Логарифмические уравнения и неравенства

Метод подстановки

Уравнения вида $f\left(log_a x\right)= 0$ решаются с помощью подстановки $t = log_a x$,
которая приводит уравнение к виду $f(t)= 0$.
Если t — корень уравнения $f(t)= 0$, то после возвращения к подстановке $t = log_a x$
можно найти корень исходного логарифмического уравнения,
т. е. $x = a^t$ (аналогично находятся и другие корни, если они есть).

Пример

решить уравнение: $log_2^2(x+4) = 2\,log_2(x+4) + 3.$

Решение:

$$log_2^2(x+4) = 2\,log_2(x+4) + 3;$$

$$log_2(x+4) = t;$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0;$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x + 4 > 0;$ $x > -4;$ $x \in (-4 \in;\ +\infty).$

$log_2(x+4) = -1;$ $2^{-1} = x + 4;$ $0{,}5 = x + 4;$ $0{,}5 - 4 = x;$ $\underline{\underline{x = -3{,}5.}}$

$log_2(x+4) = 3;$ $2^3 = x + 4;$ $8 = x + 4;$ $8 - 4 = x;$ $\underline{\underline{x = 4.}}$

$x = -3{,}5$ *и* $x = 4$ *оба принадлежат ОДЗ.*

Ответ: $-3{,}5;\ 4.$

Пример

решить уравнение: $2\log_4^2 x - 5\log_4 x = -2.$

Решение:

$2\log_4^2 x - 5\log_4 x + 2 = 0.$

Обозначив $\log_4 x = t$, *получим уравнение* $2t^2 - 5t + 2 = 0.$

Корни этого уравнения $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2.$

Из уравнения $\log_4 x = \frac{1}{2}$ *находим, что* $x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2,$

а из уравнения $\log_4 x = 2$ *следует, что* $x = 4^2$, *т. е.* $x = 16.$

Оба корня принадлежат ОДЗ: $x > 0.$

Ответ: $2;\ 16.$

Необходимо помнить, что при решении уравнений часто требуется использовать свойства логарифмов

Пример

$$\log_{0,7}(x+4)(2x+3) = \log_{0,7}(1-2x);$$
$$(x+4)(2x+3) = 1-2x;$$
$$2x^2+8x+3x+12 = 1-2x;$$
$$2x^2+13x+11 = 0;$$
$$x_1 = -1, x_2 = -5{,}5;$$
$$x_1 = -1 \in ОДЗ;$$
$$x_2 = -5{,}5 \notin ОДЗ;$$

значит, $-5{,}5$ *не является корнем исходного уравнения.*

Ответ: $x = -1$.

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-4 \\ 2x>-3 \\ -2x>-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-4 \\ x>-1{,}5 \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-1{,}5;\ 0{,}5).$$

Решение по определнию

3) $$\log_2(x^2-6x+24)<4$$

$$\begin{cases} x^2-6x+24>0 \\ x^2-6x+24<16 \end{cases} \quad \begin{cases} x - \textit{любое} \\ x^2-6x+8<0 \end{cases} \quad 2<x<4$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

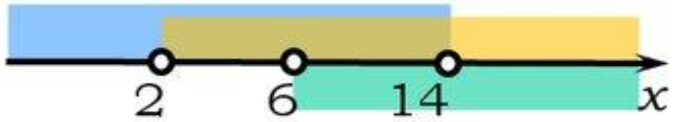
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$т.к.\ \ a = 3 > 1,\ то$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

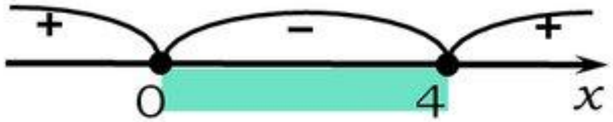
$т.к.\ \ a = \frac{1}{2} < 1,\ то$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \ -\ \text{лишнее условие} \end{cases}$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].