Лекция 11

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

(продолжение)

4. Элементарные состояния основной системы

Коэффициенты системы канонических уравнений метода перемещений – реакции, возникающие во введенных связях в единичных и грузовом состояниях. Например, r_{ij} – реакция, возникающая в *i*-ой связи в *j*-ом единичном состоянии, R_{iP} – реакция, возникающая в *i*-ой связи в грузовом состоянии.

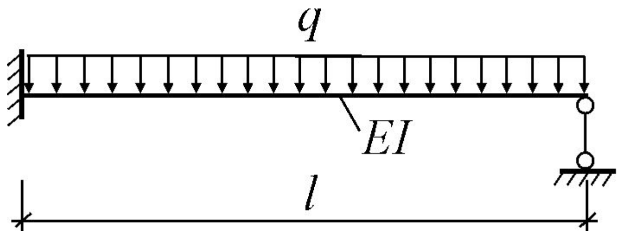
Все эти реакции равны сумме реакций отдельных стержней, объединяемых в узлах. Для их определения необходимо рассчитывать статически неопределимые стержни различной длины и жесткости с различными закреплениями по концам, получающих различные перемещения или нагруженных различными силами.

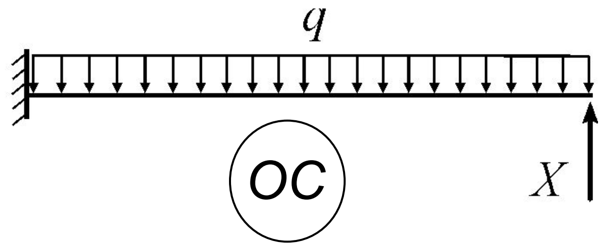
С целью упрощения расчетов, основные типы часто встречающихся задач решаются для общего случая. Такие простейшие задачи называются элементарными состояниями основной системы (ОС), а результаты их расчета сводятся в единую таблицу.

В подавляющем большинстве случаев эти задачи бывают статически неопределимыми, Поэтому они решаются методом сил.

Рассмотрим решение двух типовых задач.

1) Стержень с равномерно распределенной нагрузкой q

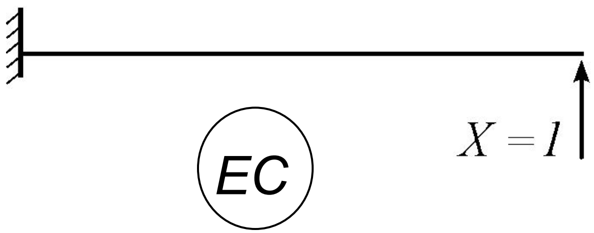


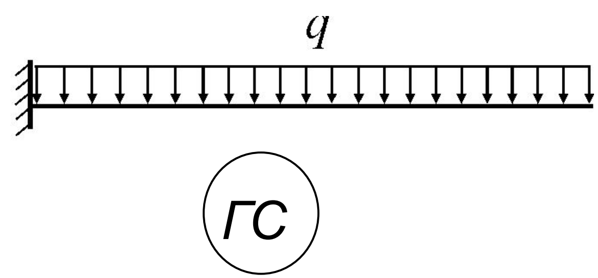


Степень статической неопределимости системы $n=1$.

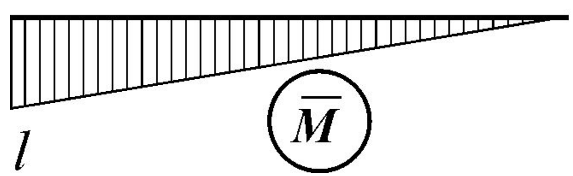
Каноническое уравнение имеет вид $\delta X + \Delta_P = 0$.

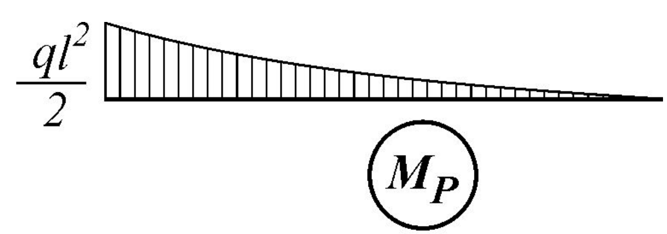
Рассмотрим единичное и грузовое состояния ОС:





В этих состояниях построим единичную и грузовую эпюры:





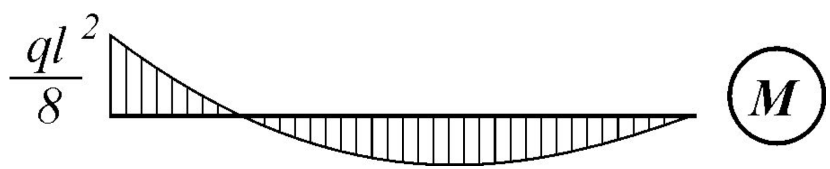
Определим коэффициенты канонического уравнения

$$\delta = \overline{M}^2 = \frac{l^3}{3EI}, \qquad \Delta_P = \overline{M} \otimes M_P = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

и вычислим неизвестную реакцию:

$$R_B = X = -\frac{\Delta_P}{\delta} = \frac{3}{8} ql.$$

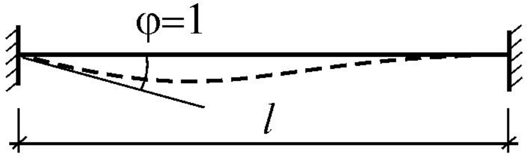
По формуле $M = \overline{M} \cdot X + M_P$ получаем окончательную эпюру изгибающих моментов:

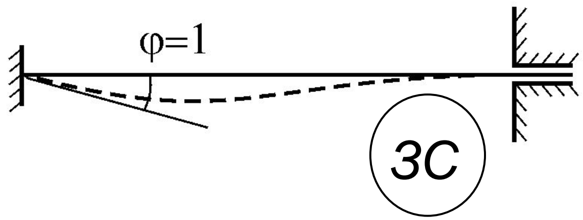


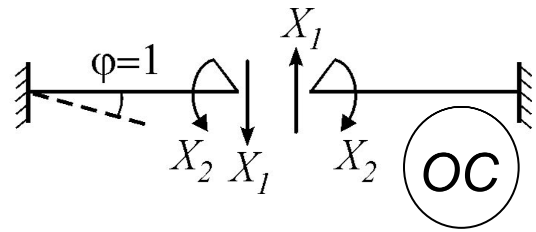
2) Поворот одного конца стержня с заделанными концами

Пусть один конец стержня поворачивается на единичный угол. Степень статической неопределимости этой системы $n=3$. Если не учитывать продольную деформацию, можно принять $n=2$ и рассматривать стержень с правой опорой в виде ползуна.

Выберем симметричную основную систему (ОС):



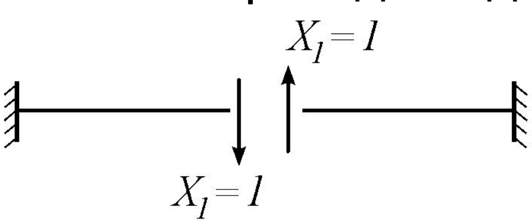




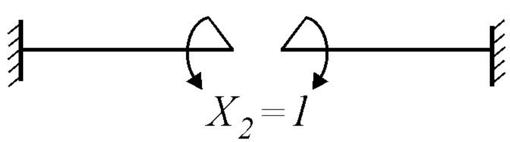
Система канонических уравнений будет:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

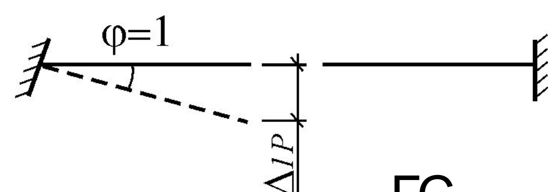
Рассмотрим два единичных и одно грузовое состояния ОС:



1-ЕС

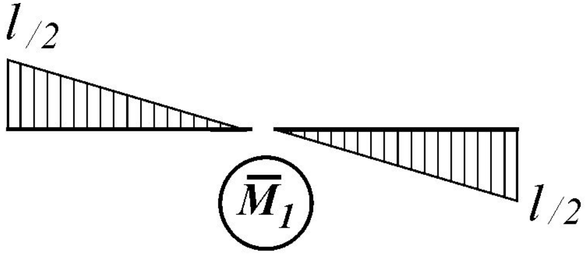


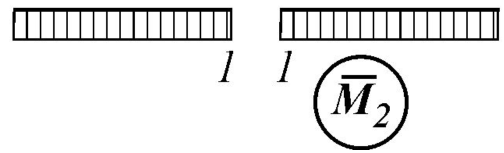
2-ЕС

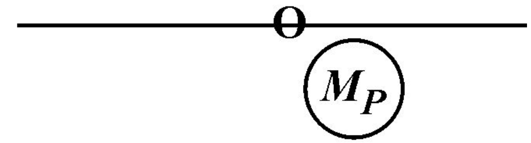


ГС

Во всех этих состояниях построим эпюры моментов:







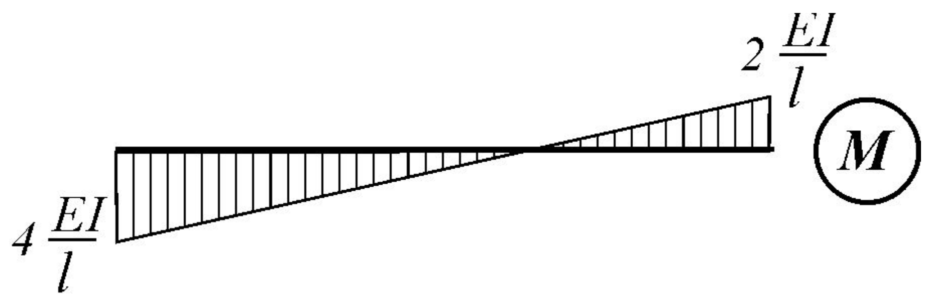
Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1^{\,2} = \frac{l^3}{12EI},\ \delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1 \otimes \overline{M}_2 = 0,\ \ \delta_{22} = \overline{M}_2^{\,2} = \frac{l}{EI},$$

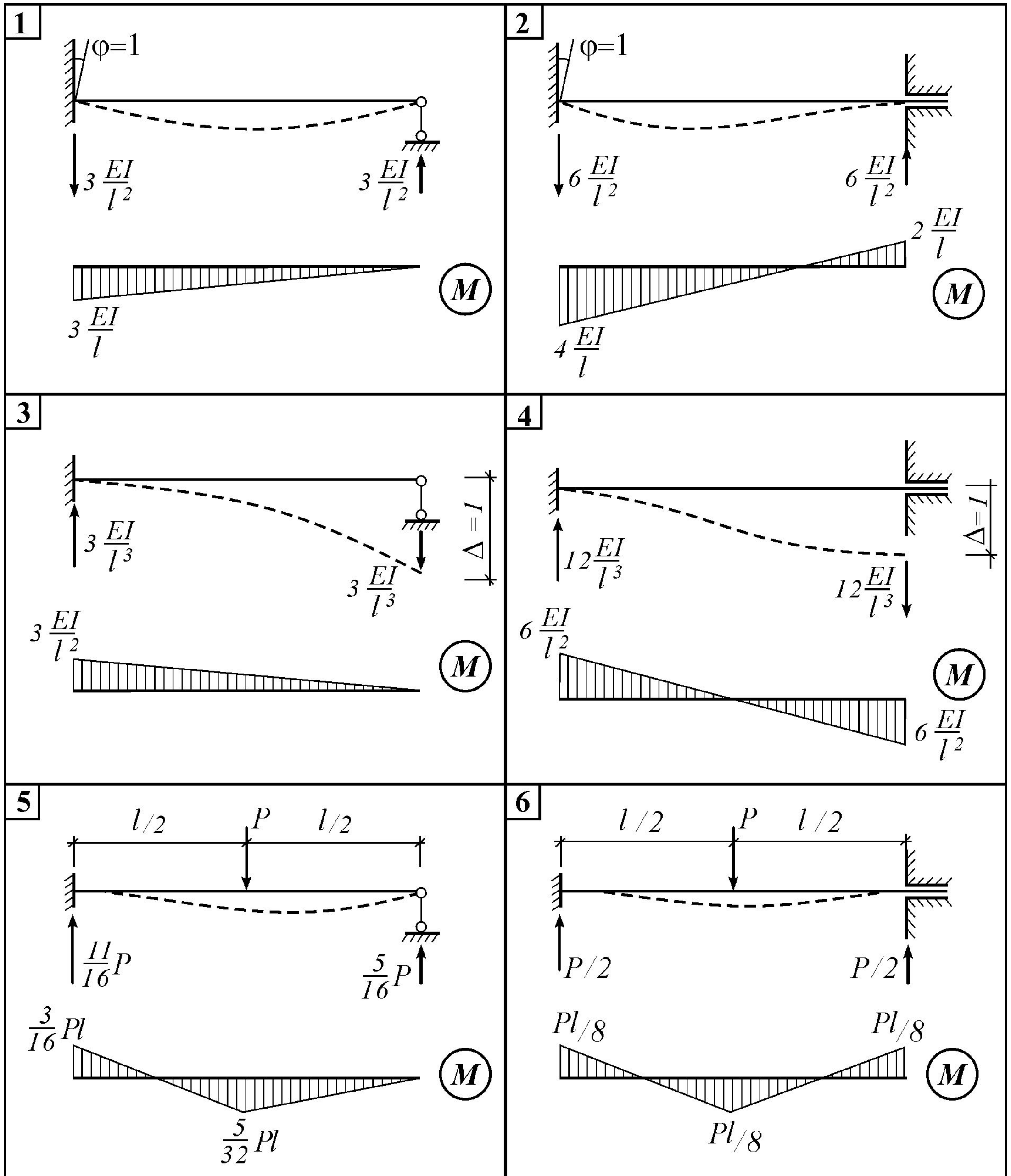
$$\Delta_{1P} = \frac{l}{2} \cdot tg\varphi = \frac{l}{2} \cdot 1 = \frac{l}{2}, \qquad \Delta_{2P} = -\varphi = -1.$$

Из решения канонических уравнений имеем $X_1 = -6\dfrac{EI}{l^2},\ \ X_2 = \dfrac{EI}{l}.$

Тогда по формуле $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + M_P$ окончательно получим:



Аналогичные расчеты проводятся для всех типовых случаев и представляются в виде таблицы. Например,



1
φ=1
3 EI/l²
3 EI/l²
3 EI/l
M
2
φ=1
6 EI/l²
6 EI/l²
2 EI/l
4 EI/l
M
3
Δ=1
3 EI/l³
3 EI/l³
3 EI/l²
M
4
Δ=1
12 EI/l³
12 EI/l³
6 EI/l²
6 EI/l²
M
5
l/2
P
l/2
11/16 P
5/16 P
3/16 Pl
5/32 Pl
M
6
l/2
P
l/2
P/2
P/2
Pl/8
Pl/8
Pl/8
M

5. Определение коэффициентов канонических уравнений

Коэффициенты канонических уравнений МП можно определять статическим или кинематическим способами.

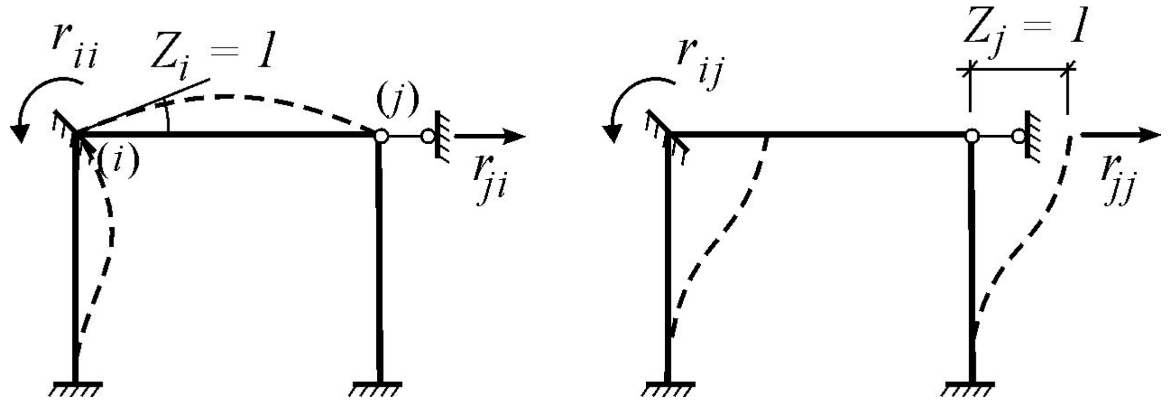
Статический способ основан на определении реакций во введенных связях основной системы из уравнений статики. Для этого необходимо вырезать отдельные узлы или части основной системы и составлять уравнения равновесия (статики):

- если искомая реакция является реактивным моментом, то она определяется из условия равенства нулю момента в узле;
- если реакция является реактивной силой, то определяется из уравнения проекции на ось.

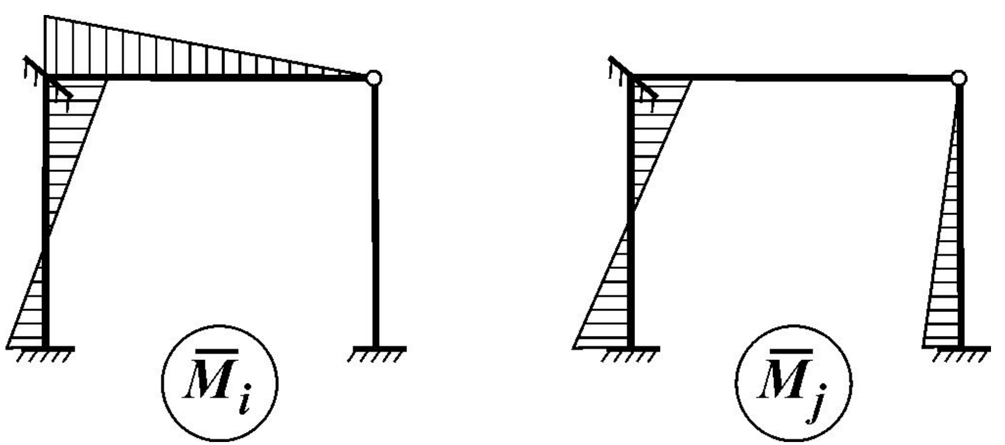
Статический способ является основным способом определения коэффициентов системы канонических уравнений.

Теорема Релея. *Реакция, возникающая в j-ой связи от перемещения i-ой связи на единицу равна реакции i-ой связи от перемещения j-ой связи на единицу, т.е.* $r_{ji} = r_{ij}$.

Доказательство. Рассмотрим *i*-ое и *j*-ое единичные состояния основной системы некоторой рамы:



и соответствующие эпюры моментов в этих состояниях



Возможная работа сил *j*-ого единичного состояния на перемещениях *i*-го состояния равна

$$W_{ji} = r_{ij} \cdot 1 = r_{ij}.$$

Работа сил *i*-го состояния на перемещениях *j*-го состояния будет

$$W_{ij} = r_{ji} \cdot 1 = r_{ji}.$$

По теореме Бетти

$$W_{ji} = W_{ij}.$$

Значит, равны и правые их части, т.е.

$$r_{ij} = r_{ji}.$$

Теорема доказана.

Эту теорему иногда называют ***теоремой о взаимности реакций***. Она позволяет сократить объем вычислений побочных коэффициентов канонических уравнений МП.

Кинематический способ основан на определении коэффициентов канонических уравнений перемножением эпюр:

$$r_{ij} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx \qquad r_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j .$$

Формула вычисления грузовых коэффициентов отличается от аналогичной формулы метода сил:

$$R_{iP} = -\sum \int \frac{\overline{M}_i M_P^0}{EI} dx \qquad R_{iP} = -\overline{M}_i \otimes M_P^0 .$$

Здесь $\overline{M}_P^0$ – грузовая эпюра изгибающих моментов в любой статически определимой системе, полученной из заданной системы удалением лишних связей.

Кинематический способ применяется при сложности определения коэффициентов статическим способом или для проверки результатов статического способа.

6. Определение усилий

После определения коэффициентов все они подставляются в систему канонических уравнений. Затем полученная система уравнений решается и определяются неизвестные $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

После этого определяются внутренние усилия заданной статически неопределимой системы. Они определяются аналогично методу сил.

Вначале по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \ldots + \overline{M}_n Z_n + M_P$$

определяются моменты.

Затем, исходя из них, определяются поперечные силы *Q*, а по ним определяются продольные силы *N*:

$$M \Rightarrow Q \Rightarrow N.$$

7. Алгоритм метода перемещений

Алгоритм МП состоит из следующих этапов:

1. Определение степени кинематической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Запись канонических уравнений.
4. Рассмотрение единичных и грузового состояний.
5. Построение эпюр моментов во всех состояниях.
6. Определение коэффициентов канонических уравнений (при необходимости – их проверка).
7. Решение канонических уравнений.
8. Построение эпюр *M, Q, N.*
9. Проверка правильности расчета. Она проводится аналогично методу сил – статическим и кинематическим способами.

Как видим, алгоритмы МП и МС почти совпадают. При более подробном рассмотрении можно выявить не только сходные, но и принципиально отличающиеся стороны. Рассмотрим некоторые из них.

1) Оба используются для расчета СНС. При принятии одинаковых допущений, оба приводят к единому результату. При использовании в разных областях дополняют друг-друга.

2) В МС неизвестными являются силы, а в МП – перемещения. При расчете одной и той же системы число их неизвестных часто бывает разным. Значит, одни системы выгоднее рассчитывать МС, другие МП.

3) В МС ОС получается удалением связей, а в МП – введением связей. В МС вариантов ОС много, а в МП она единственна.

4) Единичные состояния (ЕС) в МС определяются воздействием единичных сил, в МП – единичных перемещений.

5) В МС необходимые эпюры в ОС строятся обычным способом, а в МП – по готовой таблице.

6) Коэффициенты канонических уравнений в МП определяются проще (из уравнений статики).

7) Многие боковые коэффициенты системы канонических уравнений МП равняются нулю, что упрощает ее решение и т.д.