Презентация на тему «Векторы»

Работу выполнила
ученица 9 «Г» класса
школы-гимназии №5
Мартьянова Елена

1.1. Понятие вектора

Мы знаем, что есть 2 вида величин. Например, длина, площадь, объем, масса и прочие полностью определяются заданием своих численных величин. Такие величины называются **скалярными величинами** или просто **скалярами.**

Но многие физические величины, например, сила, давление, скорость, перемещение и т.д. характеризуются не только своим числовым Значением, то и направлением в пространстве. Такие физические Величины называются **векторными величинами** или просто **Векторами.** Например, если на какое-либо тело воздействовать определенной силой, то эта сила изображается направленным отрезком. Длина отрезка соответствует численной величине силы, а стрелка указывает на направление воздействия силы.


F

Аналогично можно ввести понятие геометрического вектора. В отличие от физических векторов, векторы в геометрии не имеют конкретной природы (т.е. не выражают силу, скорость и т.п.). Геометрические векторы рассматриваются просто как «направленные отрезки». Наприпер, любой отрезок имеет 2 конца. Назовем один из этих концов **начальной точкой**, или **началом**, а другой – **концом** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу. Конец вектора изображается стрелкой.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – A $\vec{a}$ B - вектор $\vec{a}$

Вектор $\overrightarrow{BA}$ – B $\vec{b}$ A - вектор $\vec{b}$

Любой направленный отрезок называется ***вектором.***

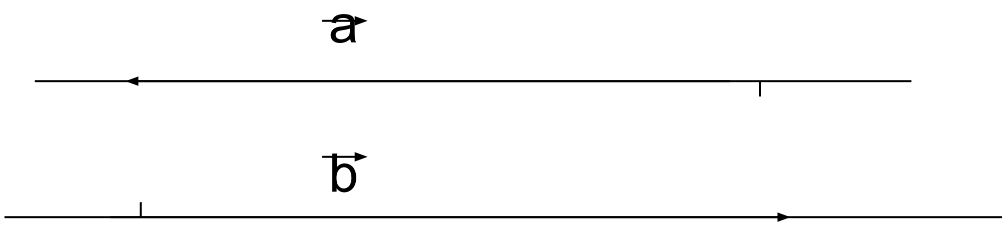
В геометрии также рассматривают вектор, в котором начало и конец совпадают. Такой вектор называется **нулевым вектором.** Отсюда следует,что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор обозначается так: $\vec{0}$

1.2. Равенство векторов

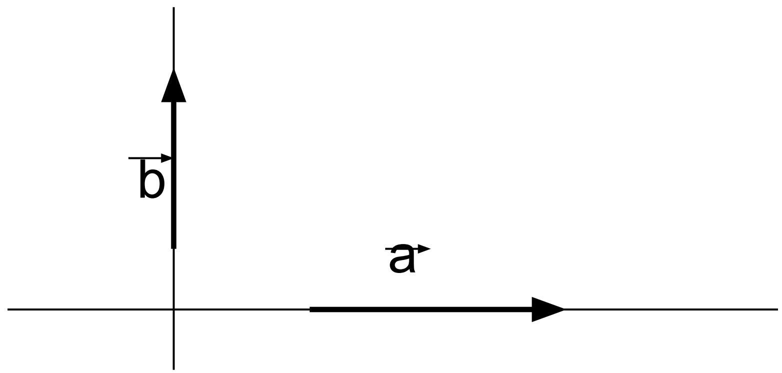
Длину отрезка АВ называют *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$. Аналогично, модуль (длина) вектора $\vec{a}$ также записывают через $|\vec{a}|$. Например, $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\vec{c}| = 2$.

Если отрезок АВ лежит на примой а, то говорят, что вектор $\overrightarrow{AB}$ также лежит на прямой а.

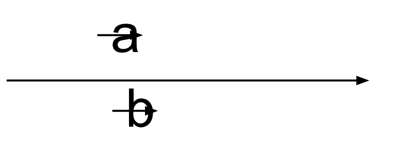
Если 2 вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие векторы называются ***коллинеарными.*** Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ запишут так $\vec{a} || \vec{b}$.

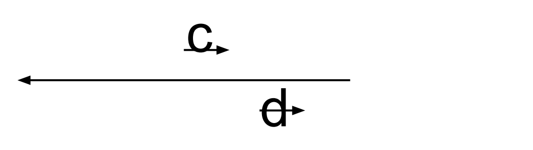


Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на перпендикулярных прямых, то их называют **перпендикулярными** (ортогональными) векторами и записывают $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то их называют **сонаправленными** векторами. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны и имеют разные направления, то их называют **противоположно направленными** и записывают так: $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$.





Векторы** называются **равными**, если они сонаправлены и их модули равны.* Иными словами, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными, т.е. $\vec{a}=\vec{b}$.

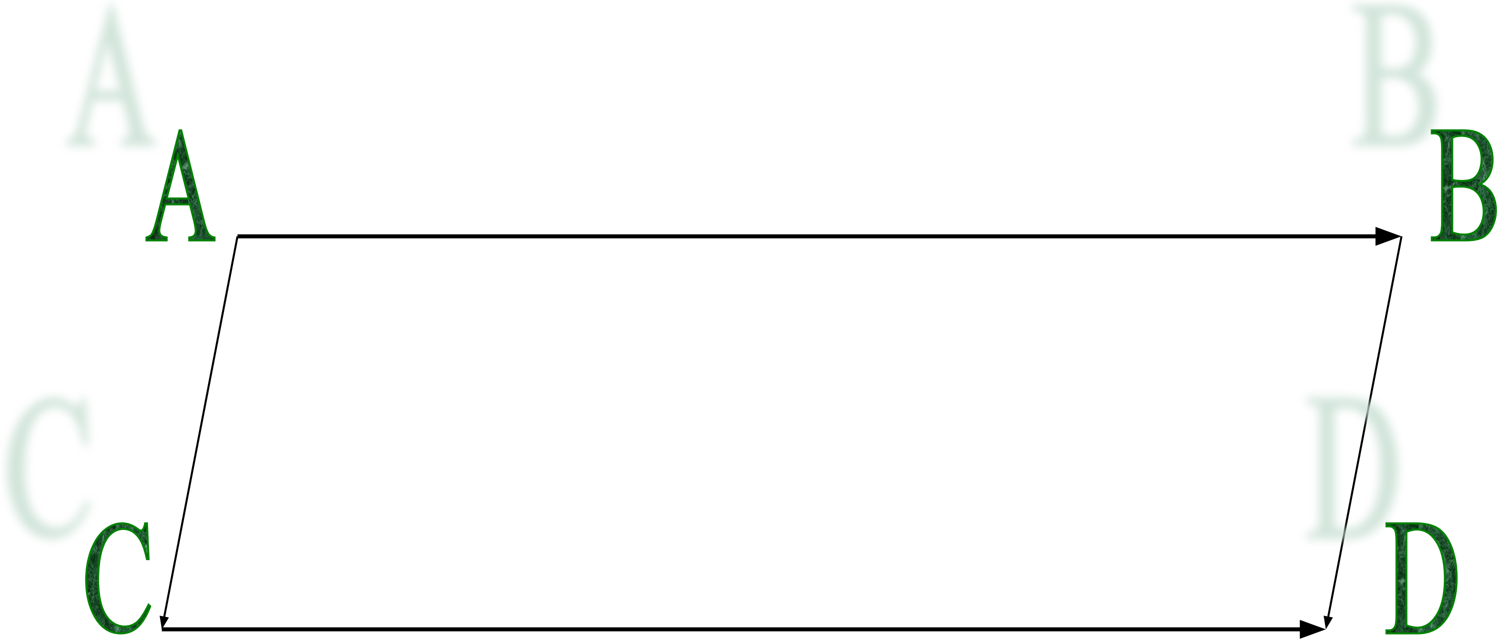
1.3.Свойства равных векторов

<u>Теорема.</u> *Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, обратно, если векторы совмещаются парллельным переносом, то эти векторы равны.*

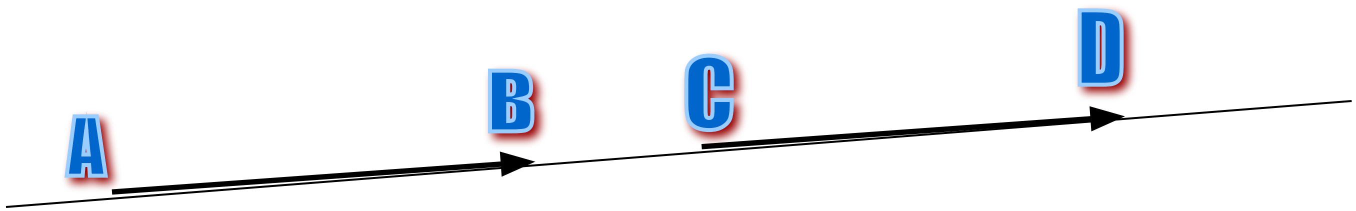
<u>Доказательство.</u> Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны (см. след. слайд). Тогда по определению $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е. четырехугольник ABCD является параллелограммом, т.к. противоположные стороны AB и CD параллельны и равны. Следовательно, AC=BD и AC||BD, т.е. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ можно совместить параллельным переносом. При этом точка A $\rightarrow$ точка C, а точка B $\rightarrow$ точка D.

Обратно, пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ совмещаются некоторым параллельным переносом и при этом точка A переходит в точку C, а точка B – в D. Тогда по определению параллельного переноса AC=BD и AC||BD, т.е. ABCD – параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}$ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$. Так как при параллельном переносе начало вектора $\overrightarrow{AB}$ переходит в начало $\overrightarrow{CD}$, а конец $\overrightarrow{AB}$- в конец $\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Теорема доказана.

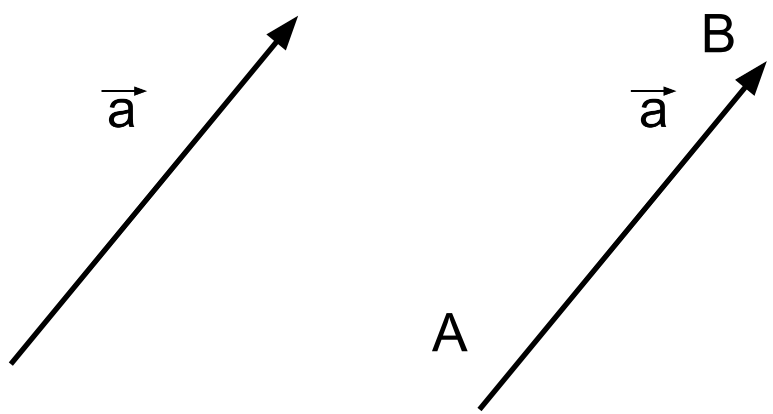

A
B
C
D

Следствие 1. *Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.*



Если точка A является началом вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ отложен от точки A.

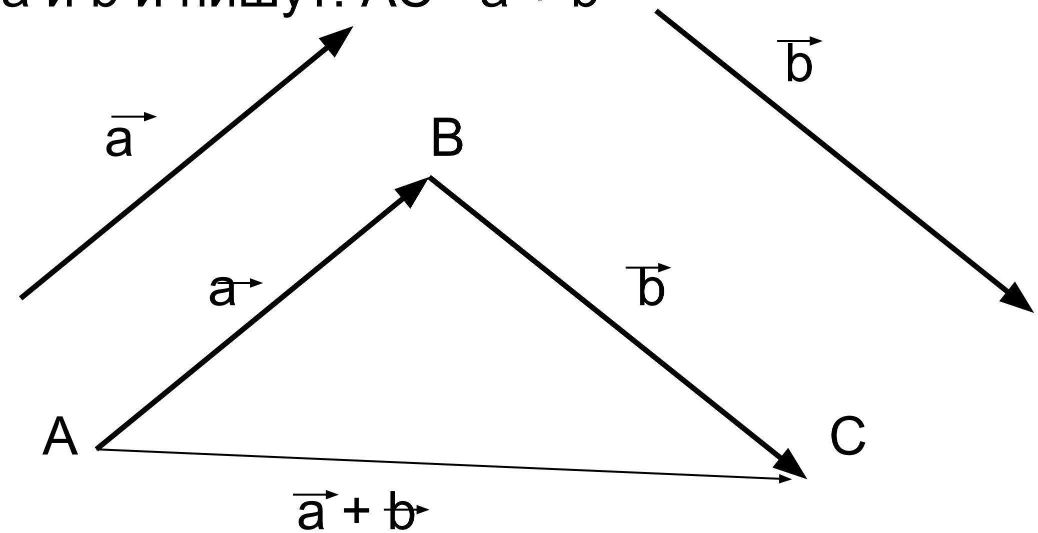
Следствие 2. *От любой точки A можно отложить единственный вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.*



2. Сложение и вычитание векторов

2.1. *Сложение векторов.*

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Полученный вектор $\overrightarrow{AC}$ называют ***суммой*** *векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишут: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



Такой способ получения суммы двух векторов назывется ***правилом треугольника*** сложения векторов.

2.2. Свойства сложения векторов

Теорема 1. *Для любых векторов a, b и c верно:*

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон);

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство. 1) Пусть векторы a и b не коллинеарны. От некоторой точки A плоскости отложим векторы $\vec{AB}=\vec{a}$ и $\vec{AD}=\vec{b}$. Тогда получим параллелограмм ABCD. По правилу треугольника $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=$ $=\vec{a}+\vec{b}$. Аналогично, $\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Следовательно, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

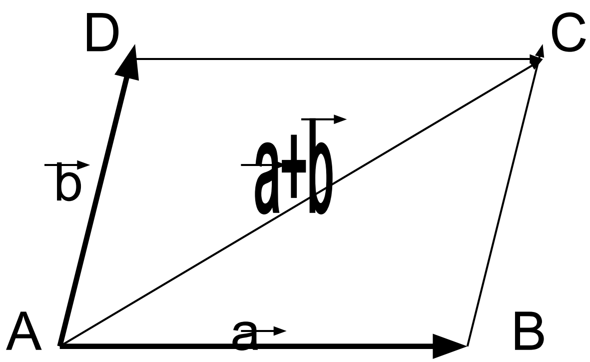
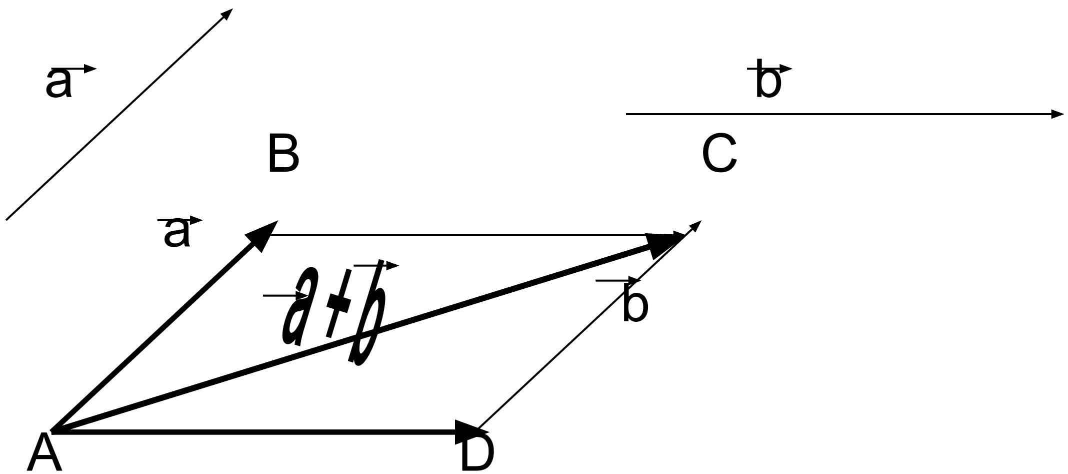


Рис. 1

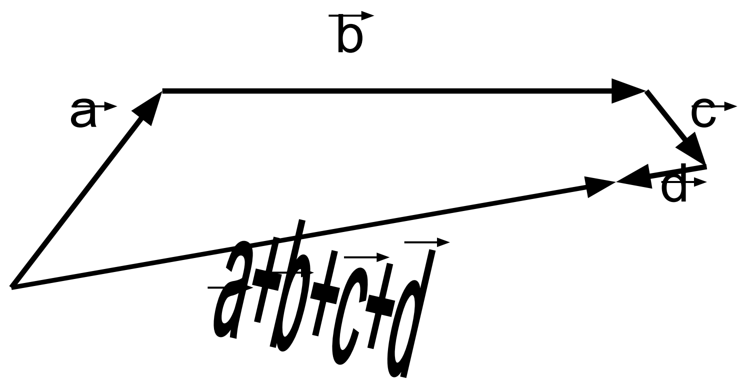
Векторы можно складывать и по **правилу параллелограмма.**

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору а, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Из этого достроим параллелограмм ABCD так, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, а $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Построим вектор $\overrightarrow{AC}$, который будет также являться диагональю ABCD, и будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Для нахождения суммы нескольких векторов есть **правило многоугольника** или **правилом последовательного складывания векторов**. Его суть заключается в том, что мы нужное количество векторов в заданной последовательности соединяем конец одного вектора с началом следующего. Когда все векторы будут соединены, то мы строем вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего. Этот вектор и будет суммой.

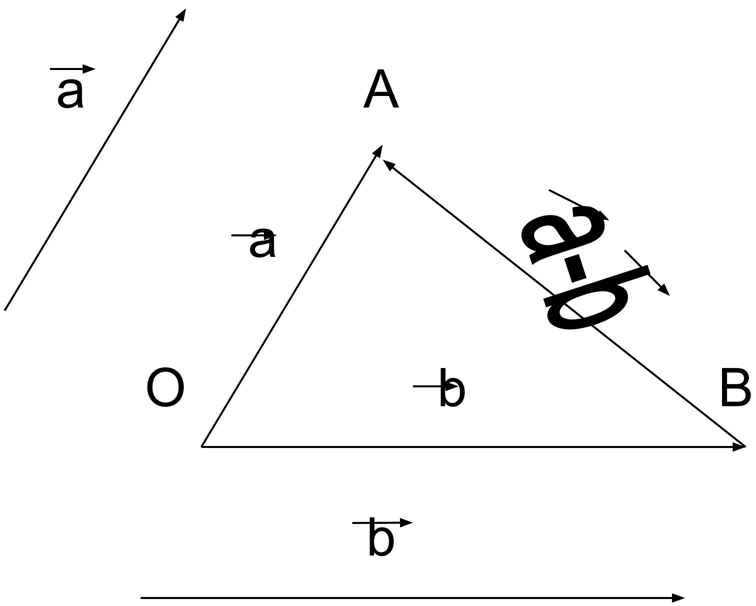
Например: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ - ?



2.3. Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ равен вектору $\vec{a}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

От некоторой точки О откладываем векторы $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{BA}$ равен разности $\vec{a} - \vec{b}$. Так как $\vec{OA}=\vec{OB}+\vec{BA}$, то $\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}= \vec{a} - \vec{b}$.



3.1. Умножение вектора на число и его свойства

Произведением *вектора $\vec{a} \neq 0$ на число К называется вектор, модуль которого равен числу |К| • $|\vec{a}|$ и сонаправлен с вектором $\vec{a}$ при К >0, противоположно направлен с вектором $\vec{a}$ при К* < 0. Произведение числа К на вектор а записывают так: К • $\vec{a}$.

Если К=0, то 0 • $\vec{a}$ = *0.*

__**Теорема.**__ *Для любых чисел α, β и любых векторов a, b верно равенство:*

1. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \vec{a}(\beta\alpha)$ *(сочетательный закон);*
2. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ *(I распределительный закон);*
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ *(II распределительный закон).*

Доказательство 1. Если αβ >0, т.е. числа α и β имеют одинаковые знаки, то вектор $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ сонаправлены, а если числа α и β имеют разные знаки, то векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\vec{a}$; $\alpha(\beta\vec{a})$ и $\vec{a}$ противоположно направлены. Поэтому при любых α, β векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены. Теперь осталось показатать равенство их модулей:

__**$|(\alpha\cdot\beta)\vec{a}|=|\alpha\beta|\cdot|\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ и $|\alpha(\beta\vec{a})|=|\alpha||\beta\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$.**__

Следовательно, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

3.2. Признак коллинеарности векторов

Теорема. Чтобы вектор $\vec{b}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, необходимо и достаточно существование числа α такого, что $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

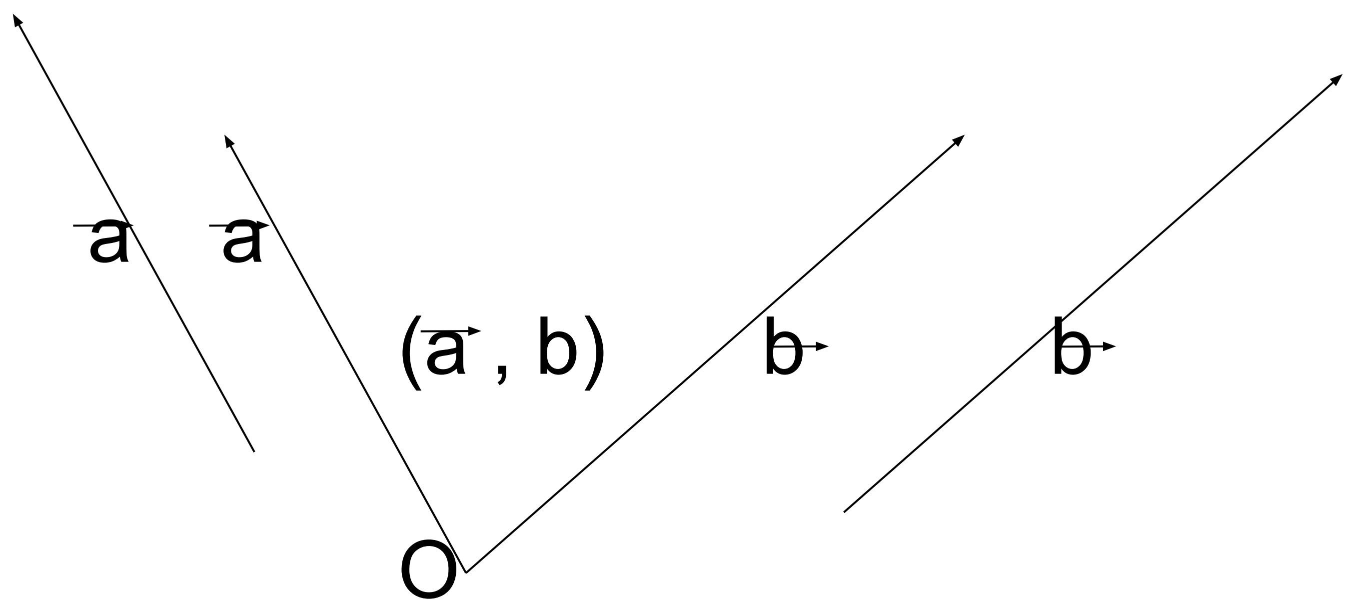
Следствие. Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы существовало число α такое, что $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.

4.1. Понятие угла между векторами.

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется ***угол*** *BAC. Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.*

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают через $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0°, а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен 180 °



4.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением *двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу* $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

$\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярное произведение равных векторов называется **скалярным квадратов** этого вектора и обозначается через $\vec{a}^2$.

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}^2|$.

<u>Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:</u>

1. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *верно равенство*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *любого действительного числа α верно равенство*

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *верно равенство*

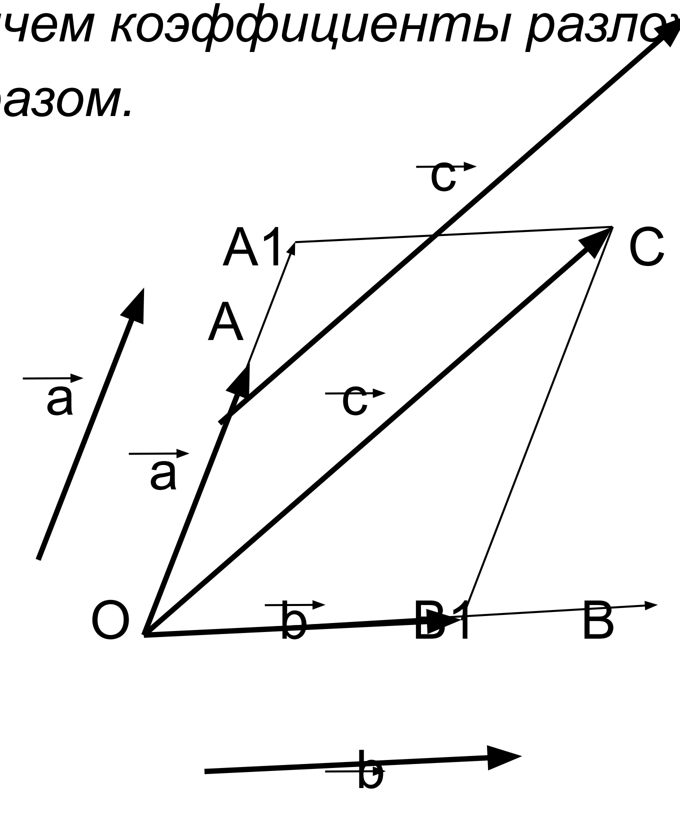
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

5. Координаты вектора
5.1.Разложение любого вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема. *Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то для любого вектора $\vec{c}$ найдутся числа x и y такие, что выполняется равенство*

$$\underline{\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}},$$

причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.



Из этой теоремы вытекает, что любой вектор можно разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие 2 неколлинеарных вектора, то они называются ***базисными векторами*** плоскости. Итак, любые 2 неколлинеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. А действительные числа x и y называются ***координатами вектора*** $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

5.2. Координаты вектора в прямоугольной системе координат.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Оху. Пусть $\vec{i}$- единичный вектор, сонаправленнный с осью Ох, а $\vec{j}$ – единичный вектор, сонаправленный с осью Оу. Эти векторы называют ***координатными векторами***. Так как векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны, то их можно рассматривать в качестве базисных векторов. Тогда для любого вектора а плоскости Оху найдутся единственные действительные числа х и у такие, что

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Здесь числа х и у называются ***координатами*** вектора $\vec{a}$ в прямоугольгой системе координат Оху, и это записывается так: $\vec{a}$= (х; у).

Некоторые свойства координат вектора:

1. У равных векторов соответствующие координаты равны: если $\vec{a}$= (x; y), $\vec{b}$= (u; v) *и* $\vec{a} = \vec{b}$, *то* x=u и y=v.

Обратно, векторы, у которых соответствующие координаты равны между собой: если $\vec{a}$= (x; y), $\vec{b}$= (u; v) *и* x= u, y= v, *то* $\vec{a}=\vec{b}$.

2. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты: если $\vec{a}$=(x;y), $\vec{b}$=(u;v), *то* $\vec{a}+\vec{b}$=(x+u; y+v).

$$\vec{a}+\vec{b}=(x\vec{i}+y\vec{j})+(u\vec{i}+v\vec{j})=(x+u)\vec{i} + (y + v)\vec{j}.$$

3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число, если $\vec{a}$=(x; y) *и λ- число, то* $\lambda \cdot \vec{a}$ *=(λ • x; λ • y).*

Следствие. Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат этих векторов : если $\vec{a}$= (x; y), $\vec{b}$= (u; v), то $\vec{a} - \vec{b}$ = (x-u; y-v).

5.3. Координаты вектора, заданного координатами концов. Радиус-вектор

Если на плоскости Оxy задана точка A (x;y), то вектор $\overrightarrow{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A. Для радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ верно равенство $\overrightarrow{OA}$= (x;y), т.е. соответствующие координаты точки A и радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ совпадают.

Пусть задан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и A(x1;y1), B(x2;y2). Тогда выполняется равенство $\underline{\overrightarrow{AB} = (x2-x1)\vec{i} + (y2-y1)\vec{j}}$, т.е. $\underline{\overrightarrow{AB} = (x2-x1;y2-y1).}$

$|\overrightarrow{AB}|= \sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$ $|\vec{a}|= \sqrt{x^2+y^2}$

6.Выражение скалярного произведения через координаты векторов
6.1.Координатный вид скалярного произведения

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ = (x1;y1) и $\vec{b}$ = (x2;y2 определяется по формуле: $\mathbf{\vec{a} \cdot \vec{b} = x1 \cdot y2 + x2 \cdot y2}$.

6.2. Координатный вид коллинеарности и перпендикулярности векторов. Определение угла между векторами

Если векторы $\vec{a}=(x1;y1)$ и $\vec{b}=(x2;y2)$ взаимно перпендикулярны, то $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = 0$. Тогда имеем: $x1x2+y1y2=0$.

Это и есть ***условие перпендикулярности*** ненулевых векторов.

С помощью формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = x1 \cdot y2 + x2 \cdot y2$ можно найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(x1;y1)$ и $\vec{b}=(x2;y2)$. Действительно, их формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ находим, что

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

7.1. Уравнение прямой. Направляющий вектор и вектор нормали прямой

Уравнение прямой можно задать различными способами. Например, в 8 классе мы определили прямую как серединный перпендикуляр некоторого отрезка. Теперь определим уравнение прямой с помощью векторов.

Пусть дана точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{p} = (\alpha;\beta)$ (рис.1.см.след.слайд). Тогда через точку M_0 параллельно вектору $\vec{p}$ проходит одна и только одна прямая *l*. Точка M_0 называется ***начальной точкой*** прямой *l*, а вектор $\vec{p}$- ***направляющим вектором*** этой прямой. Если M (x;y) является произвольной точкой прямой *l*, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. Здесь направляющий вектор $\vec{p}$ = (α;β)не параллелен осям координат, т.е. α≠0, β≠0. Используя условие коллинеарности векторов, $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0;y-y_0)$, получим уравнение:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$$

Пусть дана прямая *l* и вектор $\vec{n}=(a;b)$. Если *l* _|_ $\vec{n}$, то $\vec{n}$ называется ***вектором нормали*** прямой *l.* Если прямая *l* проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$и точка M(x;y) – произвольная точка прямой l, то $\overrightarrow{M_0M}$ _|_ $\vec{n}$, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}= 0$. Тогда уравнение $\underline{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$ является уравнением прямой *l*, заданной точкой $M_0(x_0;y_0)$и вектором $\vec{n}=(a;b)$ (рис.2)

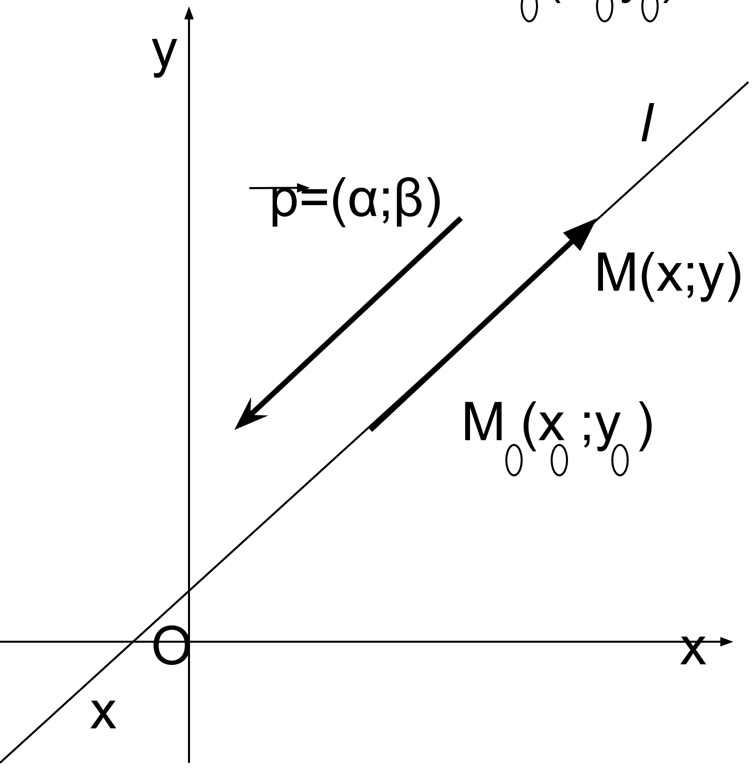


Рис. 1

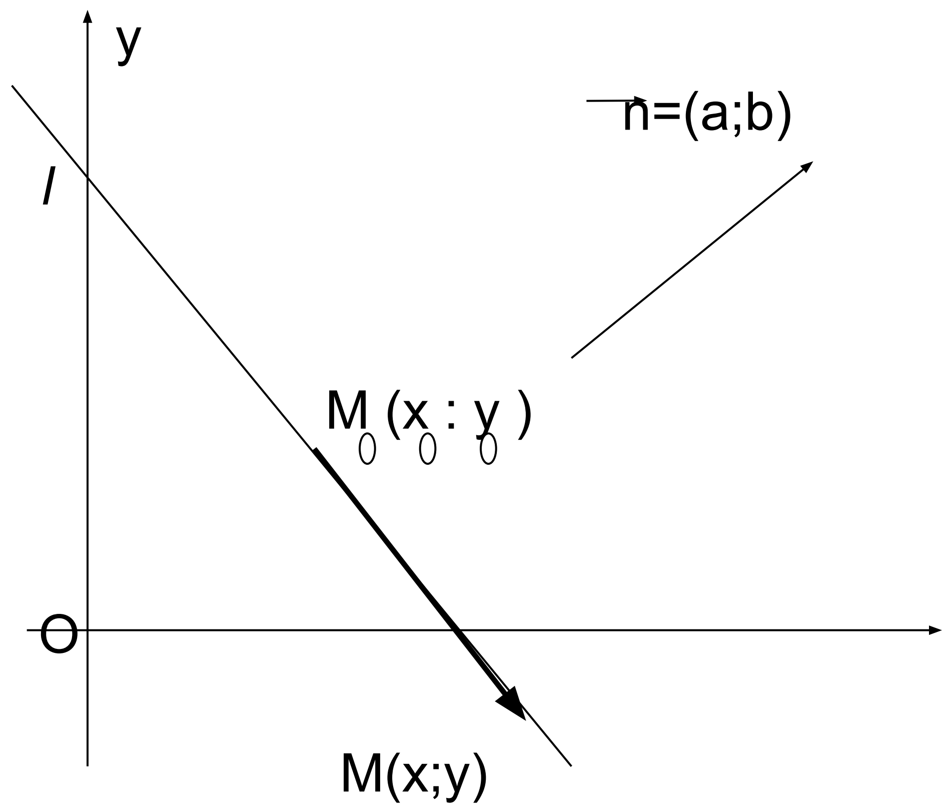


Рис. 2

Спасибо
за
внимание!