

# **ИГРЫ СО СТРАТЕГИЕЙ**

**ЦЕЛЬ: НАУЧИТЬСЯ НАХОДИТЬ ВЫИГРЫШНЫЕ  
СТРАТЕГИИ**

•

**1.** На столе лежат две кучки камней, по **20** камней в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое количество камней, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние камни. Кто и как выиграет при правильной игре? Влияет ли на стратегию игры изменение количества камней в кучках (в каждой кучке камней поровну)? А если камни не поровну? Какова будет выигрышная стратегия если кучек три (в каждой кучке камней поровну)? Какова будет выигрышная стратегия если кучек **n** (в каждой кучке камней поровну)?

- **2.** На столе лежат две кучки камней, по **20** и **26** камней соответственно. Два игрока по очереди берут со стола любое количество камней, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние камни. Кто и как выиграет при правильной игре? Влияет ли на стратегию игры изменение количества камней в кучках (в каждой кучке камней поровну)? А если камни не поровну? Какова будет выигрышная стратегия если кучек три (в каждой кучке камней поровну)? Какова будет выигрышная стратегия если кучек **n** (в каждой кучке камней поровну)?

**ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ, У КАЖДОГО ИЗ КОТОРЫХ СВОЯ ЦЕЛЬ, ДОСТИЖЕНИЕ КОТОРОЙ НАЗЫВАЕТСЯ ВЫИГРЫШЕМ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ИГРОКА. В РАССМАТРИВАЕМЫХ ИГРАХ ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ, ЧТО ДВА ИГРОКА ДЕЛАЮТ ХОДЫ ПО ОЧЕРЕДИ, ПРИЧЕМ ИГРОКИ НЕ МОГУТ ПРОПУСТИТЬ ХОД, И ИГРОКАМ ИЗВЕСТНЫ ВСЕ ПРЕДЫДУЩИЕ ХОДЫ КАЖДОГО ИЗ НИХ. ТАКИЕ ИГРЫ НАЗЫВАЮТСЯ ИГРАМИ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ.**

3. На столе лежат две кучки спичек: в одной **10**, в другой **7**. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять любое число спичек (**1; 2; 3; : : :**) из одной из кучек (по выбору игрока). Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает

Решение:  $10+7=17$

Игрок	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	5 ход	6 ход	7 ход	8 ход	
1	3(1)	5(2)	2(2)						
2	5(1)	2 (2)	0						

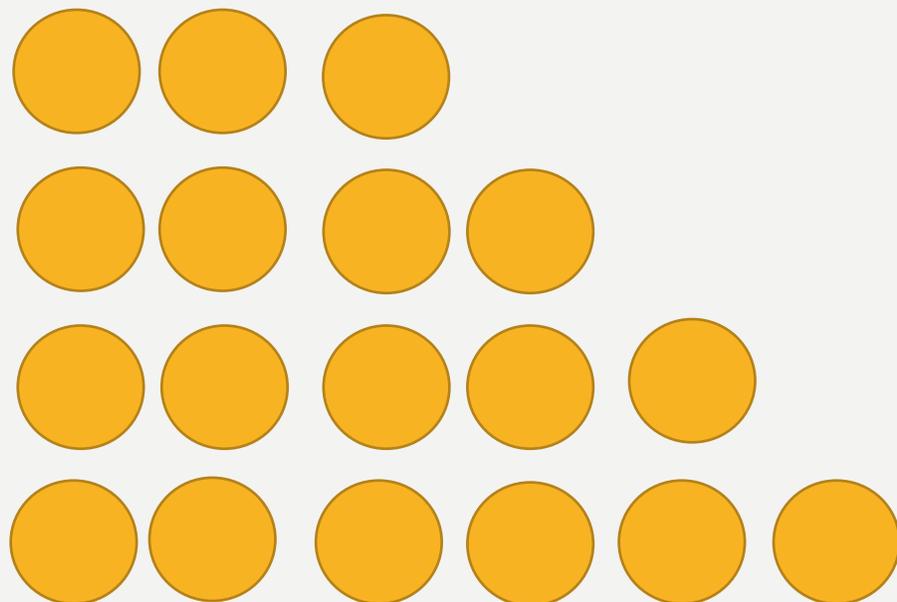
**ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ, У КАЖДОГО ИЗ КОТОРЫХ СВОЯ ЦЕЛЬ, ДОСТИЖЕНИЕ КОТОРОЙ НАЗЫВАЕТСЯ ВЫИГРЫШЕМ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ИГРОКА. В РАССМАТРИВАЕМЫХ ИГРАХ ПРЕДПОЛАГАЕТСЯ, ЧТО ДВА ИГРОКА ДЕЛАЮТ ХОДЫ ПО ОЧЕРЕДИ, ПРИЧЕМ ИГРОКИ НЕ МОГУТ ПРОПУСТИТЬ ХОД, И ИГРОКАМ ИЗВЕСТНЫ ВСЕ ПРЕДЫДУЩИЕ ХОДЫ КАЖДОГО ИЗ НИХ. ТАКИЕ ИГРЫ НАЗЫВАЮТСЯ ИГРАМИ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ.**

2. Что будет в этой игре, если изначально в одной кучке  $m$  спичек, а в другой  $n$ ?

Решение: Если  $m \neq n$ , то выигрывает первый: он должен своим ходом уравнивать кучки, а потом поддерживать равенство (*симметрию*). Если же

$m = n$ , то игроки меняются местами: второй может восстанавливать равенство после нарушения его первым, тем самым обеспечив себе выигрыш.

# ИГРА «НИМ»



1901 - Полный анализ и доказательство существования оптимальной стратегии впервые опубликовал в 1901 году Чарлз Л. Бутон, профессор математики Гарвардского университета. Бутон и назвал игру «ним» от устаревшей формы английских глаголов «стянуть», «украсть».

1940 - Эдвард Н. Кондон «Ниматрон» Он сыграл 100 000 партий, 90 000 из них выиграл. Большая часть проигрышей была намеренно подстроена экскурсоводом, чтобы доказать скептикам, что и машину можно победить.

## АНАЛИЗ ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ

**ПОИСК РЕШЕНИЯ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПУТЕМ АНАЛИЗА ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ. В НАЧАЛЕ РАССМАТРИВАЕТСЯ ИТОВОГОЕ ПОБЕДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ, А В ДАЛЬНЕЙШЕМ АНАЛИЗИРУЮТСЯ СИТУАЦИИ, КОТОРЫЕ МОГЛИ ПРИВЕСТИ К ПОБЕДНОМУ ПОЛОЖЕНИЮ.**

1. Шоколадка представляет собой прямоугольник  $5 \times 8$ , разделённый углублениями на **40** квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (большой одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает.

Решение:

В конце игры мы получим 40 долек шоколада

Всего ходов – 39

Выигрывает – игрок I

2. Игра "Конфета": Есть натуральное число  $N$  — "конфета". Игроки по очереди "откусывают" не больше половины от имеющегося кусочка. Проигрывает тот, кто не сможет откусить от оставшегося единственного "кванта конфеты".

## АНАЛИЗ ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ

**ПОИСК РЕШЕНИЯ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПУТЕМ АНАЛИЗА ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ. В НАЧАЛЕ РАССМАТРИВАЕТСЯ ИТОГОВОЕ ПОБЕДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ, А В ДАЛЬНЕЙШЕМ АНАЛИЗИРУЮТСЯ СИТУАЦИИ, КОТОРЫЕ МОГЛИ ПРИВЕСТИ К ПОБЕДНОМУ ПОЛОЖЕНИЮ.**

**3.** На столе лежат две кучки камней: в первой кучке **10** камней, а во второй - **15**. За ход разрешается разделить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет делать ход. Может ли выиграть второй игрок?

Решение:

В конце игры мы получим 25 кучек камней, содержащих по одному камню. Всего будет сделано 23 хода (и это не зависит от того, как делают ходы игроки), следовательно, последний (нечетный) ход сделает первый игрок.

## АНАЛИЗ ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ

**ПОИСК РЕШЕНИЯ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПУТЕМ АНАЛИЗА ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ. В НАЧАЛЕ РАССМАТРИВАЕТСЯ ИТОГОВОЕ ПОБЕДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ, А В ДАЛЬНЕЙШЕМ АНАЛИЗИРУЮТСЯ СИТУАЦИИ, КОТОРЫЕ МОГЛИ ПРИВЕСТИ К ПОБЕДНОМУ ПОЛОЖЕНИЮ.**

- 1. На столе лежит 15 спичек. Играющие по очереди могут взять 1, 2 или 3 спичек. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает. Кто и как выиграет при правильной игре?

Игрок	1 ход	2 ход	3 ход	4 ход	5 ход	6 ход	7 ход	8 ход	9 ход
1	1	4	3	4	2	0			
2	4	1	2	1	3				

## **АНАЛИЗ ИГРЫ ОТ ЕЁ ЗАВЕРШЕНИЯ**

**ПОИСК РЕШЕНИЯ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПУТЕМ АНАЛИЗА ИГРЫ ОТ ЕЕ ЗАВЕРШЕНИЯ. В НАЧАЛЕ РАССМАТРИВАЕТСЯ ИТОГОВОЕ ПОБЕДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ, А В ДАЛЬНЕЙШЕМ АНАЛИЗИРУЮТСЯ СИТУАЦИИ, КОТОРЫЕ МОГЛИ ПРИВЕСТИ К ПОБЕДНОМУ ПОЛОЖЕНИЮ.**

- На столе лежат 37 монет. Каждому из двух игроков разрешается по очереди брать не более 5 монет. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю. Кто выигрывает при правильной стратегии - начинающий игру или второй игрок? Какова выигрышная стратегия?

# ИГРА БАШЕ

- математическая игра, в которой два игрока из кучки, содержащей первоначально  $N$  предметов, по очереди берут не менее одного и не более  $M$  предметов. Проигравшим считается тот, кому нечего брать.
- Решение: Бери столько предметов, чтобы после твоего хода количество предметов было кратно  $(M+1)$ .

# ИГРА БАШЕ

- Из  $N$  мелких предметов (камешков, пуговиц, спичек и т.п.), играющие поочередно берут не менее одной и не более  $M$  штук. Выигрывает тот, кто сумеет взять последний предмет.

Исход игры определен после первого хода, если партнеры не делают ошибок.

Победный алгоритм игры Баше легко получить, если рассуждать с «конца», то есть рассмотреть сначала позицию перед последним ходом. Для выигрыша надо оставить противнику перед его последним ходом  $K + 1$  предмет. Тогда, сколько бы он ни взял (больше  $K$  брать нельзя), своим ходом вы забираете последний предмет. Поэтому перед предпоследним ходом надо оставить на столе  $2(K + 1)$  предметов. В этом случае при любом ходе противника можно ответить так, что в куче останется  $K + 1$  предмет.

# ИГРА БОШЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- На столе лежат 30 спичек. Два игрока берут поочередно со стола спички. За один ход игрок может взять 1, 2, 3 спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто и как выиграет при правильной игре? \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- б) Что изменится в стратегии рассматриваемой игры, если первоначальное количество спичек  $n$  ( $n > 4$ )?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- в) На столе лежат  $n$  спичек. Два игрока берут поочередно со стола спички. За один ход игрок может взять от 1 до  $k$  спичек ( $k < n$ ). Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто и как выиграет при правильной игре?