

Лекция 2-18.

13.3.2. Свойства степенных рядов.

- Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (*)$$

имеющий радиус сходимости R ($R \leq \infty$). Сумма ряда $S(x)$ есть функция определенная внутри интервала сходимости, а также на тех концах интервала, где ряд сходится.

Лемма 1.

- Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке

$$[-b, b] \subset (-R, R).$$

- **Доказательство.** Выберем $x_0 : b < x_0 < R$.

По теореме Абеля ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ сходится.

$$\forall x \in [-b, b] \text{ имеем } x < x_0 \Rightarrow |a_n x^n| < |a_n x_0^n|.$$

Последнее неравенство означает, что ряд (*) равномерно сходится в $[-b, b]$.

Лемма 2.

- Степенной ряд, составленный из производных ряда (*) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (*).

- **Доказательство.** Допустим, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Тогда $R_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Ряд производных имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (**)$$

$$R_{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

-
- Если составить ряд из производных ряда (**), то у него тоже радиус сходимости равен R .
 - Т. е. все степенные ряды, полученные последовательным дифференцированием ряда (*) имеют одинаковый радиус сходимости и равномерно сходятся в любом интервале, принадлежащем области сходимости.

Свойства степенных рядов.

- 1) Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости ряда.
- **Пример.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$. Функция $S(x)$ непрерывна всюду, за исключением точки $x = 1$. Но она является суммой ряда только при $|x| < 1$.
- 2) Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости $\int_a^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.
- 3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в интервале сходимости.

13.4. Разложение функций в степенные ряды.

13.4.1 Ряд Тейлора.

- Сумма степенного ряда непрерывна и бесконечное число раз дифференцируема в интервале сходимости. Рассмотрим обратный вопрос. Когда можно утверждать, что функция $f(x)$ является суммой некоторого ряда?

-
- Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где a_n - коэффициенты,

которые нужно определить.

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad f'(x_0) = 1! a_1, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = n! a_n.$$

- Тогда $a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$

- Следовательно $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (**)$

Определение.

- рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд (**) относительно разности $(x - x_0)$, коэффициенты которого a_n выражаются через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0 .

- $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ - коэффициенты Тейлора функции $f(x)$

в точке x_0 .

13.4.2. Условие разложимости функций в ряд Тейлора.

- При каких условиях ряд Тейлора для функции $f(x)$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$
 сходится и его сумма равна $f(x)$?
- Обозначим $T_n(x)$ - многочлен n -й степени (частичная сумма ряда Тейлора)
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$
- Остаточный член ряда $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Сходимость ряда к функции $f(x)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - T_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$

-
- $R_n(x)$ - ошибка аппроксимации функции $f(x)$ многочленом $T_n(x)$.
 - Пусть $f(x)$ - многочлен n -й степени. Продифференцируем n раз. Последующие производные равны нулю. Получим формулу Тейлора для многочленов

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Пример.

- Разложить функцию $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ по степеням $(x-1)$ $x_0 = 1$.

$$f(1) = -1, \quad f'(1) = \left(1 - 2x + 6x^2\right)\Big|_{x=1} = 5, \quad f''(1) = (-2 + 12x)\Big|_{x=1} = 10,$$

$$f'''(1) = 12.$$

$$-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

13.4.3. Остаточный член ряда Тейлора. Формула Тейлора.

- Запишем функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \\ = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

- Докажем теорему о структуре $R_n(x)$, которая позволит устанавливать, стремится ли $R_n(x)$ к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. разлагается $f(x)$ в ряд Тейлора или нет.

Теорема.

- Если $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0 , имеет производную $f^{(n+1)}(x)$, то для всякой точки, принадлежащей интервалу, остаточный член равен

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

- где $\xi \in (x_0, x)$.

Доказательство.

- Запишем остаточный член в виде $R_n(x) = D_{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.

- Найдем D_{n+1} такое, чтобы для всякого x , принадлежащего интервалу, выполнялось

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + D_{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Зафиксируем $x = x_1$.
Тогда $D_{n+1} = \frac{f(x_1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k}{\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$.

Докажем, что это выражение равно

При $n = 0$ из теоремы Лагранжа $f^{(n+1)}(\xi), \xi \in (x_0, x_1)$.

$$D_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \xi \in (x_0, x_1).$$

- Для других n построим вспомогательную функцию $F(x)$, удовлетворяющую теореме Ролля. Пусть

$$F(x) = f(x_1) - f(x) - f'(x)(x_1 - x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n + \\ + D_{n+1} \frac{(x_1 - x)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad F(x_1) = 0.$$

- При $x = x_0$ заменив D_{n+1} его значением, получим $F(x_0) = 0$.

- Найдем $F'(x)$.

$$F'(x) = -f'(x) - f''(x)(x_1 - x) + f'(x) - \\ - \frac{f'''(x)}{2!}(x_1 - x)^2 + f''(x)(x_1 - x) - \dots - \\ - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(x_1 - x)^{n-1} + \frac{D_{n+1}}{n!} \frac{(x_1 - x)^n}{n!}.$$

- Только подчеркнутые члены не сокращаются.
- Производная $F'(x)$ существует во всех точках интервала. Вынося общий множитель за скобки, получим

$$F'(x) = \frac{(x_1 - x)^n}{n!} \left[-f^{(n+1)}(x) + D_{n+1} \right].$$

- Подставим вместо x значение ξ при котором

$$F'(\xi) = \frac{(x_1 - \xi)^n}{n!} \left[-f^{(n+1)}(\xi) + D_{n+1} \right] = 0.$$

- Тогда $D_{n+1} = f^{(n+1)}(\xi)$, т. е.

$$R_n(x_1) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

- Т. к. x_1 - любая точка интервала, то теорема доказана.

$f(x)$

Формула Тейлора для функции

в точке

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

- При выводе формулы предполагалось, что $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ -го порядка, где n — какое-то число. Другие производные нас не интересовали.

Частные случаи

- 1) $n = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$.

Это формула Лагранжа.

- 2) $n = 1 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$

или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Это линейная аппроксимация.

- Т. к. ξ - неизвестна, то $R_n(x)$ нужно только оценить. Пусть в интервале, где формула Тейлора справедлива,

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M_{n+1}.$$

Тогда для всякого x принадлежащего интервалу

$$\left| R_n(x) \right| < M_{n+1} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- Доказательство. $\left| R_n(x) \right| = \left| f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| =$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| |x - x_0|^{n+1} < M_{n+1} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$