СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ

Дисперсійний аналіз
Лекція 7

Цілі і задачі статистичної перевірки гіпотез

- Математичний апарат ***статистичної перевірки гіпотез*** використовують для аналізу значущості отриманих вибіркових числових характеристик для генеральних сукупностей.

  Наприклад, можна відповісти на питання про те, чи є значущим знайдене вибіркове середнє і для генеральної сукупності (іншим чином, чи можна стверджувати що $\bar{x} = \mu$?).

Схема проведення статистичної перевірки гіпотез

- Висувається «**нульова гіпотеза**» H_0.
- Протилежною нульовій гіпотезі є гіпотеза H_1.
- Для H_0 використовується порівняльний аналіз статистичного критерію *К теор.* із експериментальним значенням *К експ*.
- Величину *К теор.* визначають із таблиць для заданого об'єму вибірки та рівня значущості α=1-γ*,* де γ - довірча ймовірність (γ=0,95; γ=0,99; γ=0,999).
- *К експ.* обчислюють за певною формулою.
- Якщо $\left|K_{експ}\right| \geq K_{табл}$, тоді нульова гіпотеза H_0 відкидається на користь альтернативної H_1 та робиться висновок про те, що результат, що спостерігається, значущий, з вірогідністю γ=0,95; γ=0,99; γ=0,999, або з помилкою в 5% , 1% , 0,1%. Вибір альтернативної гіпотези і критерію визначається конкретною задачею.

Види статистичних критеріїв

- Параметричні (якщо розподіл підпорядковується нормальному закону):

t-критерій Стьюдента,

F-критерій Фішера-Снедекора,

Z- критерії (де *Z* – аргумент інтегральної функції Лапласа Ф(Z).

- Не параметричні , наприклад, *критерій знаків*.

Порівняння вибіркової середньої з генеральною середньою нормальної сукупності
а) Малі вибірки

Висуваємо нульову гіпотезу про те, що розходження, що спостерігається між $\bar{x}$ і μ, не є значущим,

H_0: " $\bar{x} = \mu$ " (альтернативна гіпотеза H_1: " $\bar{x} \neq \mu$ "). Використовуємо ***критерій Стьюдента***.

Знаходимо $t_{експ} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$, де $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ - стандартна похибка.

Отримане значення критерію порівнюємо з $t_{табл} = t(\alpha, k)$ (дивись таблицю 4 додатків), де $k=n-1$ – число ступенів вільності, α – рівень значущості.

Якщо $|t_{експ}| \geq t_{табл}$, тоді нульова гіпотеза відкидається і робиться висновок про значущість розходження генерального середнього μ і вибіркового $\bar{x}$, тобто $\bar{x} \neq \mu$.

Якщо $|t_{експ}| < t_{табл}$, тоді приймають нульову гіпотезу, тобто $\bar{x} = \mu$.

б) Великі вибірки

Маємо: $\bar{x} \neq \mu$, $n > 30$.

Висуваємо нульову гіпотезу

H_0 : "$\bar{x} = \mu$ ", при альтернативній гіпотезі H_1: "$\bar{x} \neq \mu$". У якості критерію використовуємо ***аргумент інтегральної функції Лапласа***.

Обчислюємо $Z_{експ} = \dfrac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sqrt{D_{виб}}}$, де $D_{виб}$ - дисперсія вибірки.

Знайдене значення $Z_{експ}$ порівнюють з $Z_{табл}=Z_{кр}$, величину якого визначають зі співвідношення $\Phi(Z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ по таблиці 2 додатків, де $\Phi(Z_{кр})$ - інтегральна функція розподілу Лапласа.

Якщо $\alpha = 0{,}05$, тоді з таблиці 2 маємо, що $\Phi(Z_{кр}) = 1{,}96$.

Якщо $|Z_{експ}| \geq Z_{табл}$ - нульову гіпотезу відкидають на користь альтернативної.

Якщо $|Z_{експ}| < Z_{табл}$ - нульову гіпотезу приймають.

Перевірка гіпотези про рівність генеральних дисперсій двох сукупностей за критерієм Фішера-Снедекора

Нульова гіпотеза H_0: "$D_1^{ген} = D_2^{ген}$", якщо $S_1^2 \neq S_2^2$. Альтернативна гіпотеза H_1: "$D_1^{ген} \neq D_2^{ген}$".

Знаходять $F_{експ} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > 1$, тобто треба більшу за значенням дисперсію розділити на меншу.

Порівнюють знайдене значення з $F_{табл} = F(\dfrac{\alpha}{2}, k_1, k_2)$, де α – заданий рівень значущості, $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ – число ступенів вільності.

Якщо $|F_{експ}| \geq F_{табл}$, то нульову гіпотезу відкидають, тобто $D_1^{ген} \neq D_2^{ген}$.

Якщо $|F_{експ}| < F_{табл}$, то нульову гіпотезу приймають, тобто $D_1^{ген} = D_2^{ген}$.

Порівняння генеральних середніх двох випадкових величин
а) Нормально розподілені величини (малі вибірки)

Нульова гіпотеза H_0: "$\mu_1 = \mu_2$", при альтернативній гіпотезі H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

1) Якщо визначили, що $D_1^{ген} = D_2^{ген}$, то за критерієм Стьюдента знаходять:

$$t_{експ} = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}},$$

де S_1^2, S_2^2 – виправлені дисперсії вибірок, n_1, n_2 - об'єми вибірок, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ – середні вибірок.

Визначають $t_{табл} = t(\alpha, k)$ із таблиці розподілу Стьюдента, де α – заданий рівень значущості, $k = n_1 + n_2 - 2$ - число ступенів вільності.

Якщо $\left|t_{експ}\right| \geq t_{табл}$, тоді нульову гіпотезу H_0 відкидають, тобто $\mu_1 \neq \mu_2$.

Якщо $\left|t_{експ}\right| < t_{табл}$, тоді нульову гіпотезу H_0 приймають, тобто $\mu_1 = \mu_2$.

2) Якщо $D_1^{ген} \neq D_2^{ген}$, тоді: $t_{експ} = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{\sqrt{S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2}}$.

Знаходять за таблицею 4 додатків $t_{табл} = t(\alpha, k)$, де число ступенів вільності k обчислюють за формулою:

$$k = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 + 1}\right)} - 2.$$

Знайдене число k треба округлити до цілого числа.

Якщо $|t_{експ}| \geq t_{табл}$ - нульова гіпотеза відхиляється, $\mu_1 \neq \mu_2$.

Якщо $|t_{експ}| < t_{табл}$ - нульова гіпотеза приймається, $\mu_1 = \mu_2$.

Порівняння генеральних середніх двох випадкових величин Довільно розподілені величини (великі вибірки).

Якщо маємо великі вибірки ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$) і $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$, висуваємо нульову гіпотезу H_0: " $\mu_1 = \mu_2$ ", альтернативна гіпотеза H_1: " $\mu_1 \neq \mu_2$ ".

Знаходимо $Z_{експ} = \dfrac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{D_1 / n_1 + D_2 / n_2}}$,

де, n_1, n_2 – об'єми вибірок; D_1, D_2 - дисперсії.

Використовуючи співвідношення $\Phi(Z_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$, по таблиці 2 значень інтегральної функції Лапласа знаходимо критичне значення $Z_{кр}$.(якщо $\alpha = 0{,}05$, тоді $\Phi(Z_{кр}) = 1{,}96$.)

Якщо $|Z_{експ}| \geq Z_{табл}$ - нульову гіпотезу відкидають, тоді $\mu_1 \neq \mu_2$.

Якщо $|Z_{експ}| < Z_{табл}$ - нульову гіпотезу приймають і тоді $\mu_1 = \mu_2$.

Однофакторний дисперсійний аналіз

Дисперсійний аналіз – це статистичний метод, що дозволяє виявити вплив одного чи декількох спеціально організованих факторів на досліджувану ознаку, при одночасному впливі на нього безлічі випадкових факторів.

Фактори поділяються на *контрольовані* в досліді (організовані), та *неконтрольовані* (неорганізовані), дія яких на ознаку не регулюється.

Дисперсійний аналіз заснований на розкладанні загальної дисперсії статистичного комплексу на складові її компоненти (факторні і випадкові). Порівнюючи які за допомогою *F – критерію Фішера-Снедекора*, визначають, які частки загальної варіації результативної ознаки обумовлює дія регульованих (організованих) і не регульованих (випадкових) у досліді факторів.

Схема проведення однофакторного дисперсійного аналізу

1) Первинні дані, групують у виді кореляційної таблиці.

№ випробування	Рівень фактора A				
	A_1	A_2	A_3	...	A_r
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1r}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2r}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3r}
...	...	...	...	...	...
L	x_{L1}	x_{L2}	x_{L3}	...	x_{Lr}
Групова середня	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	...	$\overline{x}_r$

Схема проведення однофакторного дисперсійного аналізу

2) Знаходять середні величини: середню арифметичну всього комплексу - *загальну* середню $\overline{x}_{заг}$ і *групові середні* $\overline{x}_j$- по градаціях фактора *A*:

$$\overline{x}_{заг} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (1)$$

$$\overline{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_i}{n_j}, \qquad (2)$$

де *n*– загальна кількість випробувань, n_j-*кількість* випробувань по кожній із градацій. Якщо кількість випробувань в градаціях однакова, то $n_j = L$.

Схема проведення однофакторного дисперсійного аналізу

3) Визначають загальну суму квадратів відхилень C_y:

$$C_y = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{заг})^2 . \qquad (3)$$

4) Визначають суму квадратів відхилень по організованих факторах, (характеризує розсіювання між групами). При однаковому числі варіант у градаціях комплексу ця сума розраховується за формулою:

$$C_x = \sum_{j=1}^{r} (\bar{x}_j - \bar{x}_{заг})^2 \cdot L , \qquad (4)$$

якщо L - постійно для всіх дослідів. А при різних числах варіант:

$$C_x = \sum_{j=1}^{r} (\bar{x}_j - \bar{x}_{заг})^2 \cdot n_j . \qquad (5)$$

Схема проведення однофакторного дисперсійного аналізу

5) Обчислюють суму квадратів відхилень по випадкових факторах (характеризує розсіювання у групах) за формулою:

$$C_z = C_y - C_x. \qquad (6)$$

6) Встановлюють число ступенів вільності, що рівні:

для загальної дисперсії $k_y = n-1$,

факторної $k_x = r-1$,

випадкової (чи залишкової) $k_z = n-r$.

7) Визначають дисперсії:

$$\text{загальна } \sigma_y^2 = \frac{C_y}{k_y}; \qquad (7)$$

$$\text{факторна } \sigma_x^2 = \frac{C_x}{k_x}; \qquad (8)$$

$$\text{випадкова (залишкова) } \sigma_z^2 = \frac{C_z}{k_z}. \qquad (9)$$

Схема проведення однофакторного дисперсійного аналізу

Якщо $\sigma_x^2 > \sigma_z^2$, то роблять попередній висновок про те, що фактор має вплив; якщо $\sigma_x^2 < \sigma_z^2$, то фактор не чинить істотного впливу.

8) Якщо $\sigma_x^2 > \sigma_z^2$, тоді по крітерію Фішера-Снедекора встановлюють значущість висновку про вплив регульованого фактора на результативну ознаку. Знаходять:

$$F_{експ} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}. \qquad (10)$$

9) Порівнюють $F_{експ}$ із його стандартним значенням $F_{кр}(\alpha; k_x; k_z)$, знайденим по таблиці для рівня значущості α і ступенів вільності k_x і k_z.

Якщо $F_{експ} \geq F_{кр}$, - роблять висновок про статистичну значущість впливу на результат дослідження організованих факторів, якщо $F_{експ} < F_{кр}$, то такого висновку робити не можна.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!