ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАН ИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и известна ее первообразная F(x), то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad где\ F'(x) = f(x)$$

Но часто возникают ситуации, когда вычислить интеграл можно только с помощью численных методов:

1) F(x) не выражается через элементарные функции.

$$\int_a^b e^{-x^2}dx$$

2) F(x) существует и выражается через элементарные функции, но ее сложно найти

$$\int_a^b \frac{x^{30}+x^{29}+...+1}{x^{40}+x^{39}+...+1}dx$$

3) Найдена F(x), но сложно вычислить ее значение;

4) f(x) задана таблично или графиком.

Итак, как вычислить $\int_a^b f(x)dx$

Обычный прием состоит в том, что данную функцию f(x) на рассматриваемом отрезке [a,b] заменяют интерполирующей функцией $P_n(x)$ простого вида, а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathrm{P}_n(x)dx$$

Функция $P_n(x)$ должна быть такова, чтобы интеграл вычислялся непосредственно.

Можно использовать интерполяционный многочлен $P_n(x)$ различной степени n, n = 0, 1, 2, …

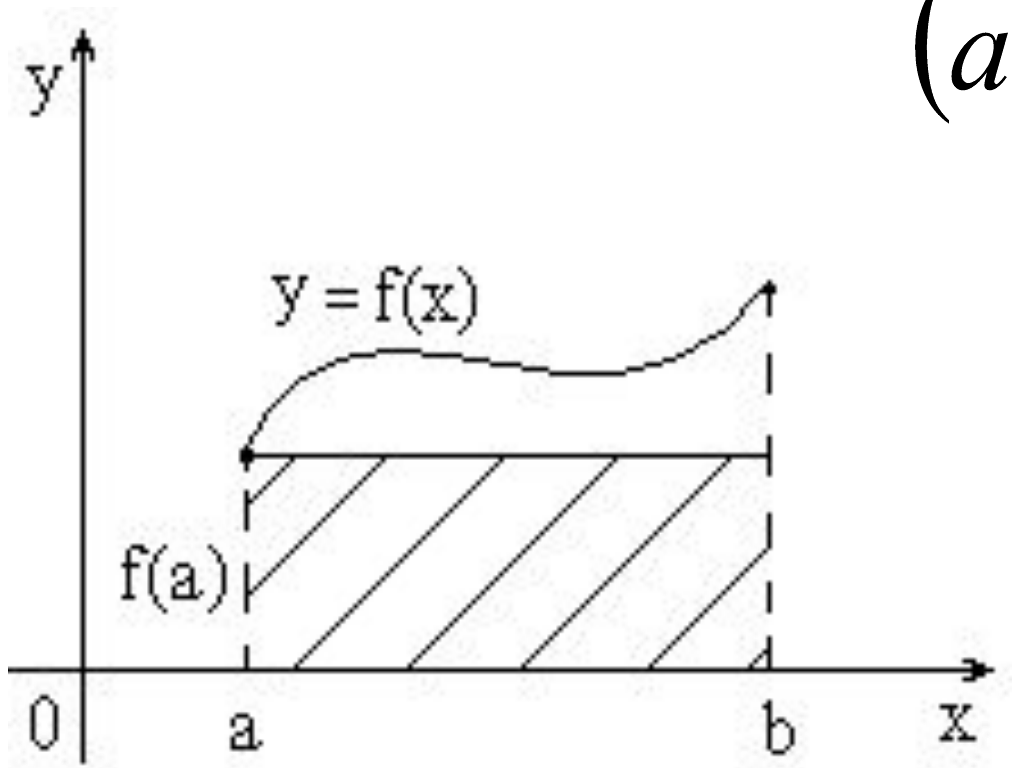
Формулы прямоугольников

При n=0 , $f(x) \approx P_0(x)$

Для построения $P_0(x)$ требуется одна точка $(x_0, f(x_0))$.

Формула левых прямоугольников:

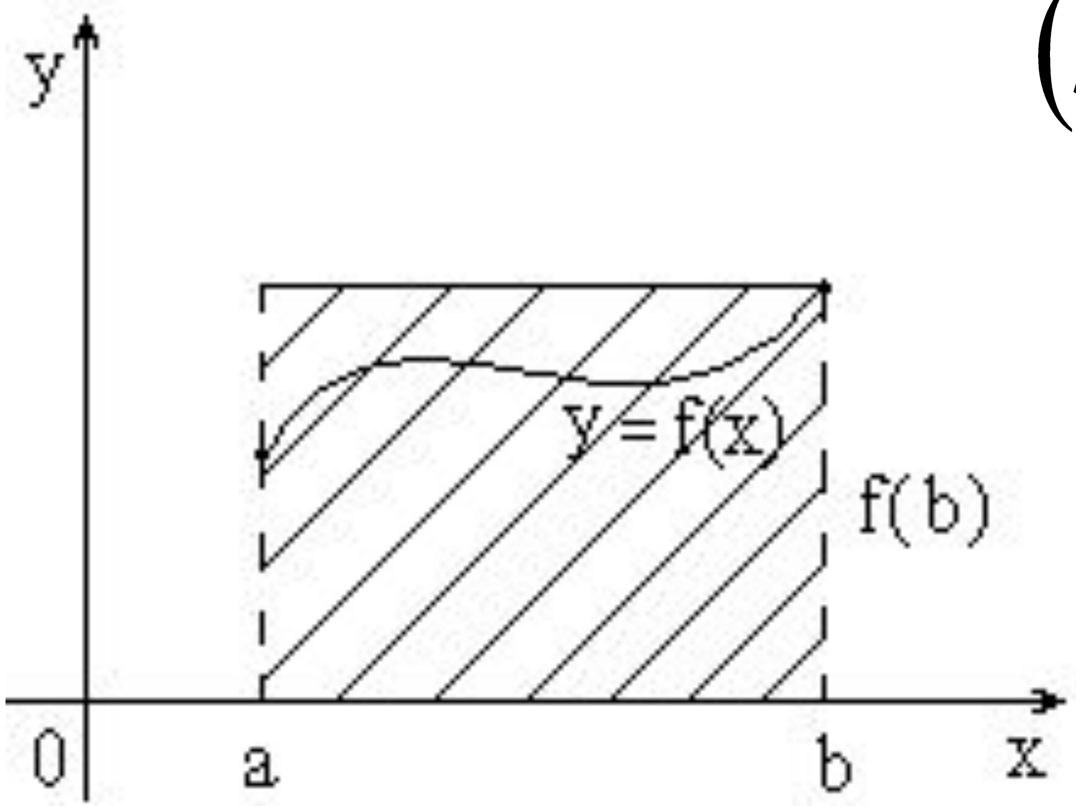
$$(a; f(a))$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathrm{P}_0(x)dx = \int_a^b f(a)dx = f(a)x\Big|_a^b = f(a)(b-a)$$

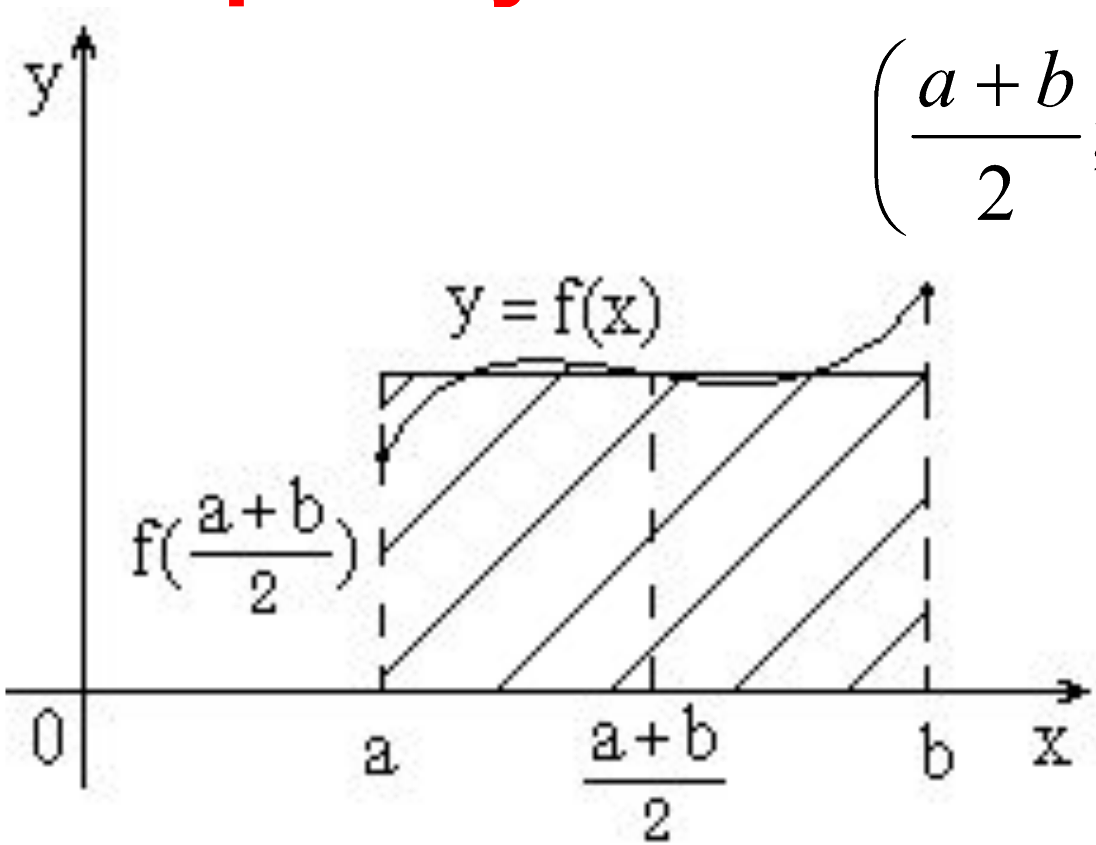
Формула правых прямоугольников:

$$\left(b; f(b)\right)$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathrm{P}_0(x)dx = \int_a^b f(b)dx = f(b)x\Big|_a^b = f(b)(b-a)$$

Формула центральных прямоугольников:



$$\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathrm{P}_0(x)dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)x\Big|_a^b = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

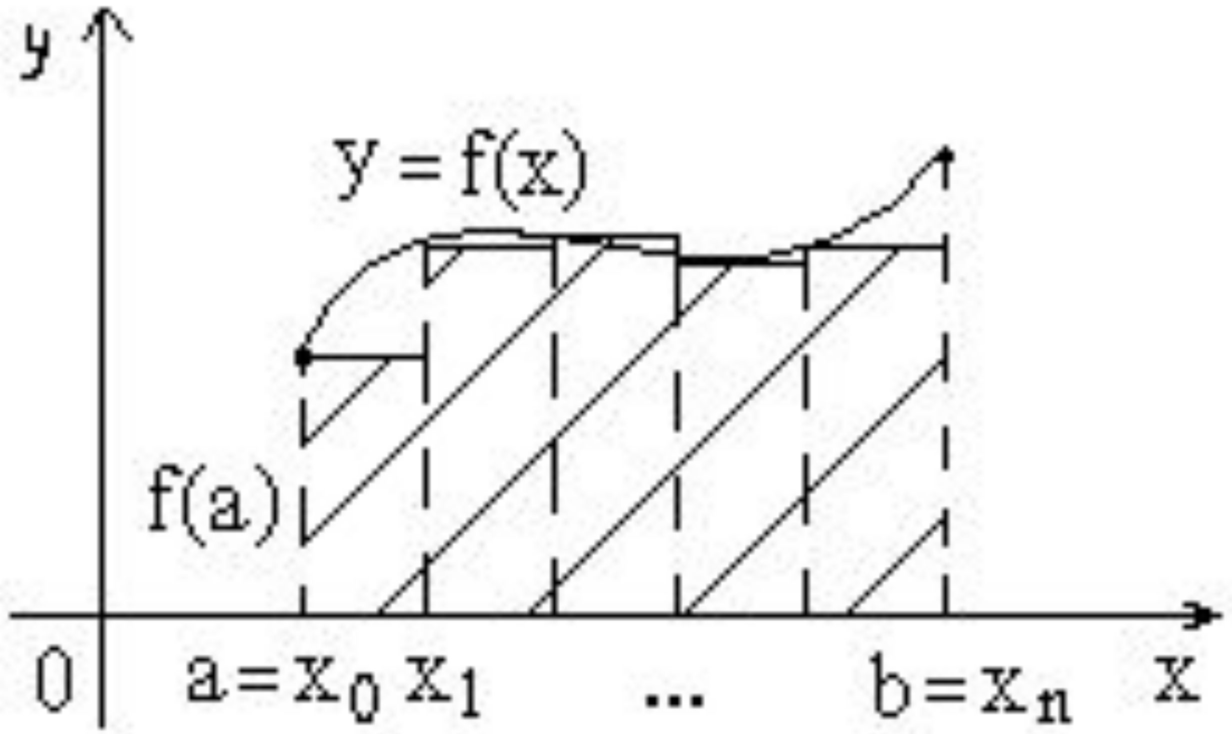
Обобщенные формулы

На практике обычно пользуются обобщенными формулами, т.к. [a,b] может быть большим и, следовательно, большой и погрешность вычисления интеграла по формулам прямоугольников, трапеции и Симпсона.

Для повышения точности вычисления [a,b] разбивают на n равных частей точками $a=x_0<x_1< \ldots < x_n=b$, и на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ применяется конкретный метод прямоугольников, трапеции или Симпсона, результаты суммируются.

Величина $h=(b-a)/n$ - шаг интегрирования, $x_i=x_0+ih$, где $i=0,\ldots,n$.

Обобщенная формула левых прямоугольников



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} hf(x_i) \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Обобщенная формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i) \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Обобщенная формула центральных прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Эмпирический критерий оценки точности вычисления интеграла

На практике широко применяется следующий прием, пригодный для каждого из рассматриваемых методов. Искомый интеграл вычисляется дважды: при делении отрезка [a,b] на n частей и на $2n$ частей. Полученные интегралы J_n J_{2n} сравниваются, и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными.

правых прямоугольников при n=10, оценивая точность с помощью сравнения полученных результатов.

$$\int_{2}^{12} \sqrt{6x^2 - 3}dx$$

При n=10 разобьем отрезок интегрирования на 10 частей с шагом

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{12-2}{10} = 1$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка:

i	X_i	x_i^2	$6x_i^2$	$6x_i^2-3$	$y_i = \sqrt{6x^2-3}$
0	2	4	24	21	4,583
1	3	9	54	51	7,141
2	4	16	96	93	9,644
3	5	25	150	147	12,124
4	6	36	216	213	14,595
5	7	49	294	291	17,059
6	8	64	384	381	19,519
7	9	81	486	483	21,977
8	10	100	600	597	24,434
9	11	121	726	723	26,889
10	12	144	864	861	29,343

Найдем значения сумм: $\sum_1 = \sum_{i=0}^{9} y_i = 157.965$; $\sum_2 = \sum_{i=1}^{10} y_i = 182.725$

Найдем приближенные значения интеграла. По формуле левых прямоугольников получим $I_1 = h \cdot \sum_{i=0}^{9} y_i = 1 \cdot 157.965 = 157.965$. По формуле правых прямоугольников находим $I_2 = h \cdot \sum_{i=1}^{10} y_i = 1 \cdot 182.725 = 182.725$. Эти результаты отличаются уже в десятках. За окончательное значение примем полусумму найденных значений, округлив результат до тысячных:

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2} = 170,345$$