Векторы в пространстве

вход

Содержание

I. Понятие вектора в пространстве
II. Коллинеарные векторы
III. Компланарные векторы
IV. Действия с векторами
V. Разложение вектора
VI. Базисные задачи

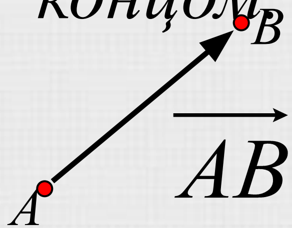
Проверь себя
Об авторе
Помощь в управлении презентацией

Выход

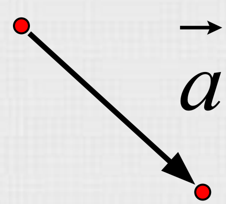
Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) –

отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



$$\overrightarrow{AB}$$



$$\vec{a}$$

M

$$\overrightarrow{MM} = \vec{0}$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ *– длина отрезка AB.*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB \qquad \left|\vec{0}\right| = 0$$

Коллинеарные векторы

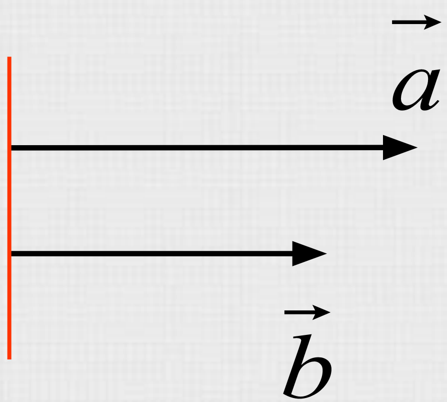
Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными****, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.*

Среди коллинеарных различают:

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы

Сонаправленные векторы

Сонаправленные векторы *- векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.*



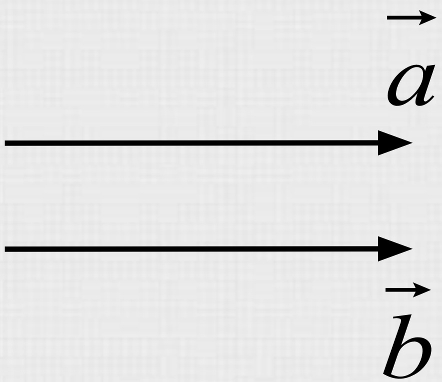
$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

Нулевой вектор *считается сонаправленным с любым вектором.*

- Равные векторы

Равные векторы

Равные векторы *- сонаправленные векторы, длины которых равны.*

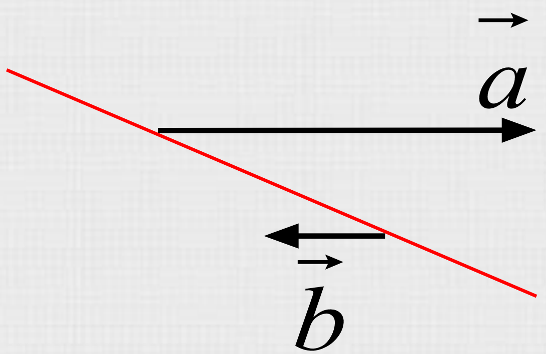


$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Противоположно направленные векторы

Противоположно направленные векторы – *векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.*

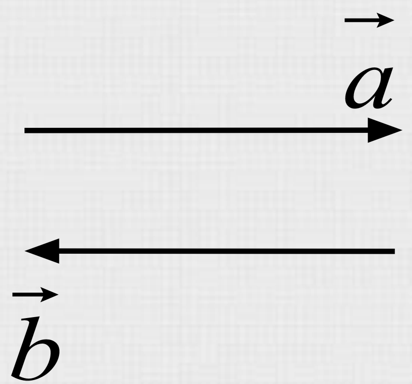


$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

- [Противоположные векторы]()

Противоположные векторы

Противоположные векторы *– противоположно направленные векторы, длины которых равны.*



$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.

Признак коллинеарности

Если существует такое число $\mathbf{k}$ *при котором выполняется равенство* $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{k}\vec{\mathbf{b}}$ *и при том вектор* $\vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$*, то векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *коллинеарны.*

<u>Доказательство</u>

Доказательство признака коллинеарности

Два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство*
$\vec{a} = k\vec{b}$

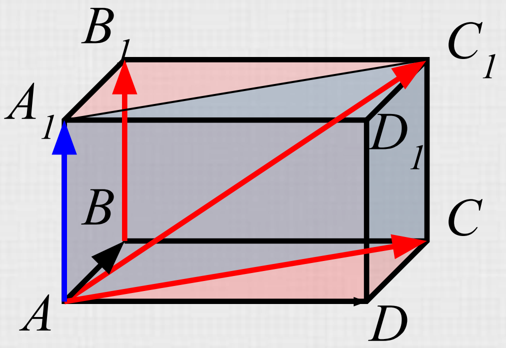
вектор $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$*, если* $k \geq 0$ (*следует из определения*
вектор $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$*, если* $k < 0$ *произведения вектора на число*)

Значит вектор $\vec{b}$ *и* $k\vec{a}$ *коллинеарны,*
т.к. сонаправленные и противоположно направленные векторы лежат на одной или параллельных прямых.
ч.т.д.

Определение компланарных векторов

Компланарные векторы *– векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

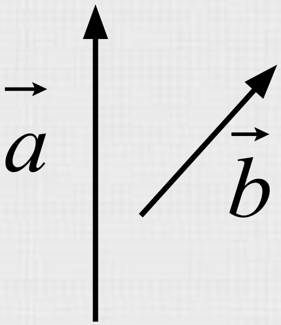
Пример:

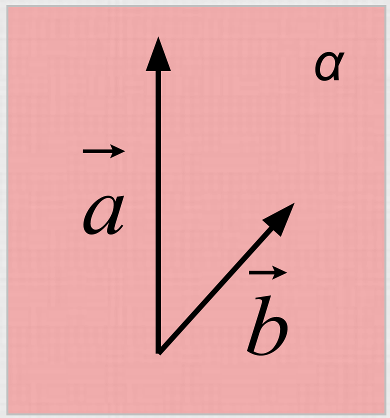


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ *– компланарны, т.к.* $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$*, а векторы* $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ *лежат в плоскости* (AA_1C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.





$\vec{a} \in \alpha$

$\vec{b} \in \alpha$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – компланарны

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны

если

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = k\vec{b}$

Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ *можно разложить по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т.е. представить в виде*

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{b}}$$

где x *и* y *– некоторые числа, то векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*

Доказательство

Задачи

Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b};$

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}?$

Справка Решение

2) *Известно, что векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*
Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$

б) $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{c}, 2\vec{b}-3\vec{c}?$

Справка Решение

Решение

$а)векторы\ \vec{a}\ и\ 2\vec{a}\ коллинеарны,$
$векторы\ \vec{b}\ и\ 3\vec{b}\ коллинеарны,$
$значит\ векторы\ \vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}\ и\ 3\vec{b}\ компланарны$

$б)векторы\ \vec{a}, \vec{b}\ и\ \vec{a}+\vec{b}\ компланарны,$
$векторы\ \vec{a}, \vec{b}\ и\ \vec{a}-\vec{b}\ компланарны,$
$значит\ векторы\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\ и\ \vec{a}-\vec{b}\ компланарны$

Решение

а) если векторы $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$ компланарны,

то существуют такие x и y, что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n, что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом,

значит векторы компланарны

Решение

б) если векторы $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{c},\ 2\vec{b}-3\vec{c}$

компланарны, то существуют такие x *и* y*, что*

$$\vec{a}+\vec{b}=x(\vec{a}+2\vec{c})+y(2\vec{b}-3\vec{c})$$

$$\vec{a}+\vec{b}=x\vec{a}+2x\vec{c}+2y\vec{b}-3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x)+\vec{b}(1-2y)+\vec{c}(-2x+3y)=0$$

$$\begin{cases}1-x=0\\1-2y=0\\3y-2x=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

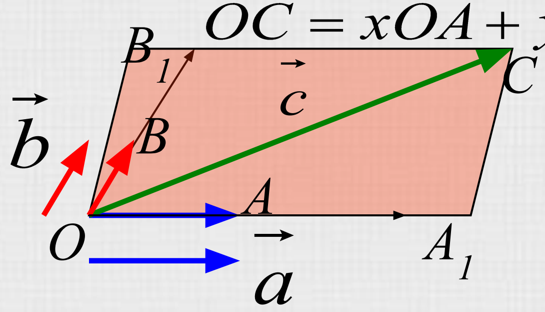
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{c}+\frac{1}{2}(2\vec{b}-3\vec{c})$$

искомые x *и* y *существуют,*

значит векторы компланарны

Доказательство признака компланарности

$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$



Дано:

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

x, y – некоторые числа

Доказать:

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны

Доказательство:

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – не коллинеарны

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1} \in (OAB)$

$\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны ч.т.д

Свойство компланарных векторов

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде:*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение

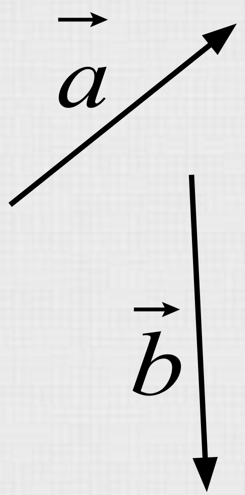
Сложение векторов

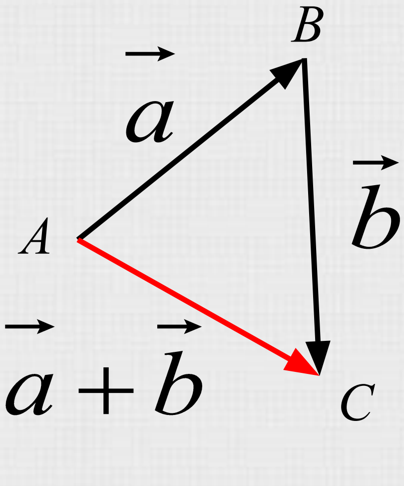
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда
- Свойства сложения

Правило треугольника

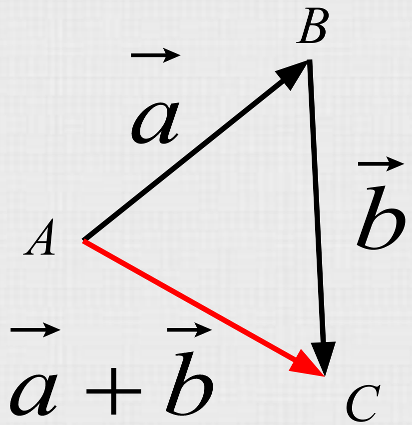
Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
2. *от точки B отложить вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$*
3. *вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$*





Правило треугольника



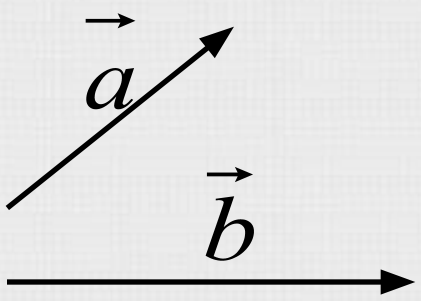
Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

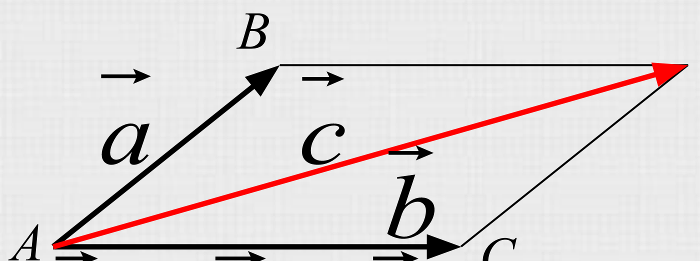
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо:

1. *отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
2. *от точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$*
3. *достроить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
4. *диагональ параллелограмма – сумма векторов*





$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

Свойства сложения

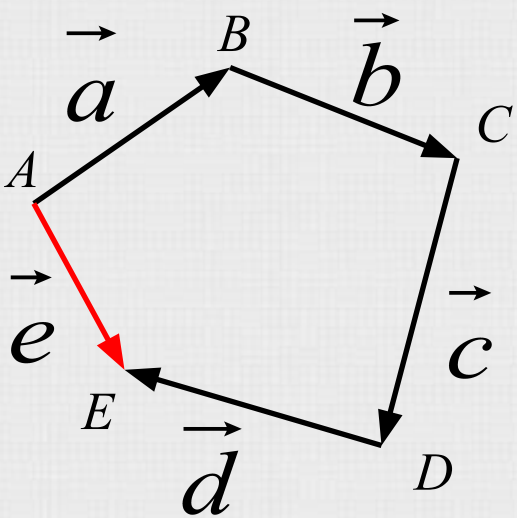
Для любых векторов $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ *и* $\vec{\boldsymbol{c}}$ *справедливы равенства* :

$$\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}}$$ *переместительный закон*

$$\left(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}\right) + \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \left(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}\right)$$ *сочетательный закон*

Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего(при последовательном откладывании).

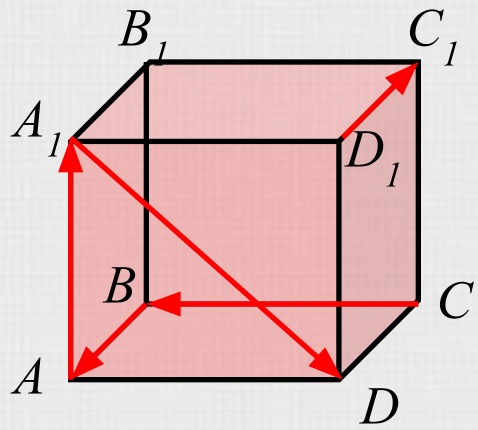


$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

Пример

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

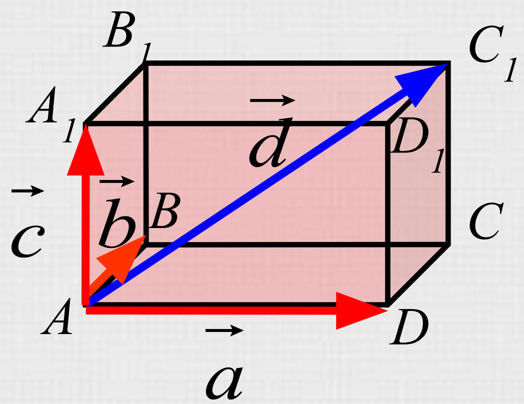
Пример



$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

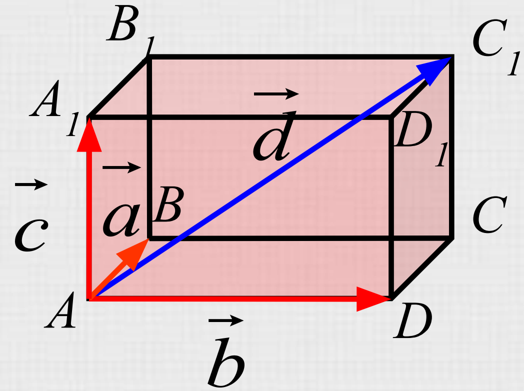
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$

Свойства



$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ *для любого параллелепипеда*

$\mathbf{d}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$ *для прямоугольного параллелепипеда*

Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным

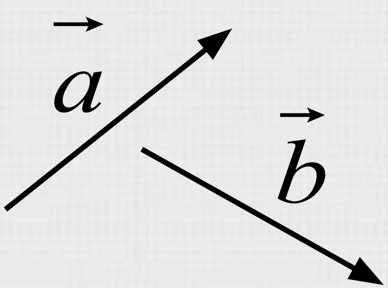
Вычитание

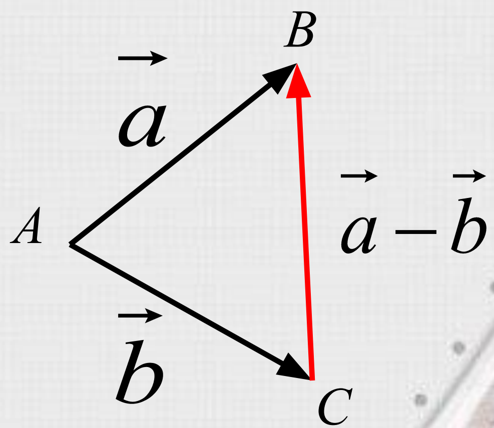
Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор, сумма которого с вектором* $\vec{b}$ *равна вектору* $\vec{a}$.

Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. *отложить от какой – нибудь точки* A *вектор* $\overrightarrow{AB}$, *равный* $\vec{a}$
2. *от этой же точки* A *отложить вектор* $\overrightarrow{AC}$, *равный* $\vec{b}$
3. *вектор* $\overrightarrow{CB}$ *называется разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

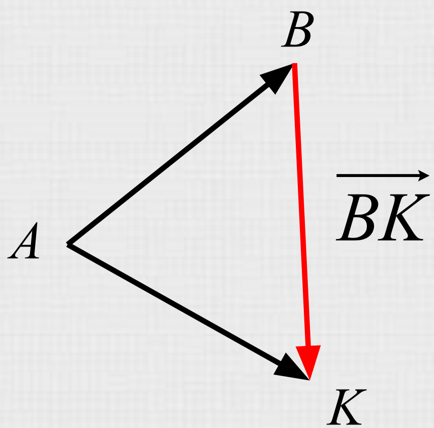




[Правило трех точек]()

Правило трех точек

Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.

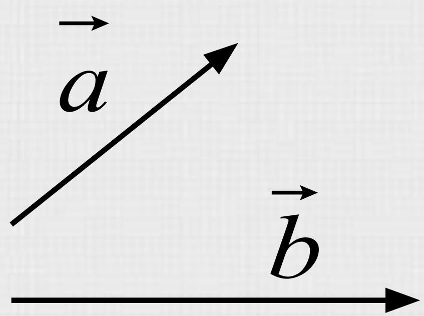


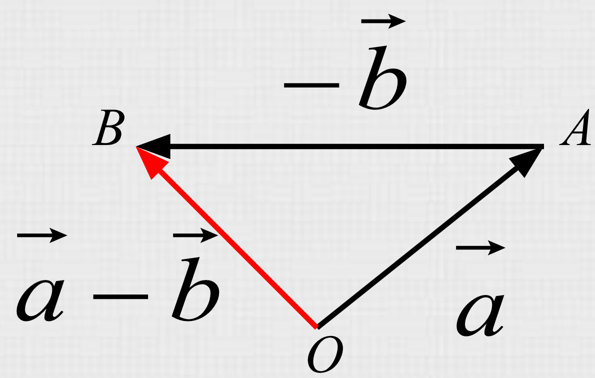
$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$

Сложение с противоположным

Разность векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *можно представить как сумму вектора* $\vec{a}$ *и вектора, противоположного вектору* $\vec{b}$ *.*

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$





Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ *на число* k *называется такой вектор* $\vec{b}$, *длина которого равна* $|k| \cdot |\vec{a}|$, *при чем векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены при* $k \geq 0$ *и противоположно направлены при* $k < 0$.

Свойства

- *Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.*

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- *Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.*

$$\vec{n} \cdot 0 = \vec{0}$$

Свойства

Для любых векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и любых чисел* k, l *справедливы равенства :*

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ *сочетательный закон*

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ 1 – *ый распределительный закон*

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ 2 – *ой распределительный закон*

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения

Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Доказательство

Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство:

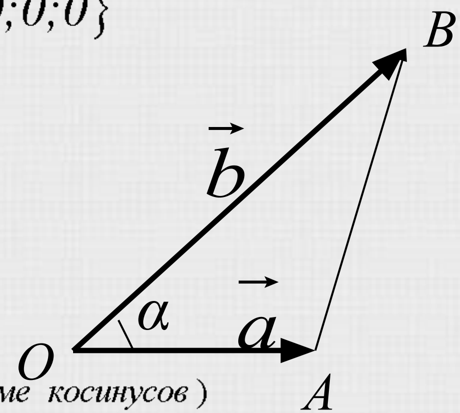
I. при $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, равенство

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ справедливо, т.к. $\vec{0}\{0;0;0\}$

II. при $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O – произвольная точка

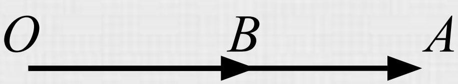
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

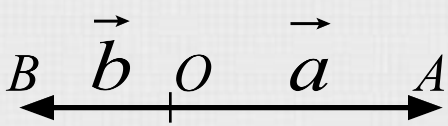


если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$ (по теореме косинусов)

это равенство верно и в том случае когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны





$\cos\alpha = 1, AB^2 = (OA - OB)^2 =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$

$\cos\alpha = -1, AB^2 = (OA + OB)^2 =$

$= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$

Доказательство формулы скалярного произведения

$Так\ как\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ то$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$-(z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$-x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ *и* $\vec{\boldsymbol{c}}$ *и любого числа* $\boldsymbol{k}$ *справедливы равенства :*

$1^0.$ $\vec{a} \geq 0$ *причем* $\vec{a}^{\,2} > 0$ *при* $\vec{a} \neq 0$

$2^0.$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ ***(переместительный закон)***

$3^0.$ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ ***(распределительный закон)***

$4^0.$ $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ ***(сочетательный закон)***

Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам

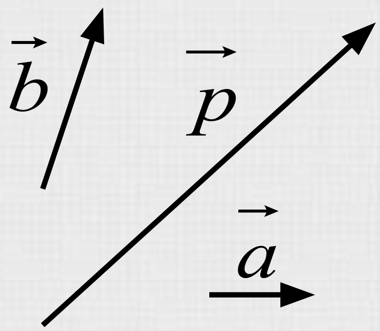
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Доказательство теоремы



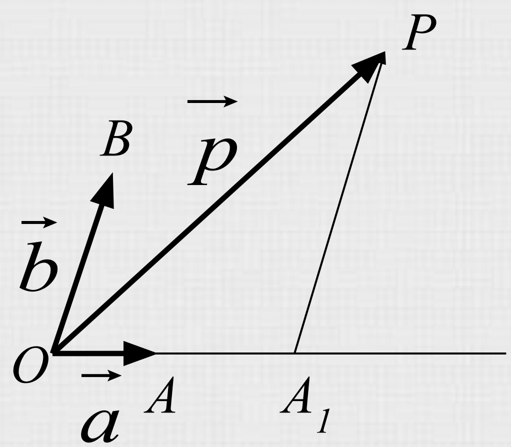
Дано :

$\vec{a}, \vec{b}$ – *неколлинеарные векторы*

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :



1)*Пусть* $\vec{p}$ *коллинеарен* $\vec{b}$.

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, *где y – некоторое число.*

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е. $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Доказательство теоремы

2) $\vec{p}$ *не коллинеарен ни вектору* $\vec{a}$ *, ни вектору* $\vec{b}$.

Отметим О – произвольную точку.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$PA_1 \parallel BO$ $PA_1 \cap OA = A_1$

$\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$ *(пп правилу треугольника)*

но : $\overrightarrow{OA_1}$ *и* $\overrightarrow{A_1P}$ *коллинеарны* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *соответственно,*

значит $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = y\vec{b}$,

следовательно $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.е.* $\vec{p}$ *разложен по* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

ч.т.д.

Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$

Тогда: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ -

$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$

$x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,$

если бы $x - x_1 \neq 0$ *то* $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$

а значит $\vec{a}$, *и* $\vec{b}$ *коллинеарны, что противоречит условию теоремы*

значит $x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,$ *откуда*

$x = x_1$ *и* $y = y_1$.

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если вектор **p** *представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где ***x, y, z*** *– некоторые числа, то говорят, что вектор* $\vec{\mathbf{p}}$ *разложен по векторам* $\vec{\mathbf{a}}$ *,* $\vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$ *.*

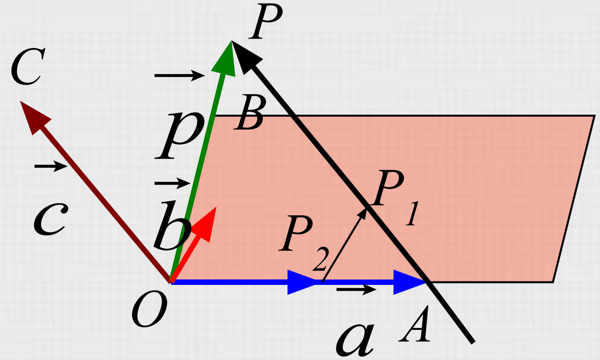
Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

<u>Теорема</u>

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Доказательство теоремы



Дано:

$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ – некомпланрные векторы

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

$\overrightarrow{OP_2}$, и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{OC}$ – коллинеарны

$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ч.т.д.

Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$

Тогда: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ -

$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$

$x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,\ z - z_1 = 0$

если бы $z - z_1 \neq 0$ *то* $\vec{c} = -\dfrac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \dfrac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$

а значит $\vec{a}, \vec{b},$ *и* $\vec{c}$ *компланарны, что противоречит условию теоремы*

значит $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$

Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка

Вектор, проведенный в точку отрезка

Вектор, соединяющий середины двух отрезков

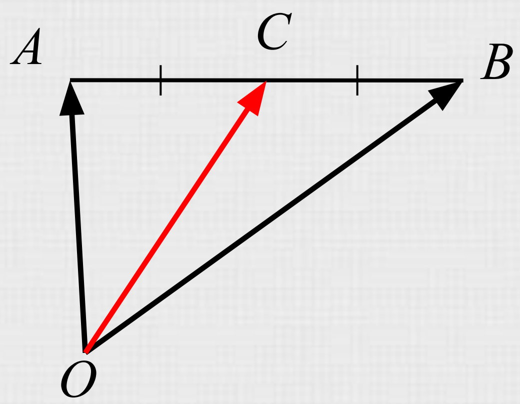
Вектор, проведенный в центроид треугольника

Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда

<u>Вектор, проведенный в середину отрезка,</u>

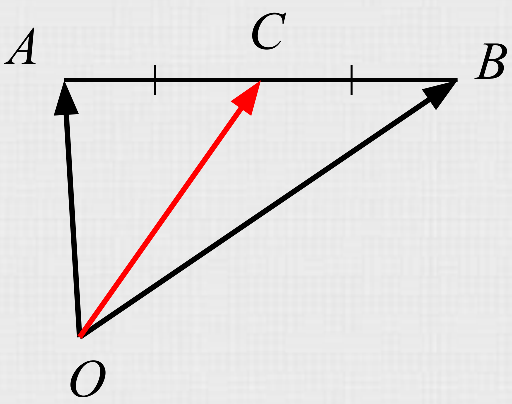
равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.



$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

<u>Доказательство</u>

Доказательство



Дано :

$AB - отрезок$

$AC = CB$

Доказать :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Доказательство :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \end{array}\right| +$$

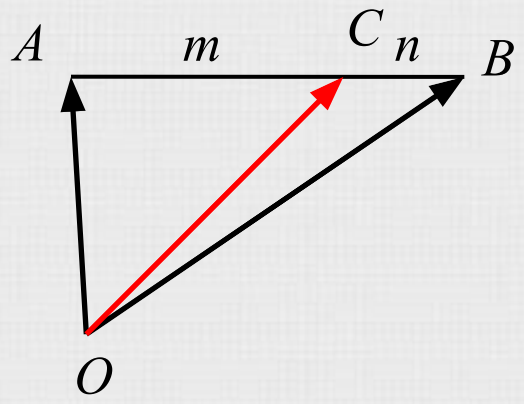
$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \underbrace{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})}_{\vec{o}}$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \Big| \div 2$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad \Big| ч.т.д.$$

Вектор, проведенный в точку отрезка

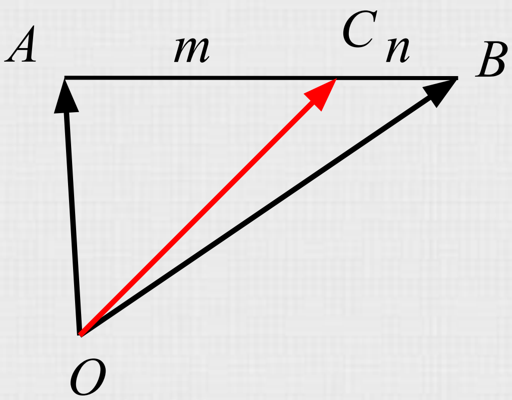
Точка ***C*** *делит отрезок* ***AB*** *в отношении* ***m : n****.*



$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$AB - \text{отрезок}$

$AC = m$

$CB = n$

Доказать :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

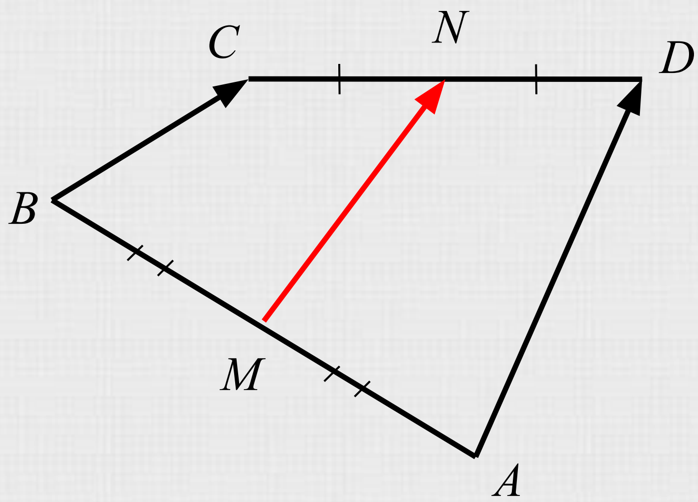
$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

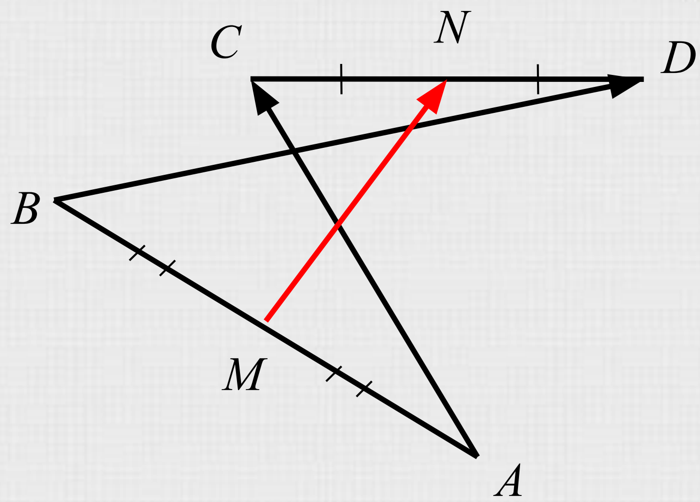
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

равен полусумме векторов, соединяющих их концы.

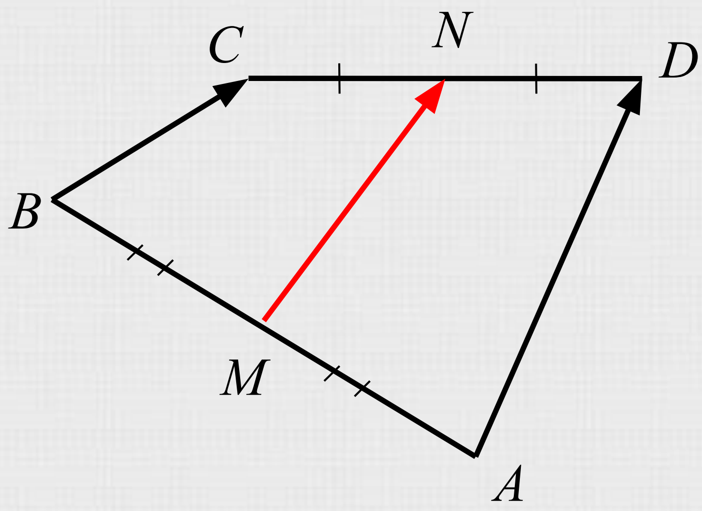




$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}\end{aligned}\right| +$$

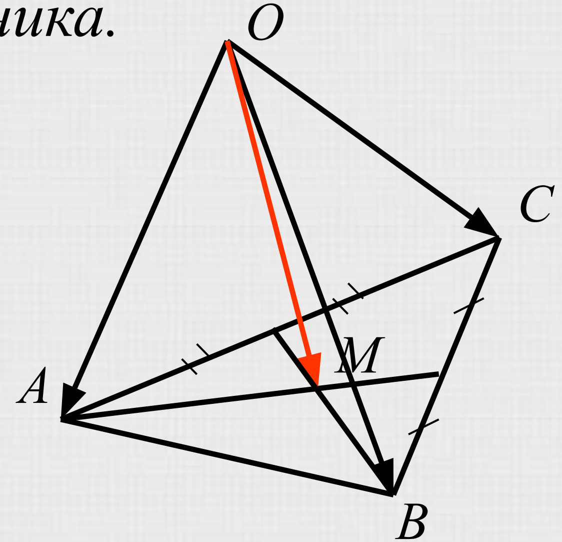
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в центроид треугольника,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

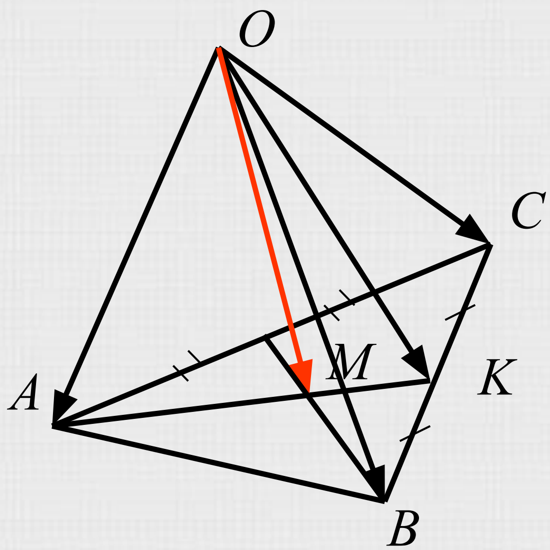
Центроид *– точка пересечения медиан треугольника.*



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

ΔABC

M – *центроид*

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство :

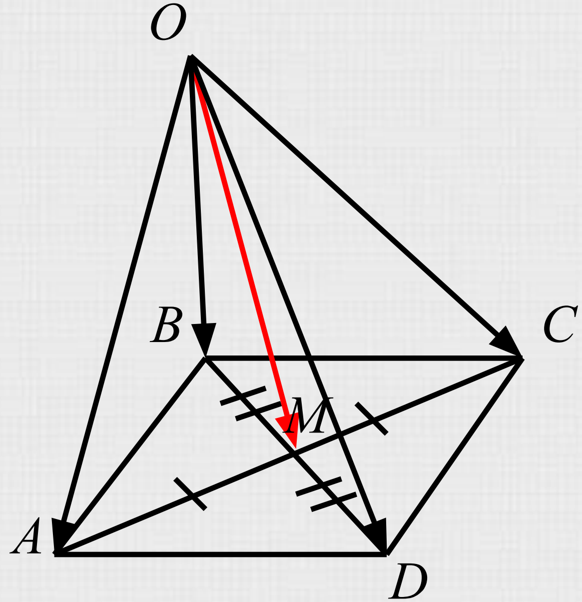
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ ч.т.д.}$$

Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

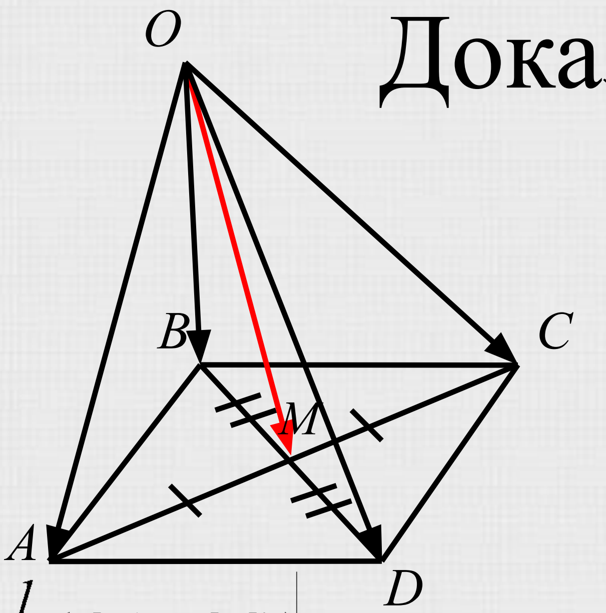
равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$ABCD - пар - м$

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\left.\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned}\right| +$$

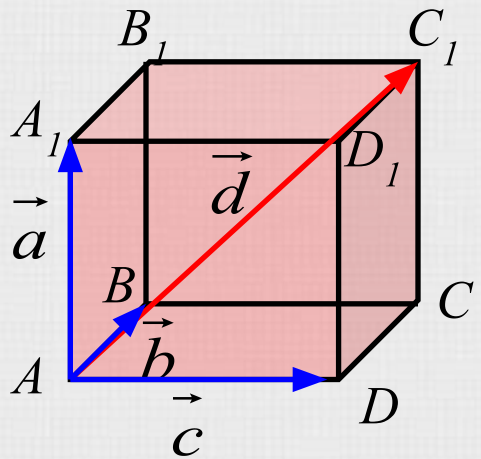
$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \div.\grave{o}.\ddot{a}.$$

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда,

равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах, исходящих из одной вершины.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство

Доказательство

Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - пар - м$

$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$

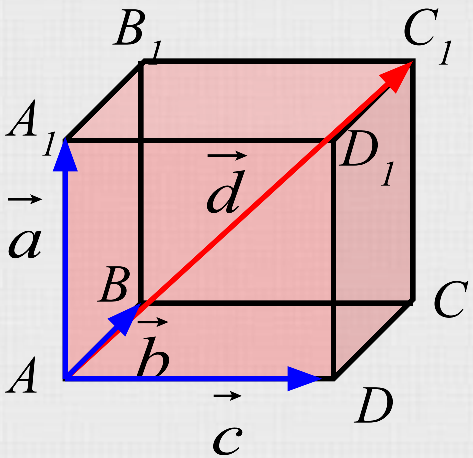
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$

Доказать :

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Доказательство :

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} =$

$= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$

$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ *ч.т.д.*

Помощь в управлении презентацией

- *управление презентацией осуществляется с помощью левой клавиши мыши*
- *переход от одного слайда к другому и на гиперссылки по одиночному щелчку*
- *завершение презентации при нажатии кнопки выход*

ереход к следующему слайду

озврат к содержанию

озврат к подтеме

озврат с гиперссылок

Проверь себя

- **Устные вопросы**
- **Задача 1.** Задача на доказательство
- **Задача 2.** Разложение векторов
- **Задача 3.** Сложение и вычитание векторов
- **Задача 4.** Скалярное произведение

Устные вопросы

Справедливо ли утверждение:

а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны?

б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены?

в) любые два равных вектора коллинеарны?

г) любые два сонаправленных вектора равны?

д) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, *то* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$?

е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *такие, что* $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$ *не коллинеарны,* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *не коллинеарны, а* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны?*

Ответы

Ответы

а) ДА

б) НЕТ (могут быть и противоположно направленными)

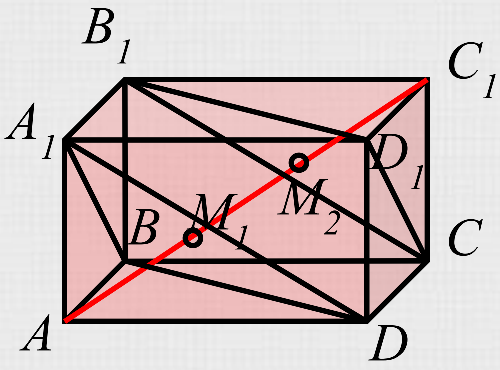
в) ДА

г) НЕТ (могут иметь разную длину)

д) ДА

е) ДА

Задача 1. Задача на доказательство



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – *пар–д*

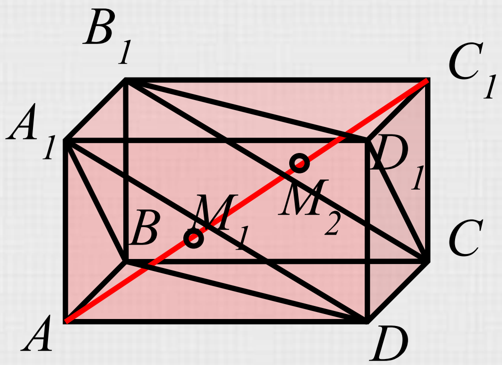
M_1, M_2 – *точки пересечения медиан* ΔA_1BD *и* ΔD_1CB_1 *соответственно*

Доказать:

$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$

Решение

Решение



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - пар - д$

$M_1, M_2 -$ *точки пересечения медиан* ΔA_1BD *и* ΔD_1CB_1 *соответственно*

Доказать :

$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$

Доказательство :

Рассм. тетраэдр AA_1BD

$M_1 -$ *центроид* ΔA_1M_1B

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ по правилу пар} - \text{да}$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

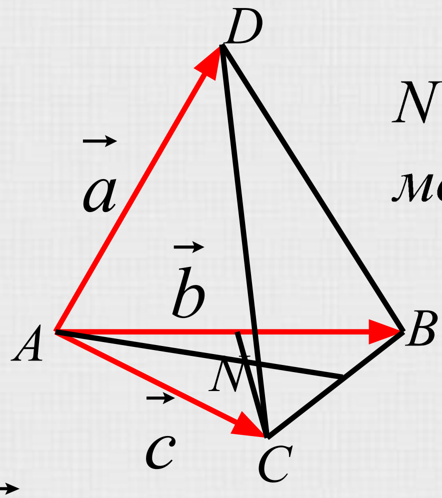
$$M \in AC_1\ AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$\text{аналогично } M_2 \in AC_1\ C_1M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$\text{следовательно } AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1 \text{ ч.т.д.}$$

Задача 2. Разложение векторов

Разложите вектор по $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$:



N – *точка пересечения медиан* ΔABC

а) $\overrightarrow{DB}$

б) $\overrightarrow{CB}$

в) $\overrightarrow{DC}$

г) $\overrightarrow{DN}$

Решение

Решение

а) $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$

б) $\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}$

в) $\overrightarrow{DC}=\vec{c}-\vec{a}$

г) $$\overrightarrow{DN}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right)=$$

$$=-\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

Задача 3. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

а) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MK}$

б) $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}$

в) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{ST}$

г) $\overrightarrow{PL}-\overrightarrow{PK}$

д) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}$

е) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}$

Решение

Решение

а) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{CK}$

б) $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{DA}$

в) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{TD}$

г) $\overrightarrow{PL}-\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{KL}$

д) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BM}=$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$

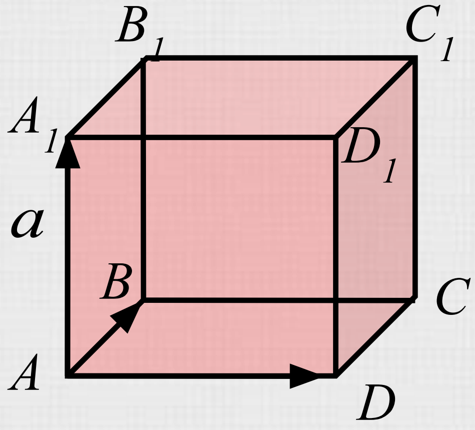
е) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}=$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EK}=$

$=\overrightarrow{AK}$

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$

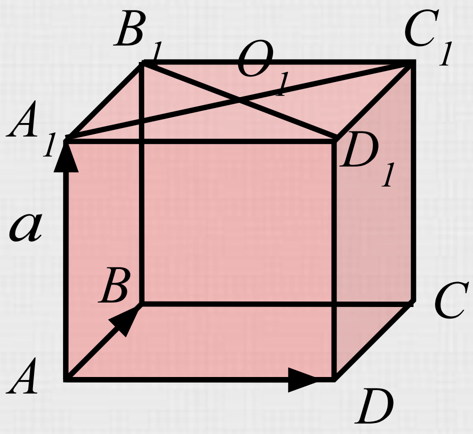
в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

Решение

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$

$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

е) $\overrightarrow{DO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$

ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

Решение

Решение

$$а)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=a^2$$

$б)AC - диагональ\ квадрата$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}=-\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{A_1C_1})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-(a\sqrt{2})^2=-2a^2$$

$в)D_1B - диагональ\ куба$

$$D_1B=\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}a(п(\ т.Пифагора\ из\ \Delta DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}a^2\cdot a\sqrt{2}\cdot cos45^\circ=a^3\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^3\sqrt{3}$$

$г)BA_1, BC_1 - диагонали\ квадратов$

$\Delta A_1BC_1 - равносторонний, \angle A_1BC_1=60^\circ$

$$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

Решение

$д) A_1O_1$ – половина диагонали квадрата

A_1C_1 – диагональ квадрата

$\angle O_1A_1C_1 = 0°$

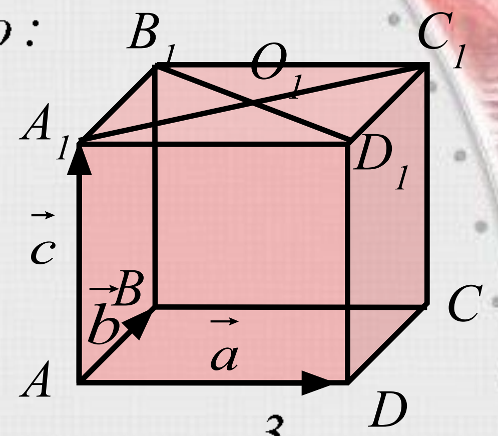
$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0° = a^2$$

$е) D_1O_1, B_1O_1$ – половины диагонали квадрата

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

Решение

ж) I способ – решение по определению:



$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1}\cdot(-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 30° = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису:

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a} - \vec{b}\right) = -\Big(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} -$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2\Big) = -\left(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2\right) = -\frac{3}{2}a^2$$