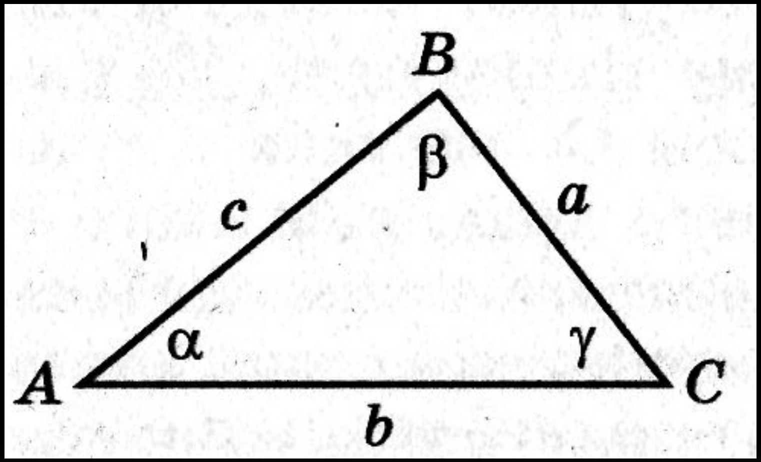
СИСТЕМА ОПОРНИХ ФАКТІВ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

Трикутник

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки.



З трьох відрізків можна утворити трикутник тоді і тільки тоді, коли будь-яка його сторона більша за різницю і менша за суму двох інших його сторін.

Периметр трикутника дорівнює сумі усіх його сторін. **Р = а + в + с**

Види трикутників

- Трикутник називається *тупокутним*, *прямокутним* або *гострокутним*, якщо його найбільший внутрішній кут відповідно більший, дорівнює або менший за 90°.

Види трикутників

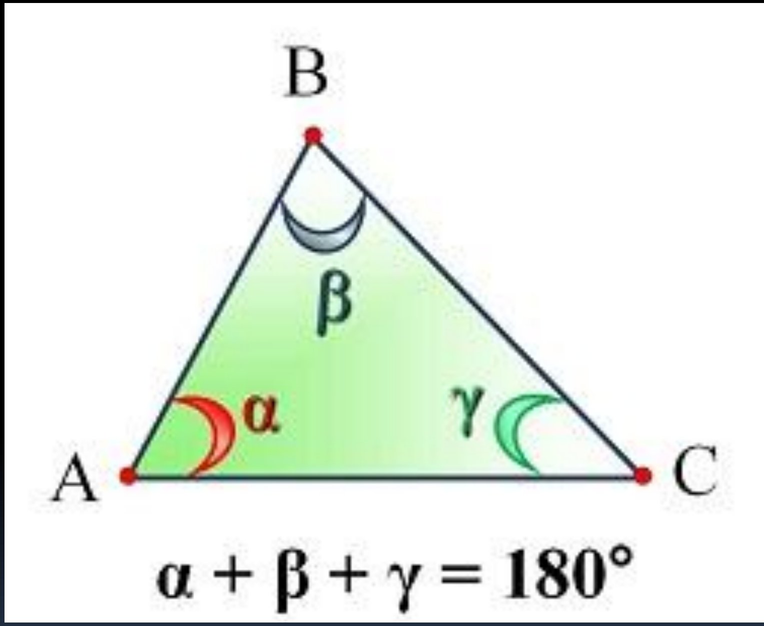
- Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні (бічні сторони).
- Трикутник, усі сторони якого рівні, називається *рівностороннім*, або *правильним.*

Ознаки рівності трикутників

- Трикутник можна визначити будь-якою трійкою таких основних елементів: або двома сторонами і кутом між ними, або однією стороною і двома кутами, або трьома сторонами.

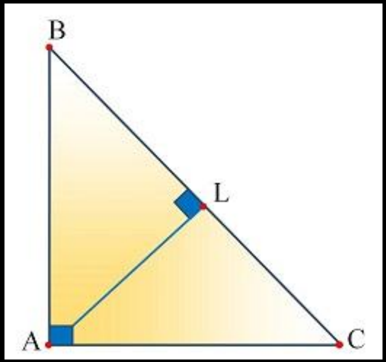
Кути трикутника

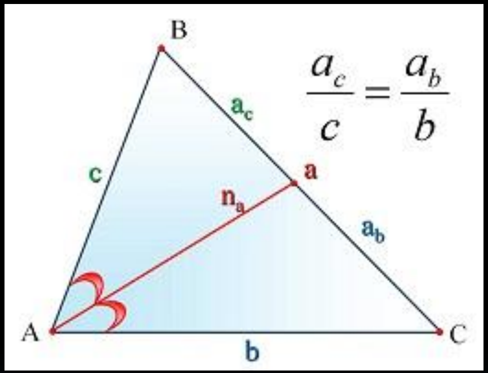
- **Теорема:** Сума кутів трикутника дорівнює 180^{0}.
- **Наслідки:**
- У будь-якому трикутнику хоча б два кути гострі;
- Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють 60^{0};
- Якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60^{0}, то цей трикутник є рівностороннім.

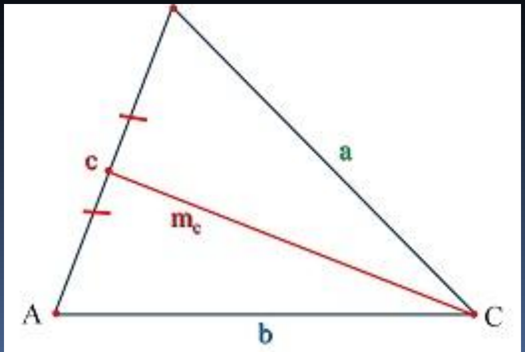


Висота, бісектриса медіана трикутника

- ***Висотою*** *трикутника* називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.
- ***Бісектрисою*** *трикутника* називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.
- ***Медіаною*** *трикутника* називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.
- У будь-якому трикутнику можна провести три медіани, три бісектриси і три висоти.

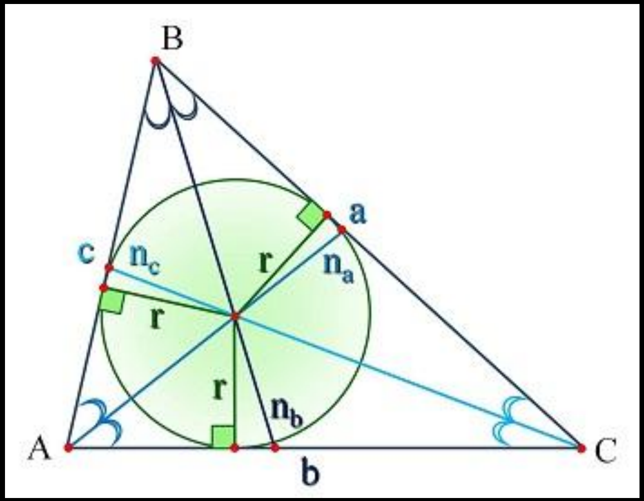


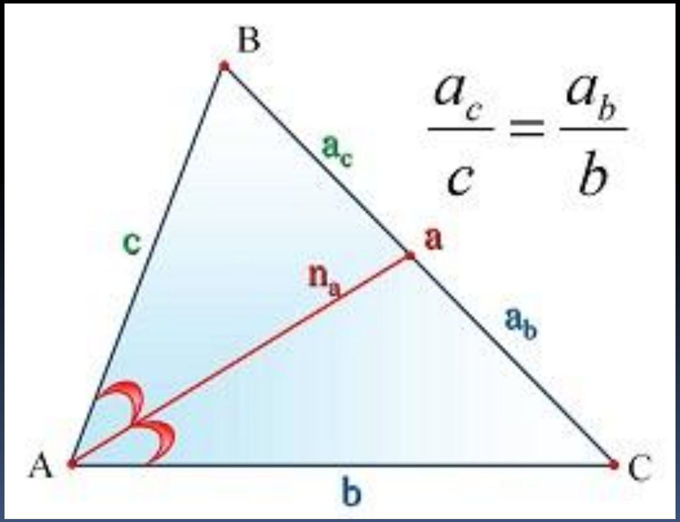




Властивості бісектриси кута трикутника

- У будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці (вона називається *інцентром*), яка лежить усередині трикутника і є центром вписаного в трикутник кола.
- Бісектриса ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим до неї сторонам.

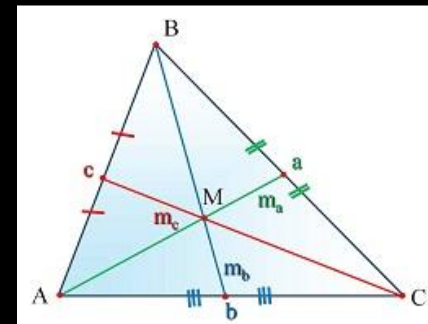


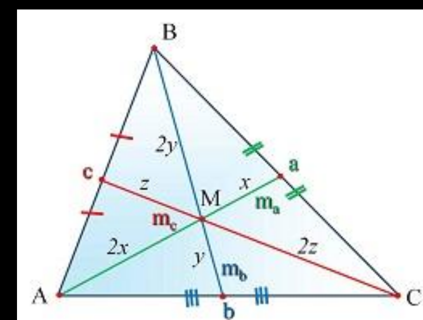


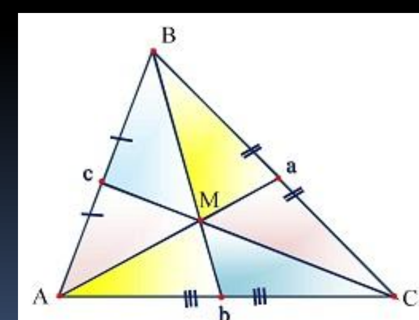
Властивості медіани трикутника

- У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (вона називається ***центроїдом*** трикутника) і в цій точці поділяються у відношенні 2:1**,** починаючи від вершини.
- Медіана ділить трикутник на два трикутника, площі яких рівні.
- Три медіани трикутника ділять трикутник на шість трикутників, площі яких рівні.
- Медіана трикутника , проведена до сторони , визначається через сторони трикутника за формулою:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$



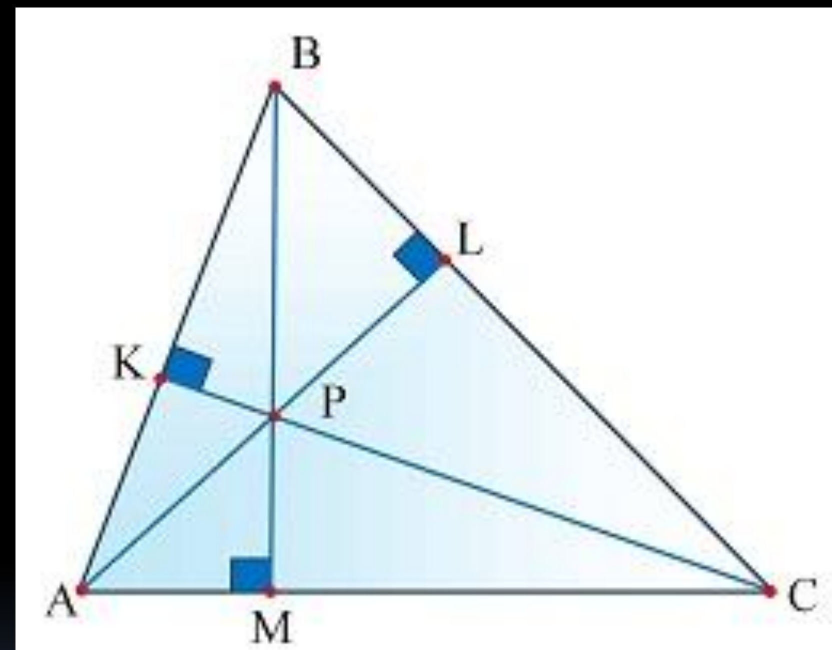




Властивості висоти трикутника

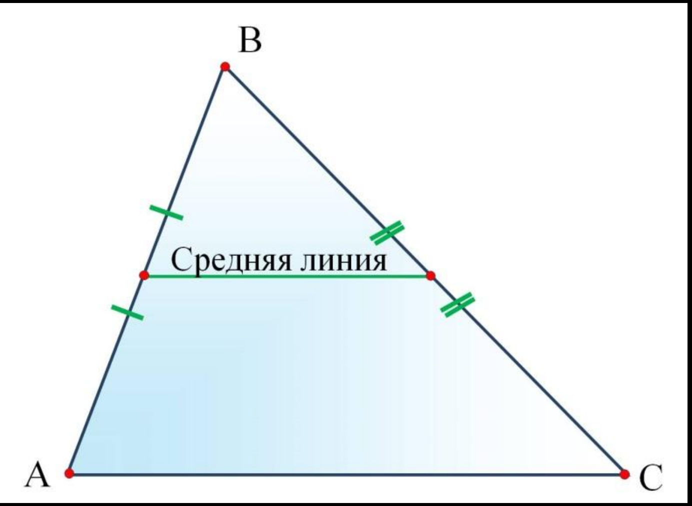
- У будь-якому трикутнику три висоти або їх продовження перетинаються в одній точці (вона називається ***ортоцентром*** трикутника).
- Висоти трикутника, проведені до сторін трикутника , a,b і c , позначаються h_a, h_b і h_c відповідно. Висота трикутника визначається через сторони трикутника за формулою: , де p - півпериметр.

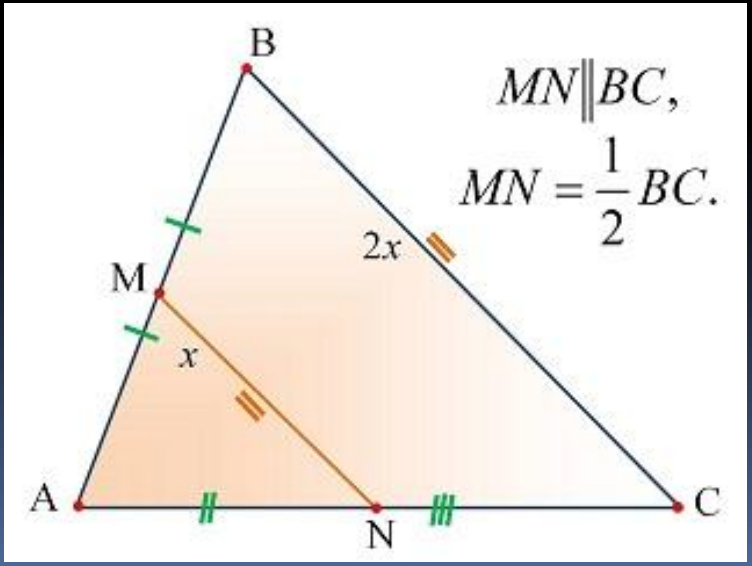
$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$



Середня лінія трикутника

- У кожному трикутнику можна побудувати три середні лінії – відрізки, які сполучають середини двох сторін трикутника.
- Середня лінія трикутника паралельна третій стороні трикутника та дорівнює її половині.
- Середня лінія трикутника відтинає від трикутника подібний трикутник.
- Площа меншого трикутника відноситься до площі основного трикутника як 1:4.



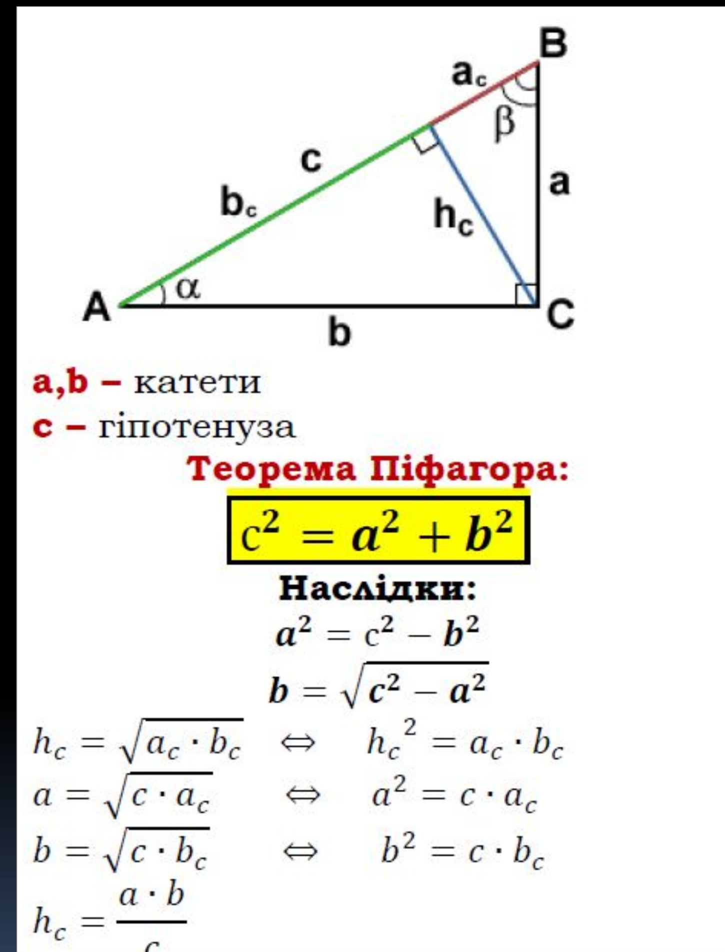


Прямокутний трикутник

- Прямокутний трикутник має сторону, яка лежить проти прямого кута, - *гіпотенузу* (c) та дві сторони, які утворюють прямий кут, - *катети* (a і b).
- **Теорема *Піфагора***: квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів. **$c^2 = a^2 + в^2$**

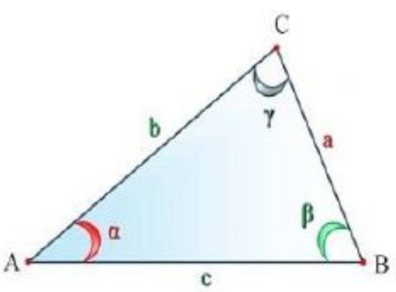
Властивості прямокутного трикутника:

- Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
- Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який його катет.
- Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
- У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.
- Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу: і .
- Висота проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу: .
- Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи.
- Для сторін прямокутного трикутника істинні відношення: , , .



Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

- проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки;
- проти рівних сторін лежать рівні кути;
- Теорема косинусів: квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.
- Теорема синусів: в трикутнику відношення довжини сторони до синусу протилежного кута рівні.



Теорема синусів : $\boxed{\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R}$

Теорема косинусів: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma}$ $\quad cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

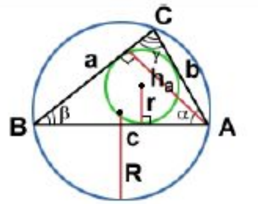
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot cos\alpha \qquad cos\alpha = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot cos\beta \qquad cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

Площі фігур

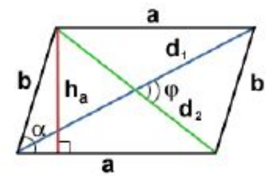
Довільний трикутник

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$
$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$S = \frac{abc}{4R}$$
$$S = pr$$



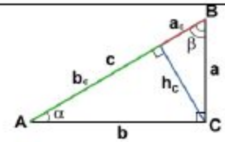
Паралелограм

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$
$$S = a \cdot h_a$$
$$S = ab \sin \alpha$$



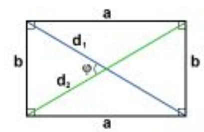
Прямокутний трикутник

$$S = \frac{1}{2} ab$$
$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



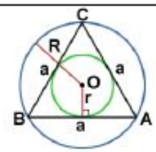
Прямокутник

$$S = a \cdot b$$
$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$$



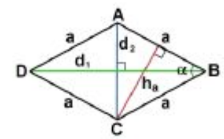
Правильний трикутник

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



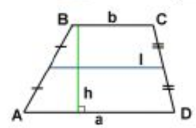
Ромб

$$S = a^2 \sin \alpha$$
$$S = a \cdot h_a$$
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



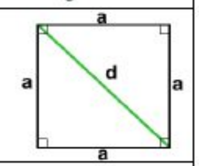
Трапеція

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



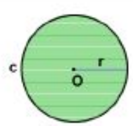
Квадрат

$$S = a^2$$
$$S = \frac{1}{2} d^2$$



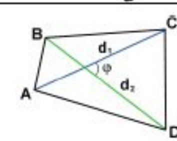
Круг

$$S = \pi R^2$$
$$S = \frac{1}{4} \pi d^2$$
$$l = 2\pi R$$
$$l = \pi d$$



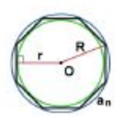
Довільний чотирикутник

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$



Правильний многокутник

$$S = \frac{n a_n r}{2}$$
$$S = \frac{1}{2} R^2 n \cdot \sin \frac{360°}{n}$$
$$S = \frac{1}{2} r^2 n \cdot tg \frac{360°}{n}$$

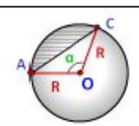


Правильний шестикутник

$$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

Сегмент

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°} \pm S_\Delta$$



Сектор

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$$