синхронизации

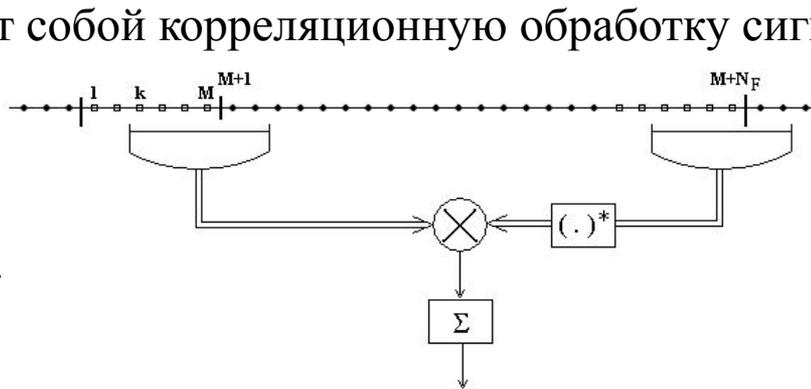
Часть выборок (M) из хвостовой части каждого символа переставляется вперед для образования защитного интервала. Пусть $s(n)$ – n -ая выборка передаваемого сигнала. Тогда n -ая выборка принятого сигнала $x(n) = h_0 s(n)$ (h_0 – канальный коэффициент).

OFDM-символ состоит из $N+M$ выборок. Две последовательности выборок, обозначенных прямоугольниками, являются одинаковыми.



Процедура синхронизации представляет собой корреляционную обработку сигналов

$$\sum_{n=k}^{k+M} x(n)x^*(n+N_F)$$



Индекс k означает сдвиг начала окна относительно начала OFDM-символа.

1. Начало окна совпадает с началом OFDM-символа ($k=0$). В левую часть окна попадают $1, 2, \dots, M$ выборки, а в правую часть окна $-N_F+1, N_F+2, \dots, N_F+M$ выборки.

Сигнал на выходе схемы синхронизации

$$y_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M h_0 s(n) \cdot h_0^* s^*(n+N_F)$$

Учтем, что $s(n+N_F) = s(n)$ ($n=1, 2, \dots, M$) Получим

$$y_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |h_0 s(n)|^2$$

2. Начало окна сдвинуто на k -выборок вправо. В левую часть окна попадают $k+1, k+2, \dots, k+M$ выборки, а в правую часть окна $-k+N_F+1, k+N_F+2, \dots, k+N_F+M$ выборки.

Учтем, что $s(n+N_F) = s(n)$ ($n=1, 2, \dots, M$)

Получим

$$y_k = \frac{1}{M} \sum_{n=k+1}^{M+k} h_0 s(n) \cdot h_0^* s^*(n+N_F) = \frac{1}{M} \sum_{n=k+1}^M |h_0 s(n)|^2 + \frac{1}{M} \sum_{n=M+1}^{M+k} |h_0|^2 s(n)s^*(n+N_F)$$

$$(k=1, 2, \dots, M-1)$$

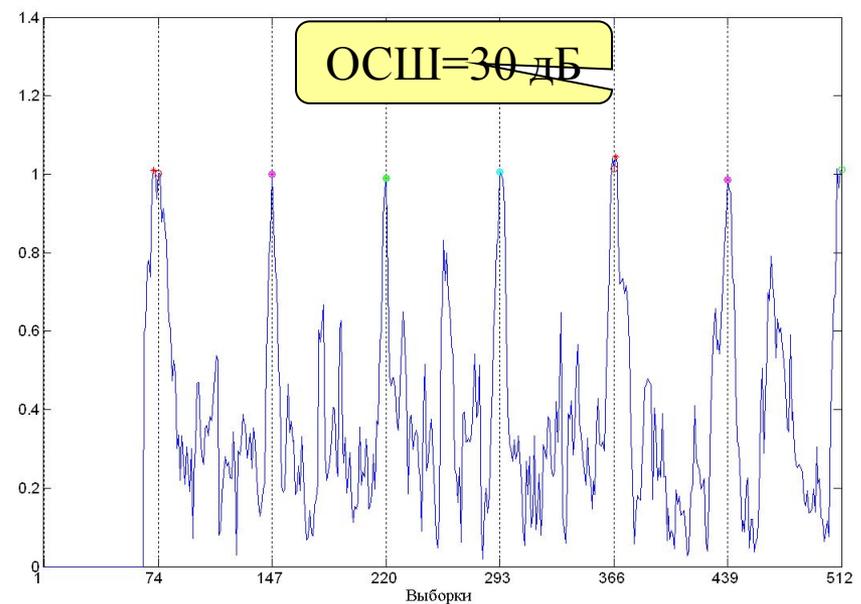
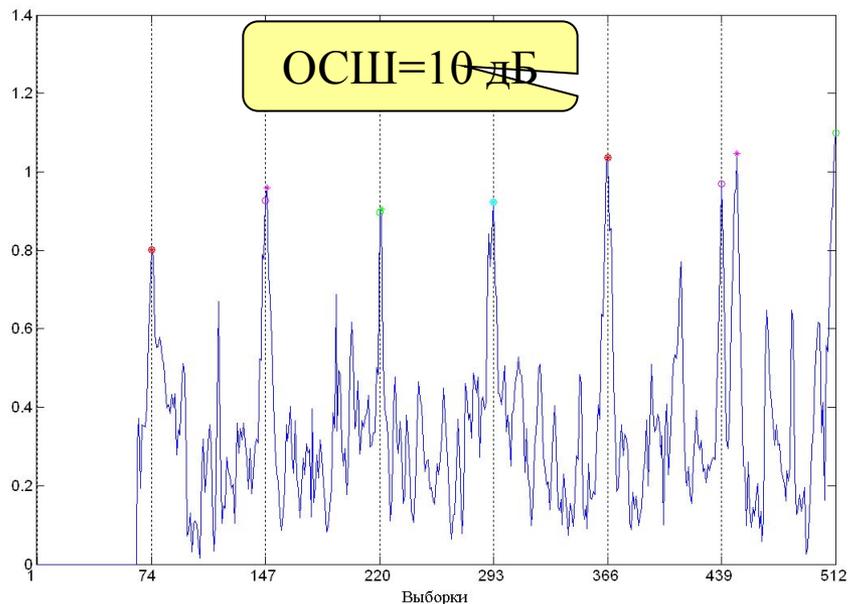
Приближенно имеем:
$$y_k \approx \begin{cases} \langle |s(n)|^2 \rangle |h_0|^2 \left(1 - \frac{k}{M}\right), & k = 0, 1, 2, \dots, M-1, \\ 0, & k \geq M, \end{cases}$$

Отклик на выходе схемы синхронизации имеет треугольный вид.

Высота треугольника пропорциональна мощности передатчика, а ширина (по нулевому уровню) равна удвоенному числу выборок в защитном интервале.

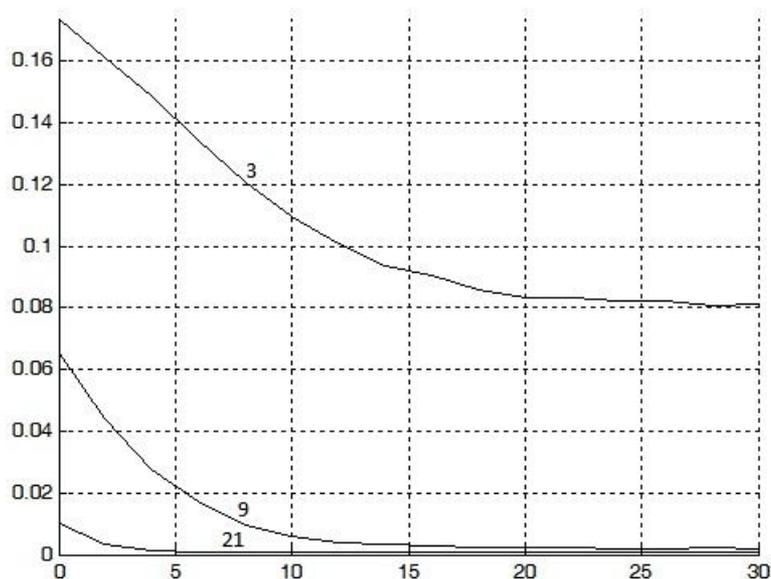
Выходной сигнал процедуры синхронизации с учетом собственных шумов

Защитный интервал состоит из $M=9$ символов, размерность БПФ $N_F=64$, ОСШ равно 10 дБ или 30 дБ, вертикальными линиями отмечено начало сигнала (интервала БПФ).

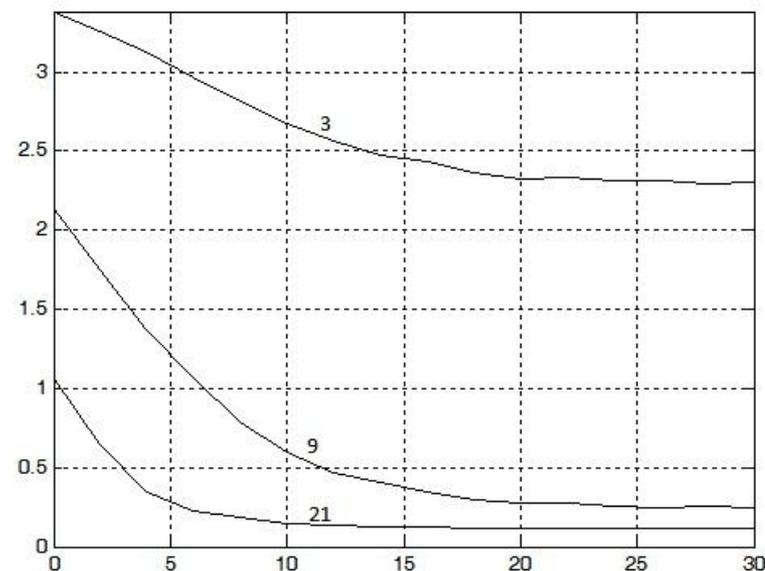


Пики функции корреляции достаточно точно указывают начало сигнала

Средняя относительная ошибка синхронизации в зависимости от ОСШ



Среднеквадратическая относительная ошибка синхронизации в зависимости от ОСШ



Число выборок в защитном интервале $M=3, 9, 21$

Средняя ошибка является пренебрежимо малой.

Среднеквадратическая ошибка уменьшается с увеличением ОСШ и длины защитного интервала. Например, при $M=9$ символов и ОСШ большим 7 дБ среднеквадратическая ошибка не превышает длительности одного периода дискретизации.



5. Частотная синхронизация «вслепую»

Высокочастотная n -ая выборка передаваемого сигнала $s(n) \exp(j2\pi f_0 n \Delta t)$

Принятый сигнал после демодуляции с учетом ошибок частотной синхронизации $x(n) = h_0 s(n) \exp(j2\pi f_0 n \Delta t) \exp[-j2\pi(f_0 + \delta f)n \Delta t] = h_0 s(n) \exp(-j2\pi \cdot \delta f \cdot n \Delta t)$

Максимальный сигнал на выходе схемы синхронизации

$$y_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M h_0 s(n) \exp(-j2\pi \cdot \delta f \cdot n \Delta t) \cdot h_0^* s^*(n + N_F) \exp(j2\pi \cdot \delta f \cdot (n + N_F) \Delta t) = \tilde{y}_0 \exp(j2\pi \cdot \delta f \cdot N_F \Delta t)$$

Учли, что $s(n + N_F) = s(n) \quad (n=1, 2, \dots, M)$

Обозначили $\tilde{y}_0 = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |h_0 s(n)|^2$

$$N_F \Delta t = T_S = 1 / \Delta f \Rightarrow y_0 = \tilde{y}_0 \exp(j2\pi \cdot \delta f / \Delta f)$$

Измеряем фазу $\vartheta = j2\pi \cdot \delta f / \Delta f$

Находим относительную ошибку частотной синхронизации

6. Синхронизация на основе пилотных сигналов

Пусть на m -ой поднесущей k -го OFDM символа передаются известные данные $d_m^{(k)}$ (пилотная поднесущая).

Имели ранее, что

$$g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)}) + z_m^{(k)},$$

$$\Psi_m^{(k)} = \vartheta_0 + 2\pi\delta f(kT_s + 0.5N_F\Delta t + \delta t) + 2\pi\delta t(m\Delta f).$$

Или $g_m^{(k)} = \sqrt{N_F} \tilde{H}_m^{(k)} d_m^{(k)} + z_m^{(k)}$

$$\tilde{H}_m^{(k)} = H_m^{(k)} d_m^{(k)} \text{sinc}(\delta f / \Delta f) \exp(-j\Psi_m^{(k)})$$

- эквивалентный коэффициент передачи на m -ой поднесущей

$$\hat{\tilde{H}}_m^{(k)} = \frac{g_m^{(k)}}{\sqrt{N_F} d_m^{(k)}} = \tilde{H}_m^{(k)} + \frac{z_m^{(k)}}{\sqrt{N_F} d_m^{(k)}}$$

- оценка эквивалентного коэффициента передачи с учетом ошибок синхронизации