

# Т е м а № 2. «Зенитная управляемая ракета 9М39»

Занятие №9 Оптимальный  
приём сигналов в ОЭУ.

## **Вопросы занятия:**

**1-ый вопрос: Общие сведения об оптимальных методах приема сигналов при наличии помех в ОЭУ.**

**2-ой вопрос: Оптимальная фильтрация при обнаружении сигналов на фоне помех в ОЭУ.**

**3 – ий вопрос: Оптимальная фильтрация при измерении параметров сигналов в ОЭУ.**

# 1-ый вопрос: Общие сведения об оптимальных методах приема сигналов при наличии помех в ОЭУ.

Одной из основных и наиболее сложных проблем, возникающих при разработке и создании ОЭУ, является отыскание наилучших способов приема и обработки полезных сигналов при воздействии помех.

Оптимальность метода приема сигнала оценивается с помощью различных критериев в соответствии с назначением прибора. Например, при решении задачи обнаружения сигнала критерием оптимальности является величина отношения сигнал/шум, а при решении задачи измерения какого-либо параметра сигнала, таким критерием может служить средняя квадратичная погрешность измерения. При решении других задач могут использоваться и другие критерии.

Исходя из этого, идеализированный прибор, обеспечивающий предельно достижимое значение выбранного критерия качества приема сигнала, принято называть **оптимальным приемником** или **оптимальным фильтром (ОФ)**.

Пусть на вход прибора поступает смесь сигнала  $S(a)$  и помехи  $n(a)$ :

$$x(a) = f[S(a), n(a)], \quad (1)$$

которую в простейшем случае помехи можно аналитически записать в следующем виде

$$x(a) = S(a) + n(a). \quad (2)$$

Возможен также случай  $n$  помехи, которая воздействует на один или несколько параметров сигналов, вызывая, например, его паразитную модуляцию. Примером такой помехи является флуктуация прозрачности среды распространения.

Сигнал, искаженный аддитивной помехой, можно рассматривать как сигнал со случайными параметрами  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ , а смесь сигнала и помехи – как функцию вида

$$x(\alpha) = S(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) + n(\alpha).$$

(3)

Аддитивная помеха (случайный сигнал, который накладывается на полезный по каналам и трактам) является случайной функцией аргумента  $a$  (пространственных координат, времени и т. д.). Случайными являются и сигналы. Поэтому смесь сигнала и помехи необходимо рассматривать как случайную функцию.

При обозначении сигнала на выходе фильтра через  $y(a)$  задача синтеза оптимального фильтра сводится к определению такой его структуры, при которой сигнал  $y(a)$  будет наилучшим с точки зрения принятого критерия.

При использовании статистических методов для нахождения характеристик оптимальных фильтров учитывается ряд факторов, к основным из которых можно отнести следующие:

1. Предлагаются известные законы распределения сигналов и помех, что далеко не всегда бывает на практике. Однако это ограничение часто устраняется путем оптимизации системы для наименее благоприятного распределения, т. е. для худших условий работы ОЭУ. Другим способом решения этой проблемы является применение самонастраивающихся, т. е. адаптивных приборов и систем, техническая реализация которых достаточно сложна.

2. При оптимизации структуры ОЭУ предполагается, что характеристики всех сигналов и помех (шумов) не зависят от нее. На практике многие помехи возникают внутри прибора и существенно зависят от его структуры. Это ограничение часто приводит к тому, что синтезируется оптимальным не весь прибор в целом, а лишь отдельные его части, например, система первичной обработки информации.

Статистическое описание смеси сигнала и помех  $x(a)$  обычно задается в виде условного распределения вероятности  $P_s(x)$ . Критерий оптимальности связан с функцией потерь  $\rho(x, s)$  – функции расхождения  $S$  и  $x$ , которую выбирают на основе инженерных или интуитивных соображений. Функция потерь определяет вес (относительную значимость) погрешности, т. е. степень расхождения  $s$  и  $x$ . Обычно функция выбирается так, чтобы она возрастала по мере увеличения расхождения между  $s$  и  $x$ . Усреднение этой функции по  $s$  и  $x$  дает так называемый риск:

$$r \approx \int \int P(s) P_s(x) \rho(s, x) ds dx$$

где  $P(s)$  - вероятность наличия сигнала в принимаемой смеси.

При смещенной оценке, когда математическое ожидание случайной величины  $X$  не совпадают с  $S$ , и

$$\rho(x, s) = (x - S)^2$$

, средний риск  $r$  равен дисперсии  $D_s$  погрешности воспроизведения  $S$ . Действительно,

$$D_s = \sigma_s^2 = \int \int (x-s)^2 \rho(x,s) dx ds = \int \int (x-s)^2 P(x) P_s(x) dx ds = r$$

Сигналы и помехи, приходящие на вход ОЭУ, являются многомерными функциями пространственных координат, времени, длины волны и т. д. Поэтому аргументы  $a$  и соответствующие им частоты  $\omega_a$  в приведенных выражениях являются многомерными векторами. Многомерными являются и функции этих аргументов. Нахождение характеристик оптимальных фильтров в общем виде представляет собой сложную вычислительную задачу. Решение проблемы заключается в представлении сигналов и помех в виде функций с разделяющимися переменными, что позволяет отдельно оптимизировать прибор по переменным  $\lambda$ ,  $x$ ,  $y$ , или  $t$ . Это заметно уменьшит объем операций по обработке сигналов в звеньях ОЭУ.

## 2-ой вопрос: Оптимальная фильтрация при обнаружении сигналов на фоне помех в ОЭУ.

Процедура обнаружения сигнала на фоне помех (шумов) состоит в следующем. На первом ее этапе производится обработка полученной смеси сигнала и помехи, позволяющая наиболее эффективно выделить полезный сигнал и максимально подавить помеху. На втором этапе, по выбранному критерию, проводится оценка наличия или отсутствия сигнала в принятой смеси.

Простейшим из таких критериев является превышение смесью сигнала и помехи  $X\phi$  некоторого порогового значения  $X0$  на выходе оптимального фильтра. При этом принимается решение о наличии сигнала.

Структурная схема устройства, реализующего рассмотренную процедуру, представлена на рис. 1..

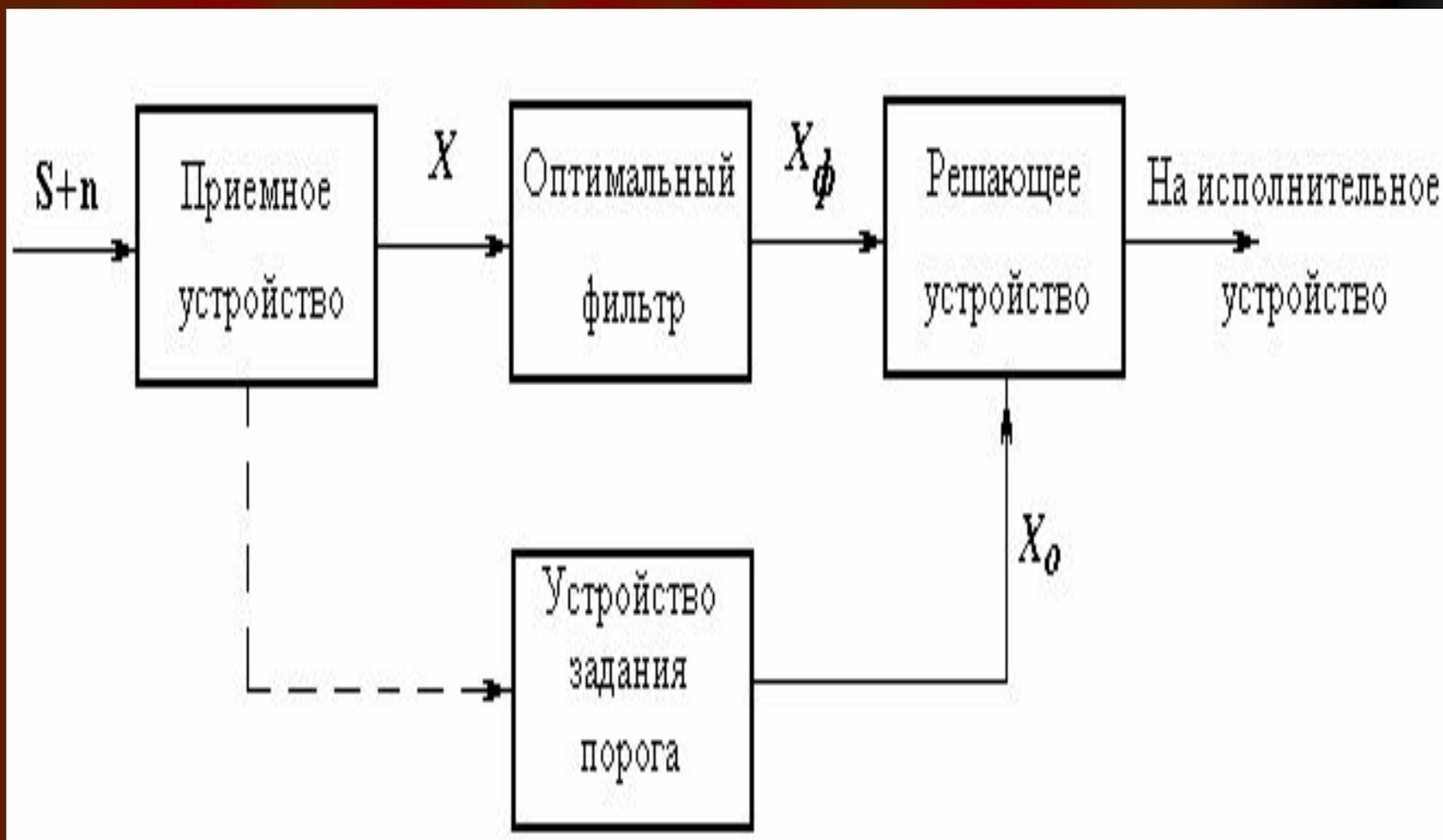


Рис. 1. Структурная схема оптимального обнаружителя.

Помимо внешних помех  $n$  с полезным сигналом  $S$  могут суммироваться и внутренние помехи, т. е. смесь  $x(a)$  может включать и шумы приемного устройства. Пороговый уровень может быть задан либо постоянным, либо изменяющимся в соответствии с каким-либо параметром выборки  $x$ . Возможна адаптивная подстройка  $x_0$  в зависимости от  $S$  и  $n$  (см. штриховую линию на рис. 1.).

Предположим, что на входе ОЭУ имеет место аддитивная смесь полезного сигнала  $s$  и помехи  $n$ :

$$x = s + n$$

причем  $x$ ,  $s$ ,  $n$  являются одномерными или многомерными функциями таких аргументов, как время, длина волны излучения, координат в пространстве и т. д. Обозначим через  $P_s$  и  $P_n$  условные вероятности приема смеси  $x$ , когда в ней присутствует или отсутствует сигнал  $s$  соответственно. Очевидно, что

$$P_s(x) + P_n(x) = 1$$

Простейшая задача обнаружения сводится к тому, что ОЭУ должно дать правильный ответ на вопрос: есть ли в поле зрения оптической системы ОЭУ излучающий объект или его нет? Эти два случая принято называть *правильным обнаружением* и *правильным необнаружением*. Двумя другими случаями, альтернативными первым, являются "*ложная тревога*", когда полезного сигнала нет, но уровень помех на выходе ОФ превышает уровень порога  $\chi_0$  и "*пропуск сигнала*", когда объект находится в поле зрения оптической системы, но сумма сигнала  $s$  и помехи  $n$  не превышает уровня  $\chi_0$ .

Если плотности вероятностей случайных функций, описывающих смесь сигнала и помехи и только помехи, обозначать через  $P_x(x)$ ,  $P_n(x)$  соответственно, то **условную вероятность правильного обнаружения** можно определить как

$$D = \int_{x_0}^{\infty} P_x(x) dx,$$

а **условная вероятность пропуска сигнала**

$$1 - D = \int_0^{x_0} P_x(x) dx$$

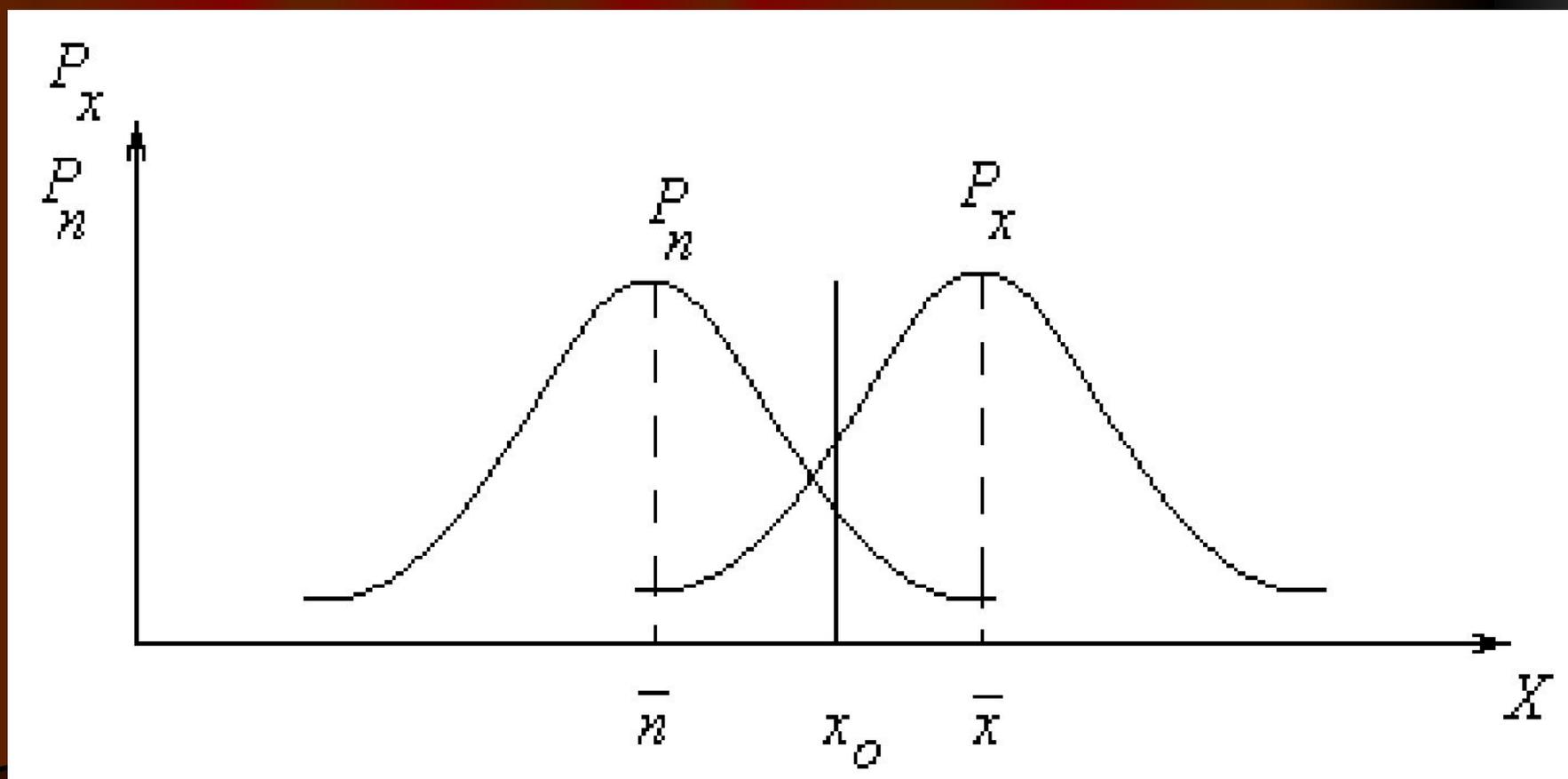
В отсутствие сигнала можно принять ложное решение, оцениваемое **условной вероятностью ложной тревоги:**

$$F = \int_{x_0}^{\infty} P_n(x) dx$$

При этом, **условная вероятность правильного не обнаружения**

$$1 - F = \int_0^{x_0} P_n(x) dx$$

Графическая интерпретация этих выражений представлена на рис. 2



Площади под кривыми  $P_n$  и  $P_x$ , описывающими законы

распределения, и ограниченными выбранным значением порога срабатывания, равны вероятностям  $F$ ,  $1-F$ ,  $D$  и  $1-D$ . Величина

характеризует математическое ожидание помехи, а  $\bar{x}$  —

математическое ожидание смеси сигнала  $S$  с помехой  $n$ .

Чем больше величина порога  $x_0$ , тем меньше вероятность ложной тревоги  $F$ . Однако при этом возрастает вероятность пропуска сигнала

$$1 - D$$

При больших сигналах уровень срабатывания  $x_0$  выбирают достаточно высоким, а при слабых сигналах значение  $x_0$  приближается к  $\bar{n}$

Выбор величины  $x_0$  связан с необходимостью обеспечения требуемого отношения сигнал/помеха.

Зная законы распределения вероятностей

$$P_s(x) \approx P_{\chi}(x)$$

и

$$P_n(x)$$

можно рассчитать отношение правдоподобия

$$\Lambda = \frac{P_s(x)}{P_n(x)}$$

Затем можно принять решение о наличии сигнала в том случае, если превышает некоторое пороговое значение.

$\Lambda$

Зная вероятности

$$1-D$$

и

$$F$$

можно определить так

называемую **функцию потерь**:

$$L = K_1(1-D) + K_2F$$

где

$$K_1$$

и

$$K_2$$

- коэффициенты, определяющие меру того ущерба, который возникает при пропуске сигнала и ложной тревоге.

Оптимальным считается такой фильтр, для которого вероятности

пропуска сигнала  $1-D$  и ложной тревоги  $F$  минимальны.

Для случая, когда на выход ОЭУ поступает смесь  $x(a)$  сигнала  $S(a)$  и нормальной помехи  $n(a)$ , с точностью до несущественных величин отношение правдоподобия приводит к виду

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)S(\alpha)d\alpha$$

где  $a$  – параметр, по которому оценивается качество приема (время, пространственная координата и т. п.).

Максимальное правдоподобие между переданным  $S(a)$  и принятым  $x(a)$  сигналами достигается при обеспечении максимума их функции взаимной корреляции, т. е. идеальный приемник должен быть приемником корреляционного типа. Реализация такого приемника для оптического излучения связана со значительными техническими трудностями, поэтому на практике обычно используют другие методы приема сигналов.

### **3 – ий вопрос: Оптимальная фильтрация при измерении параметров сигналов в ОЭУ.**

Критерием качества систем слежения считают **среднюю**

**квадратическую погрешность измерения**

воспроизводимого параметра сигнала, например, его временного или пространственного положения, амплитуды и

т. д. **Системы, которые обеспечивают минимальную**

**среднюю квадратичную погрешность, являются**

**оптимальными фильтрами.** Наиболее полно теория

оптимальной фильтрации при воспроизведении развита для линейных фильтров.

Для решения задачи определения минимума средней квадратической ошибки необходимо найти ее общее выражение, а затем установить, при каких условиях эта погрешность становится минимальной, что и позволит **определить характеристики линейного оптимального фильтра** .

Если на вход прибора с импульсной характеристикой  $h(a)$  поступает аддитивная смесь сигнала  $S(a)$  и помехи  $n(a)$ , то, пользуясь интегралом свертки, можно найти выражение для выходного сигнала, соответствующего суммарному входному сигналу

$$x(\alpha) = S(\alpha) + n(\alpha),$$

т.е

$$y(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)h(\beta-\alpha)d\alpha = y_c(\beta) + y_m(\beta),$$

где

$$y_c(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)h(\beta-\alpha)d\alpha$$
$$y_m(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\alpha)h(\beta-\alpha)d\alpha$$

Пусть прибор работает таким образом, что искомое значение параметра  $a$  соответствует максимуму функции выходного сигнала. Например, направление на излучатель определяется по максимуму амплитуды выходного сигнала. Вследствие наличия помехи  $n(a)$  максимумы функций  $y(\beta)$  и  $y_c(\beta)$  не будут совпадать. Соответствующее построение приведено на рис. 3.

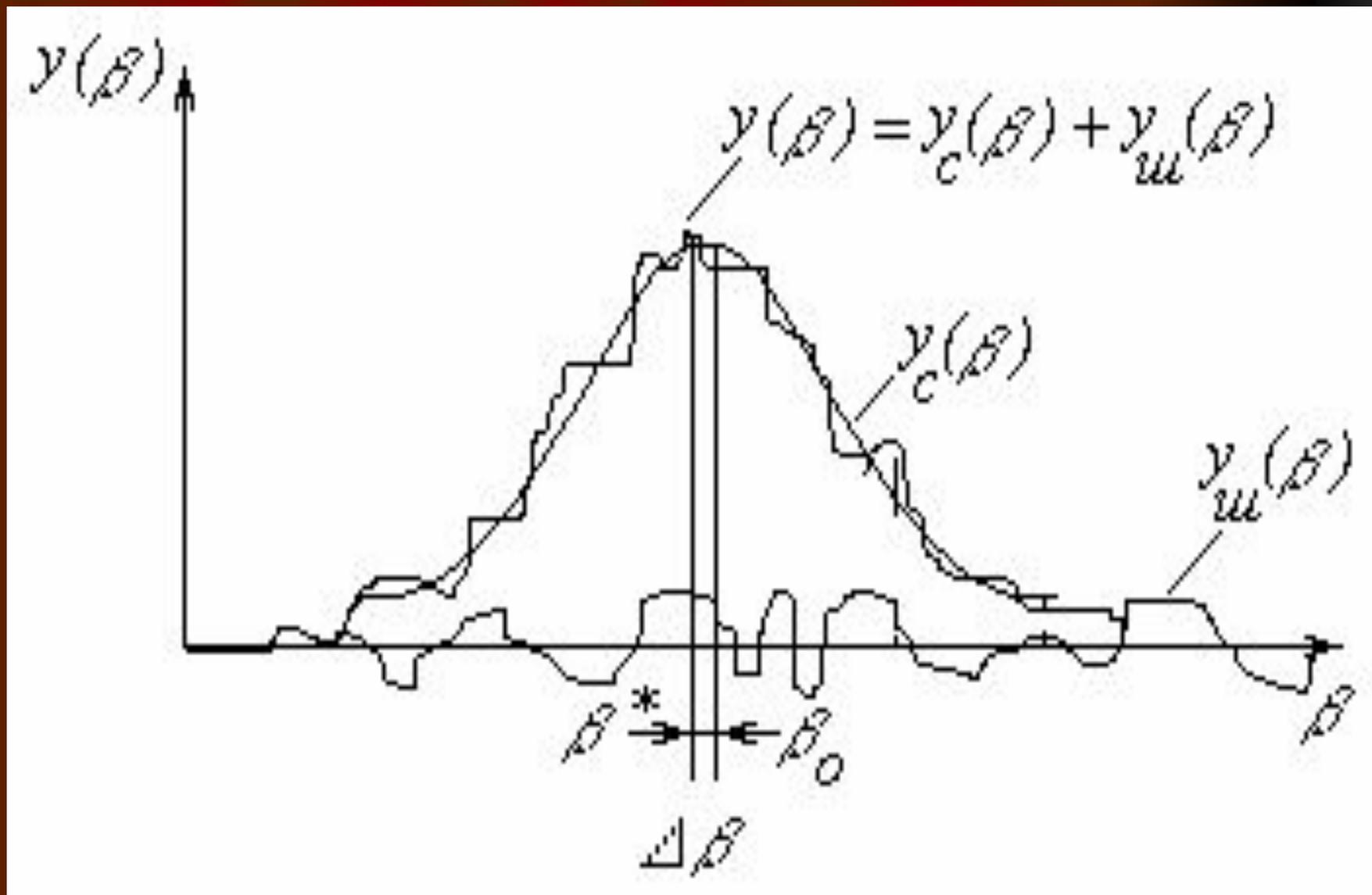


Рис.3 Определение средней квадратической погрешности

В силу случайного характера  $n(a)$  это несовпадение  $\Delta\beta = \beta^* - \beta_0$  будет также случайной величиной. Ее дисперсия (квадрат средней квадратической погрешности)  $\delta^2\beta$  для оптимального фильтра воспроизведения должна быть минимальна. Пусть измерение параметров сигнала происходит при большом отношении сигнал/помеха. Тогда можно считать, что случайная погрешность  $\Delta\beta$  мала. Условием экстремума  $y(\beta)$  является равенство нулю первой производной этой функции.

Разлагая в ряд Тейлора первую производную сигнальной функции  $y'_c(\beta)$  для области  $\beta - \beta_0$  и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$y'(\beta) \approx y'_c(\beta_0) + \Delta\beta y''_c(\beta_0) + y'_m(\beta) = 0.$$

Поскольку в точке  $\beta - \beta_0$  производная  $y'_c = 0$ , то из уравнения следует, что

$$\Delta\beta = -y'_m(\beta) / y''_c(\beta_0).$$

Дисперсия этой случайной величины

$$\delta^2_\beta = |y'_m(\beta)|^2 / |y''_c(\beta)|^2_{\beta-\beta_0}$$

## **Выводы:**

1. Одной из основных и наиболее сложных проблем оптико-электронного приборостроения является определение наилучших способов приема и обработки полезных сигналов при наличии помех.

2. Идеализированный прибор, обеспечивающий предельно достижимое значение выбранного или заданного критерия качества приема сигнала, принято называть оптимальным приемником.

3. **Простейшая задача обнаружения сводится к тому, что ОЭУ должен дать правильный ответ на вопрос: есть ли в поле зрения оптической системы излучающий объект или его нет?**

4. Максимальное правдоподобие между переданным  $S(a)$  и принятым  $x(a)$  сигналами достигается при обеспечении максимума их функции взаимной корреляции, т. е. идеальный приемник должен быть приемником корреляционного типа.