Семинар 26

Признак Даламбера.
Радикальный признак Коши.
Интегральный признак Коши.

Признак Даламбера

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots (u_n > 0)$ (*)

Если при $n \to \infty$ существует предел отношения последующего элемента к предыдущему, то есть $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при

$\rho < 1$ - ряд сходится; $\rho > 1$ - ряд расходится; $\rho = 1$ - признак Даламбера не действует.

Радикальный признак Коши.

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots (u_n > 0)$ (*)

Если при $n \to \infty$ существует , $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ то при

$\rho < 1$ - ряд сходится; $\rho > 1$ - ряд расходится; $\rho = 1$ - радикальный признак Коши не действует.

Интегральный признак Коши

Не трудно заметить полную аналогию определений сходимости ряда и сходимости несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом. Много общего и в признаках сходимости рядов с положительными элементами и интегралов с положительной подынтегральной функцией.

Рассмотрим признак, позволяющий в некоторых случаях сводить вопрос о сходимости ряда, к вопросу о сходимости интеграла.

Рассмотрим ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...(u_n > 0)$ (*), элементы которого являются з начениями непрерывной положительной функции *f(x)* при целых значениях аргумента x: $u_1 = f(1), u_2 = f(2), ..., u_n = f(n), ...$ и пусть *f(x)* монотонно убывает в интервале $[1, +\infty)$.

Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и расходится, если этот интеграл расходится.

Ряды с произвольными элементами. Абсолютная сходимость

Знакочередующиеся ряды

Знакочередующийся ряд можно записать в таком виде:

$\pm(u_1 - u_2 + u_3 - ...)$ (*), где $u_1, u_2, u_3, ...$ - положительные числа.

Достаточный признак сходимости – признак Лейбница

Если в знакочередующемся ряду абсолютные величины элементов ряда убывают, то есть в ряде (*) $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ и общий элемент $u_n \to 0$, то ряд сходится, причем его сумма по абсолютной величине меньше u_1;

остаток ряда r_n по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого из отбрасываемых элементов $|r_n| < u_{n+1}$.

Абсолютная сходимость

Для рядов с произвольным распределением знаков существует следующий достаточный признак сходимости

Если ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Примеры с решениями

1. Исследовать сходимость рядов

1) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \ldots + \frac{2^n}{n^{10}} + \ldots$

Решение. Применим признак Даламбера; имеем $u_n = 2^n / n^{10}; u_{n+1} = 2^{n+1} / (n+1)^{10}$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^{10}} = 2 > 1 \Rightarrow \textit{расходится}$

2) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{n}{3^{n/2}} + \ldots$

Решение. Применим признак Даламбера; имеем $u_n = n / 3^{n/2}; u_{n+1} = (n+1) / 3^{(n+1)/2}$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \textit{сходится}$

3) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

Решение. Применим радикальный признак Коши; имеем $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}=\frac{n}{2n+1}$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+1/n}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ *сходится*

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ Решение. Применим радикальный признак Коши; имеем

$u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1\Rightarrow$ *расходится*

5) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

Решение. Применим интегральный признак Коши. $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$

$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int\limits_1^{\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\,\Big|_1^{\infty}=\infty$ - интеграл расходится, поэтому и ряд расходится

6. $\mathbf{1-1+1-1+\ldots}$

Решение. Общий элемент ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится

7. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$ Решение. Составим ряд из абсолютных величин: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$ Этот ряд есть бесконечно убывающая геометрическая и, следовательно, сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно.

Примеры для самостоятельного решения:

1. Исследовать сходимость рядов 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5+n^2\sqrt[3]{n}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n^{n-1}}}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$

2. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакопеременного ряда: 1. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{2n+1}}{n\cdot\ln n}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n\cdot\ln n}}$

3. Вычислить сумму ряда с указанной точностью

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{1+n^3},\delta=0.01$ 2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}$, $\delta=0.001$