

# **Проектная работа « Интересные свойства трапеции »**

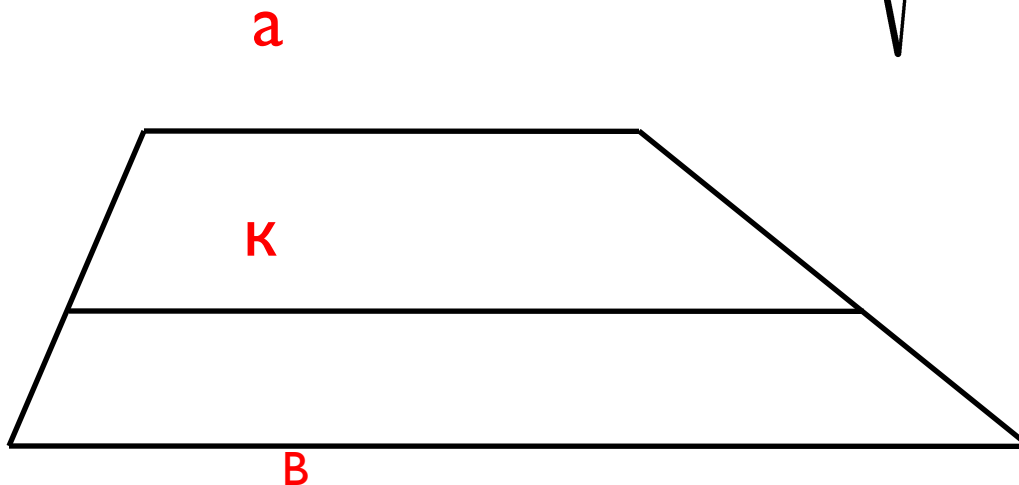
## Цель работы:

- Рассмотреть свойства трапеции, которые в школьном курсе геометрии не изучаются, но при решении геометрических задач ЕГЭ из развернутой части С 4 бывает необходимо знать и уметь применять именно эти свойства .

# Свойства трапеции:

- Если трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, равным **а** и **в**, на две равновеликие трапеции. Тогда отрезок **к** этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен

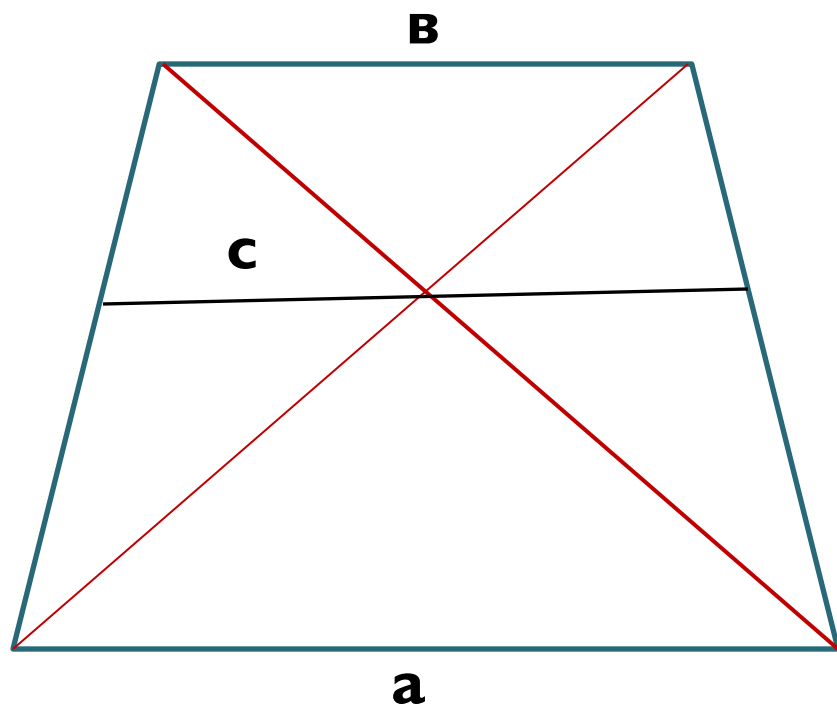
$$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



## Свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции.

- Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей равен:

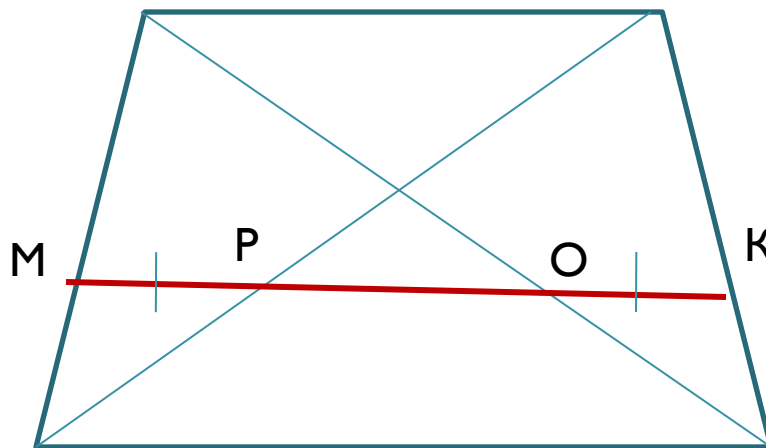
$$c = \frac{2av}{a + v}$$



# Свойства трапеции:

- Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

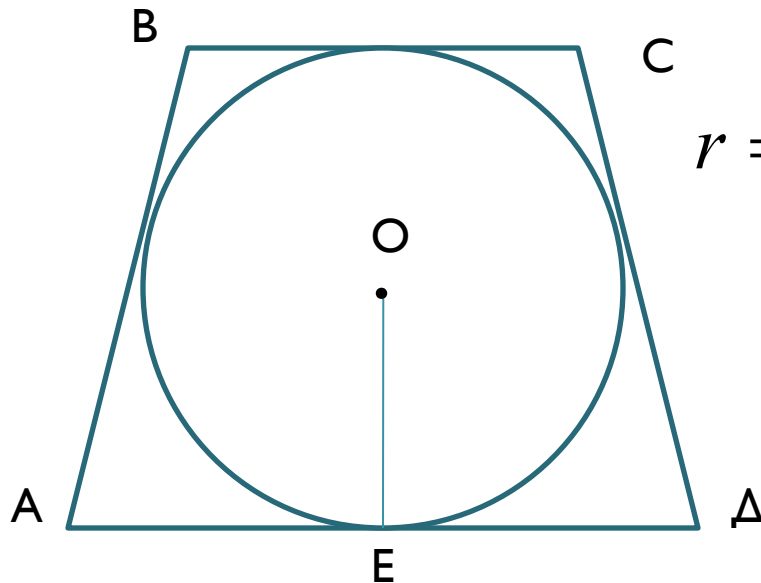
$$MP=OK$$



# Свойства равнобедренной

## трапеции:

- Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

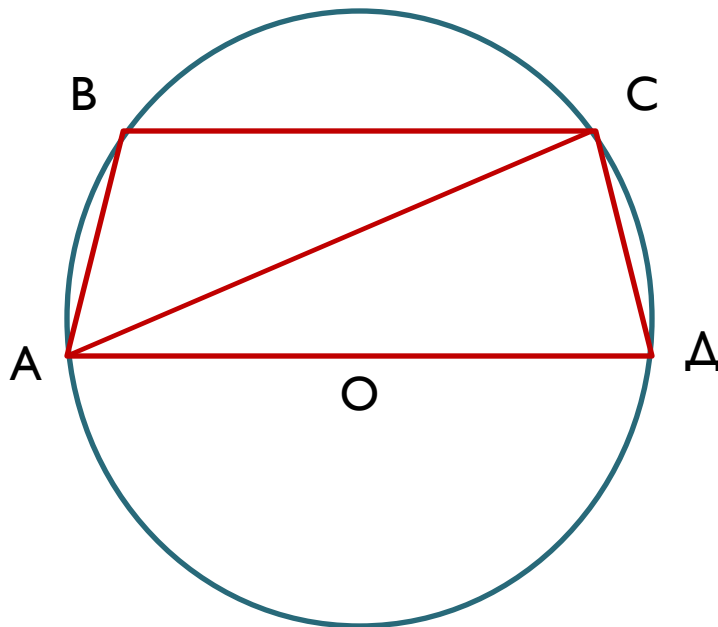


$$r = OE = \sqrt{AE \cdot ED}$$

# Свойства равнобедренной трапеции:

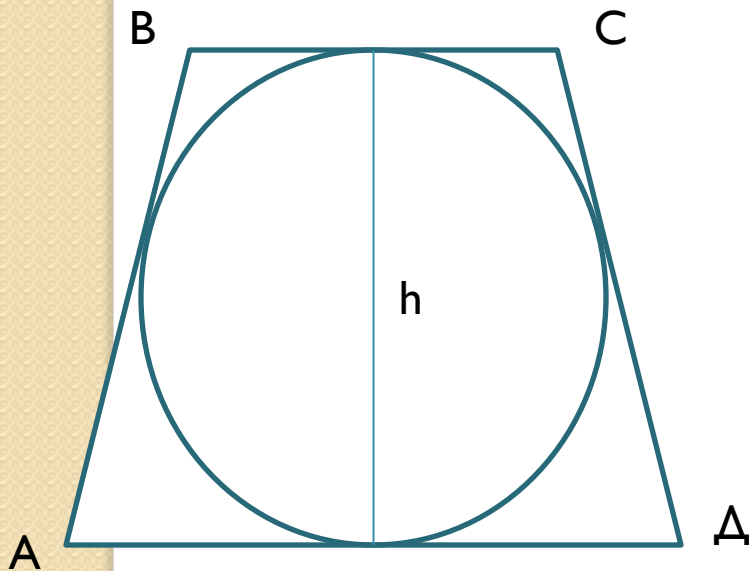
- Если центр описанной окружности лежит на основании трапеции, то её диагональ перпендикулярна боковой стороне

$$AC \perp CD$$



# Свойства равнобедренной трапеции:

- В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна её средней линии.



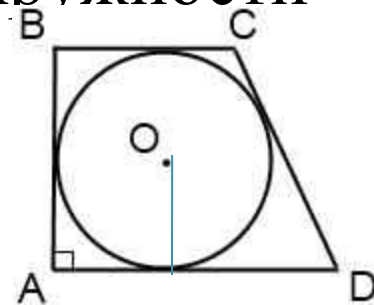
$$AB = \frac{BC + AD}{2} ; h = 2r$$



**1) Если в условии задачи сказано, что в прямоугольную трапецию вписана окружность, можно использовать следующие свойства:**

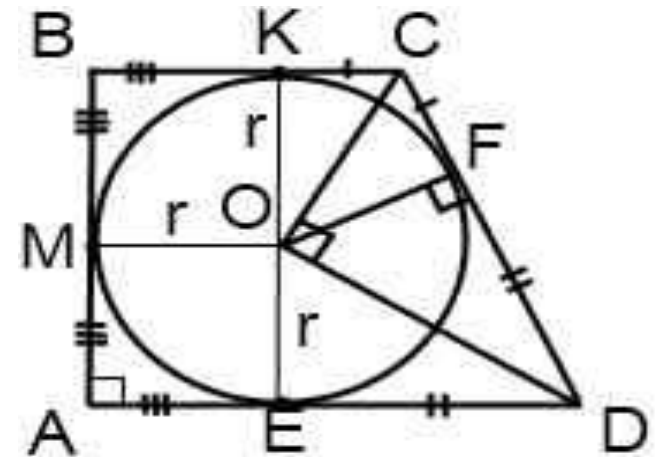
- 1. Сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.
- 2. Расстояния от вершины трапеции до точек касания вписанной окружности равны.
- 3. Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.
- 4. Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис углов трапеции.
- 5. Если точка касания делит боковую сторону на отрезки  $m$  и  $n$ , то радиус вписанной окружности равен

$$r = \sqrt{mn}$$



# Свойства прямоугольной трапеции, в которую вписана окружность:

- 1) Четырехугольник, образованный центром вписанной окружности, точками касания и вершиной трапеции — квадрат, сторона которого равна радиусу. (АМОЕ и ВКОМ — квадраты со стороной  $r$ ).

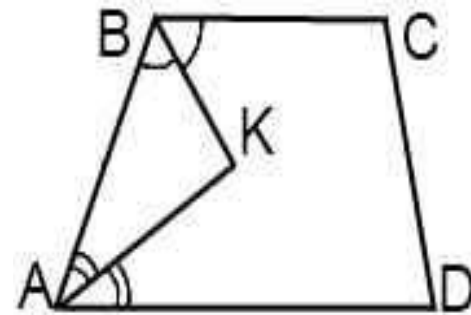


- 2) Если в прямоугольную трапецию вписана окружность, то площадь трапеции равна произведению ее оснований:  $S = AD * BC$



# I. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом $90^\circ$ .

- 1)  $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$  (как внутренние односторонние при  $AD \parallel BC$  и секущей  $AB$ ).
- 2)  $\angle ABK + \angle KAB = (\angle ABC + \angle BAD) : 2 = 90^\circ$  (так как биссектрисы делят углы пополам).
- 3) Так как сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , в треугольнике  $ABK$  имеем:  $\angle ABK + \angle KAB + \angle АКВ = 180^\circ$ , отсюда  $\angle АКВ = 180 - 90 = 90^\circ$ .
- Вывод: *Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом.*
- Это утверждение применяется при решении задач на трапецию, в которую вписана окружность.



**II. Точка пересечения биссектрис трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на средней линии трапеции.**

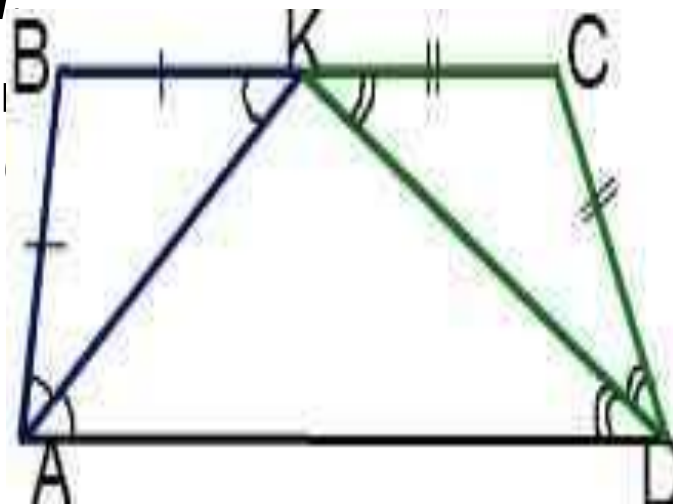
- Пусть биссектриса угла  $ABC$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $S$ . Тогда треугольник  $ABS$  — равнобедренный с основанием  $BS$
- Значит, его биссектриса  $AK$  является также медианой, то есть точка  $K$  — середина  $BS$ .
- Если  $M$  и  $N$  — середины боковых сторон трапеции, то  $MN$  — средняя линия трапеции и  $MN \parallel AD$ .
- Так как  $M$  и  $K$  — середины  $AB$  и  $BS$ , то  $MK$  — средняя линия треугольника  $ABS$  и  $MK \parallel AS$ .
- Поскольку через точку  $M$  можно провести лишь одну прямую, параллельную данной, точка  $K$  лежит на средней линии трапеции.

### III. Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники  $ABK$  и  $DCK$  — равнобедренные с основаниями  $AK$  и  $DK$  соответственно.
- Таким образом,  $BC = BK + KC = AB + CD$ .

Вывод:

- **Если биссектрисы острых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей меньшему основанию, то меньшее основание равно сумме боковых сторон трапеции**
- У равнобедренной трапеции основание в два раза больше

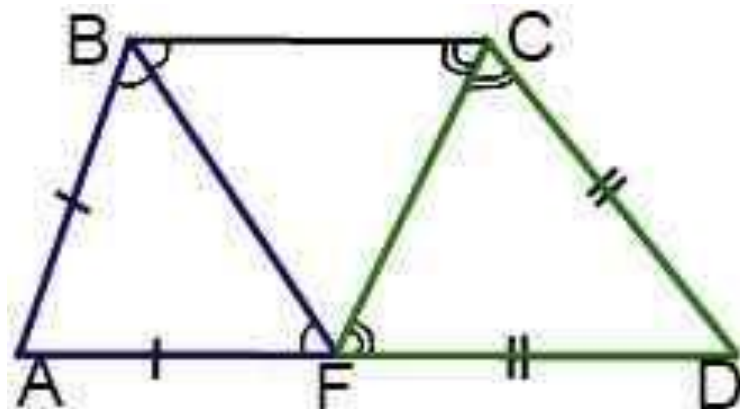


#### IV. Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники  $ABF$  и  $DCF$  — равнобедренные с основаниями  $BF$  и  $CF$  соответственно.
- Отсюда  $AD = AF + FD = AB + CD$ .

Вывод:

- Если биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей большему основанию, то большее основание равно сумме боковых сторон трапеции.
- У равнобедренной трапеции в этом случае большее основание в два раза больше боковой стороны.



- Если равнобедренную трапецию со сторонами  $a, b, c, d$  можно вписать и около неё можно описать окружности, то площадь трапеции равна

$$S = \sqrt{abcd}$$