# Лекция 2
# Определители второго и третьего порядка.

**Векторное произведение двух векторов**

**Смешанное произведение трех векторов**

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

- **О п р е д е л е н и е 1.** *Определителем* квадратной *матрицы А второго порядка* или− *определителем второго порядка*) называется число, обозначаемое:
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ (или |A|)
- и вычисляемое по формуле:
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

- **О п р е д е л е н и е 2.** *Определителем* квадратной *матрицы А третьего порядка* (или − *определителем третьего порядка*) называется число, обозначаемое:
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (или |A|)
- и вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (2)$$

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

- ***З а м е ч а н и е 1***. **Определитель третьего порядка может быть вычислен не только по формуле (2), называемой *разложением определителя по элементам первой строки*.**
- **1) Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться правилом *разложения определителя по элементам л ю б о й строки (столбца) матрицы А*.**
- **При этом элементы выбранной строки (столбца) берут со знаками, указанными в следующей схеме:**

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- **то есть знак «+» ставят у тех элементов $a_{ij}$, для которых сумма индексов $i+j$ есть число четное, «–» – сумма индексов $i+j$ есть число нечетное.**

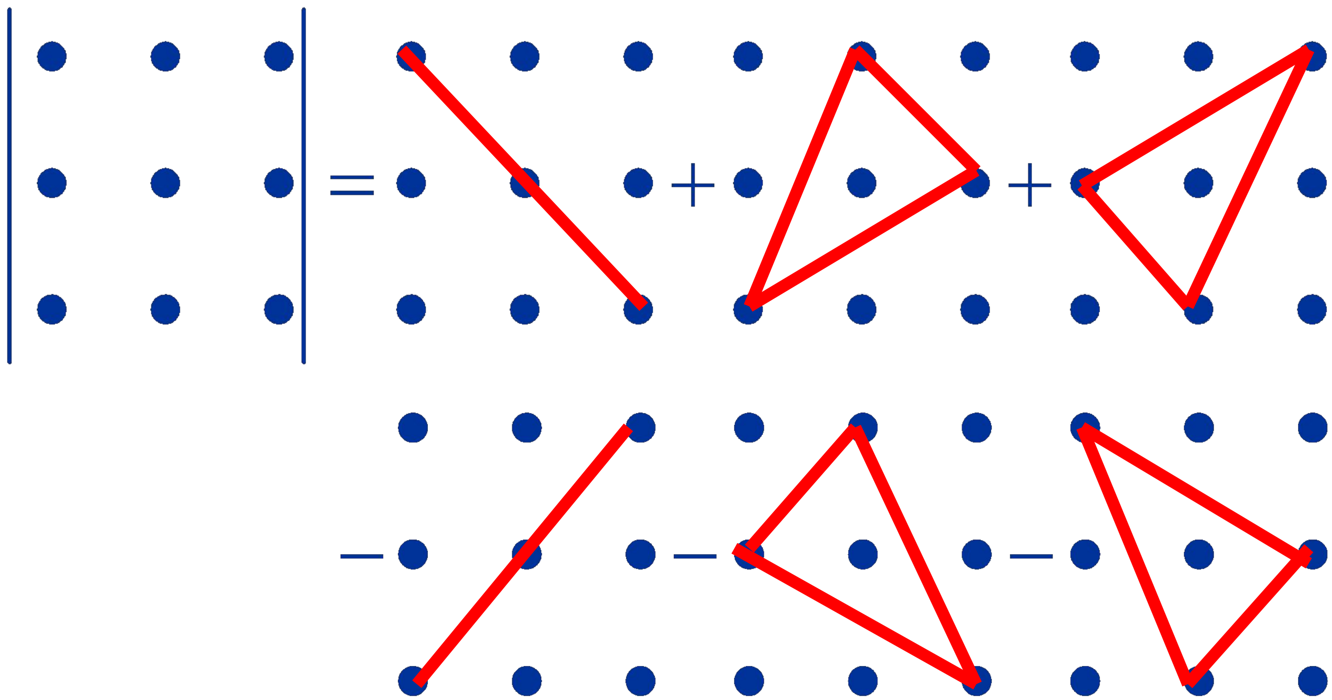
# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

- Например, выбрав для разложения *вторую строку* определителя, получим формулу *разложения определителя третьего порядка по элементам второй строки*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

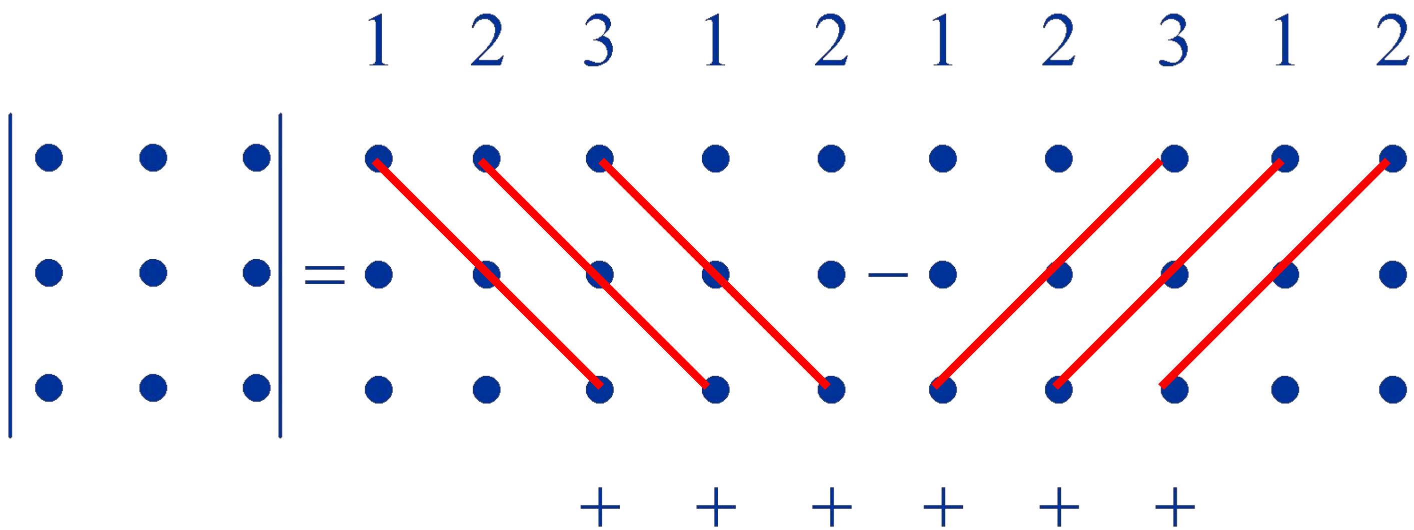
- **2)** Для вычисления определителя третьего порядка можно воспользоваться *правилом треугольников*:



где выделенные элементы нужно перемножить.

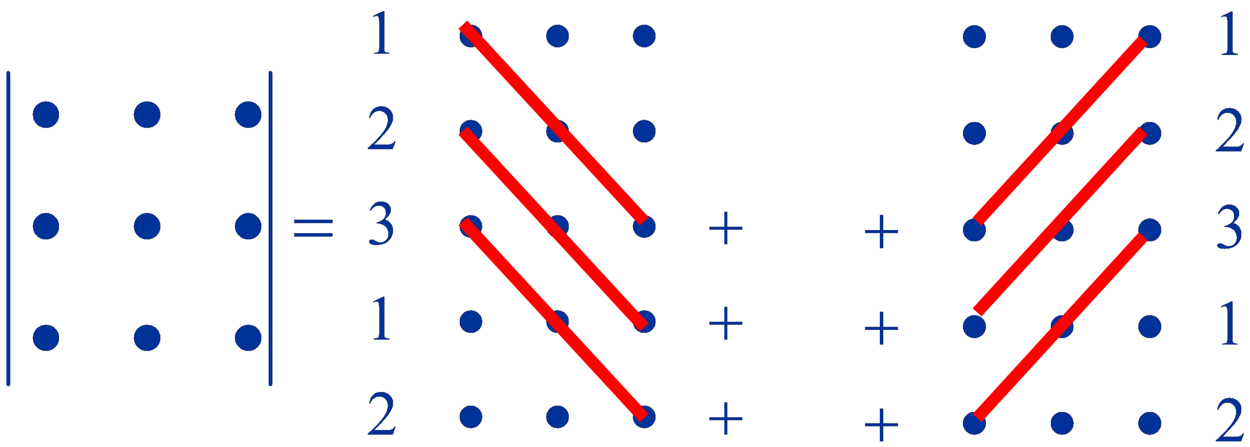
# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

- **3)** Определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, получаемых перемножением элементов, попавших на параллельные линии матрицы, полученной из исходной матрицы *A* приписыванием к ней справа дополнительно первых двух столбцов матрицы *A*:



# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го И 3-го ПОРЯДКОВ

- **4)** Определитель третьего порядка равен сумме шести слагаемых, получаемых перемножением элементов, попавших на параллельные линии матрицы, полученной из исходной матрицы *A* приписыванием к ней снизу дополнительно первых двух строк матрицы *A*:



# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

## 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- **О п р е д е л е н и е 3.** Каждой квадратной матрице $A$ порядка n (где n≥1) ставится в соответствие число, называемое *определителем матрицы* $A$, обозначаемое $|A|$, вычисляемое по правилу:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

и так далее:

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

## *Свойства определителя*:

- 1. О*пределитель не меняется при замене в нем всех строк соответствующими* (*по номеру*) *столбцами*;
- 2. О*пределитель равен нулю*, *если содержит нулевую строку или нулевой столбец*;
- 3. О*пределитель равен нулю*, *если содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца*;

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

## *Свойства определителя*:

- *5.Определитель изменит знак на противоположный, если в нем поменять местами любые две строки или столбца (то есть применено элементарное преобразование первого типа);*
- *6.Определитель не изменится, если в нем заменить строку суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число (то есть применено элементарное преобразование второго типа);*
- *7.Если строку (столбец) определителя умножить на некоторое число (то есть применено элементарное преобразование третьего типа), то определитель умножится на это число.*

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
## *Примеры:*

- Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-1)) - 2 \cdot (4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 6 \cdot (4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) =$$

$$= (15 - 2) - 2 \cdot (20 + 2) + 6 \cdot (-8 - 6) = 13 - 44 - 84 = -115.$$

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

## Примеры:

- ***Способ II*** *(присоединение двух дополнительных строк):*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 6 + 2\cdot 2\cdot(-1) - 6\cdot 3\cdot 2 -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad -(-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 5\cdot 2\cdot 4 = 15 - 48 - 4 -$$

$$-36 - 2 - 40 = -115.$$

# ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
## Примеры:

- **П р и м е р .** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Р е ш е н и е. ***Способ I*** *(правило треугольников):*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot(-3) + (-2)\cdot 4\cdot 5 + 0\cdot 3\cdot 3 - 5\cdot 7\cdot 3 -$$

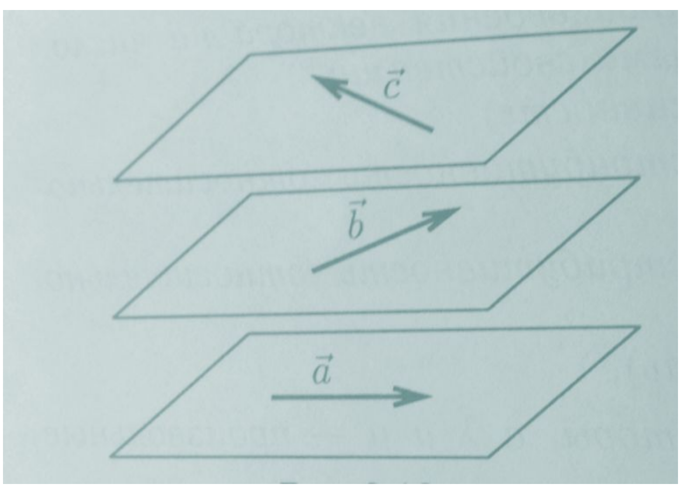
$$-3\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot(-2)\cdot(-3) = -21 - 40 - 105 - 12 = -178$$

# Компланарные векторы

- ***Определение.*** Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными* **,** если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

  В противном случае векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

называются ***некомпланарными .***

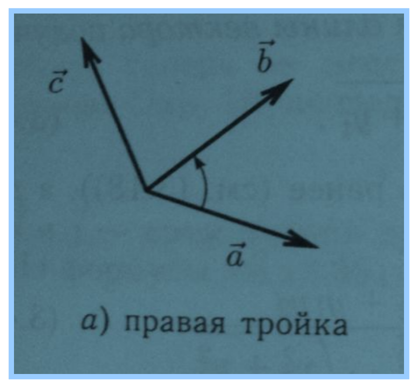



Если хотя бы один из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ нулевой, то эти векторы компланарны.

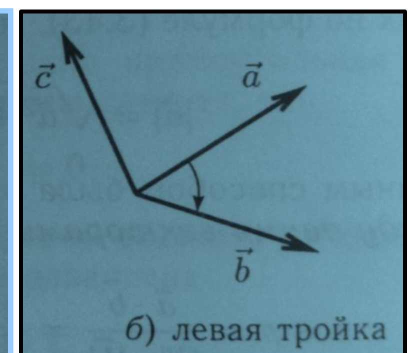
# Ориентация тройки векторов

**Определение.** Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку (левую тройку) или положительно ориентированным (отрицательно ориентированным), если с конца третьего вектор а $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки ( по часовой стрелке).

Ориентация тройки векторов не меняется при циклической перестановке этих векторов.



а) правая тройка



б) левая тройка

# Векторное произведение двух векторов

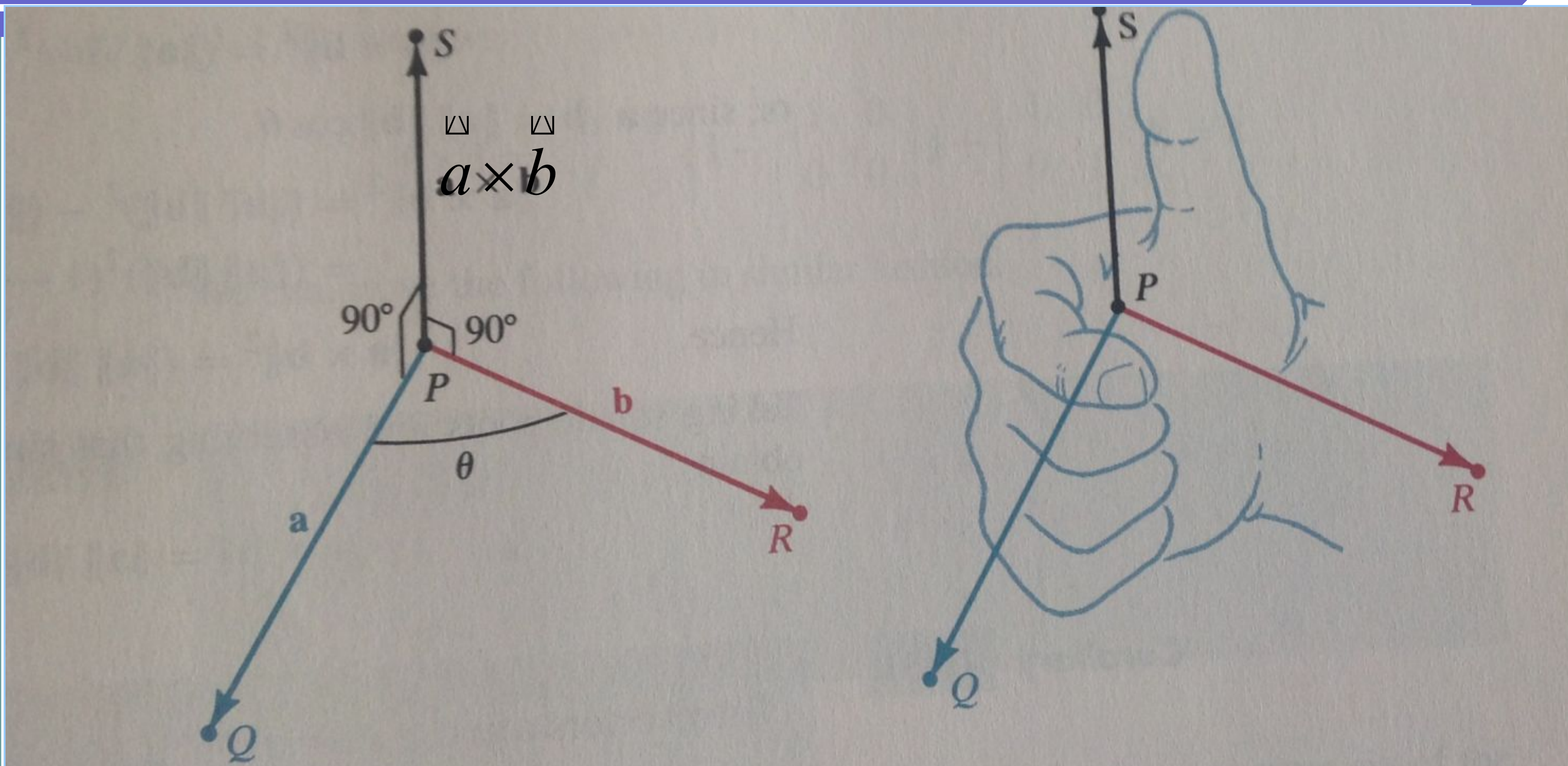
***Определение.*** *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ удовлетворяющий условиям:

**1.** длина вектора $\vec{c}$ равна $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi,$ где $\varphi$ – угол между векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

# Векторное произведение двух векторов




$$\vec{a}\times\vec{b} \qquad \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}.$$

# Основные свойства векторного произведения

**Теорема 1.** Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ равно нулю только и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ $\vec{b}$ коллинеарные.

**Теорема 2.** Длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ числено равна площади параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\vec{a}$ $\vec{b}$ .

$$S=\vec{a}\times\vec{b}$$

**Теорема3.** Векторное произведение антикоммутативно, т.е.

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

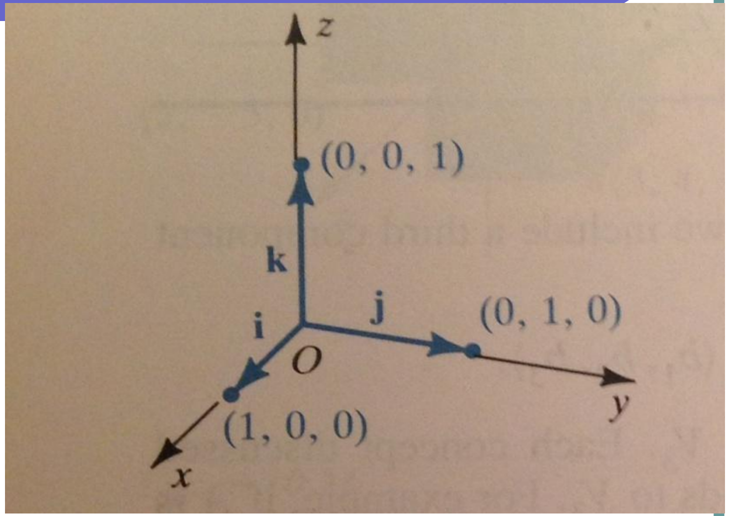
# Основные свойства векторного произведения

**Теорема 4.** Для произвольных векторов $\vec{a}$ $\vec{b}$ и произвольного $\lambda$ выполняется неравенство

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}.$$

# Выражение векторного произведение через прямоугольные координаты

Пусть Oxyz - прямоугольная система координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей этой системы.




$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

# Смешанное произведение трех векторов

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -произвольные векторы пространства.

**Определение:** Число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ называется смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и обозначается через $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

**Теорема 1.** Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

**Теорема 2.** Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «-», если они образуют левую тройку.

# Выражение смешанного произведения через прямоугольные координаты

Пусть Oxyz –прямоугольная система координат в пространстве, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей этой системы.

**Теорема.** Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3).$

Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Следствие.** Векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3).$ компланарны только и только тогда, когда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

# Смешанное произведение трех векторов

**Пример.** Найти объем пирамиды с вершинами

$$A(3,0,0),\ B=(1,3,0),\ C=(-2,-1,0),\ D=(1,1,6).$$

**Решение.** Данная пирамида построена на векторах

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(-2,-3,0),\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}=(-5,-1,0),\ \vec{c}=\overrightarrow{AD}=(-2,1,6).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0\\ -5 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 6\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -5 & -1\end{vmatrix}=6\cdot(2+15)=102.$$

$$V=\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{102}{6}=17.$$

**Ответ :** 17