Проектная работа « Интересные свойства трапеции »

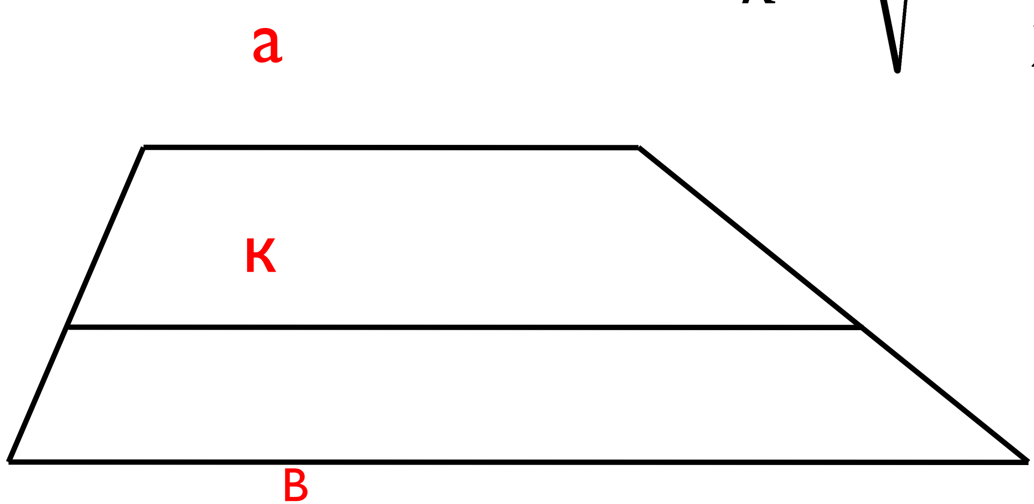
Цель работы:

- Рассмотреть свойства трапеции, которые в школьном курсе геометрии не изучаются, но при решении геометрических задач ЕГЭ из развернутой части С 4 бывает необходимо знать и уметь применять именно эти свойства .

Свойства трапеции:

- Если трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, равным а и в, на две равновеликие трапеции. Тогда отрезок к этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен

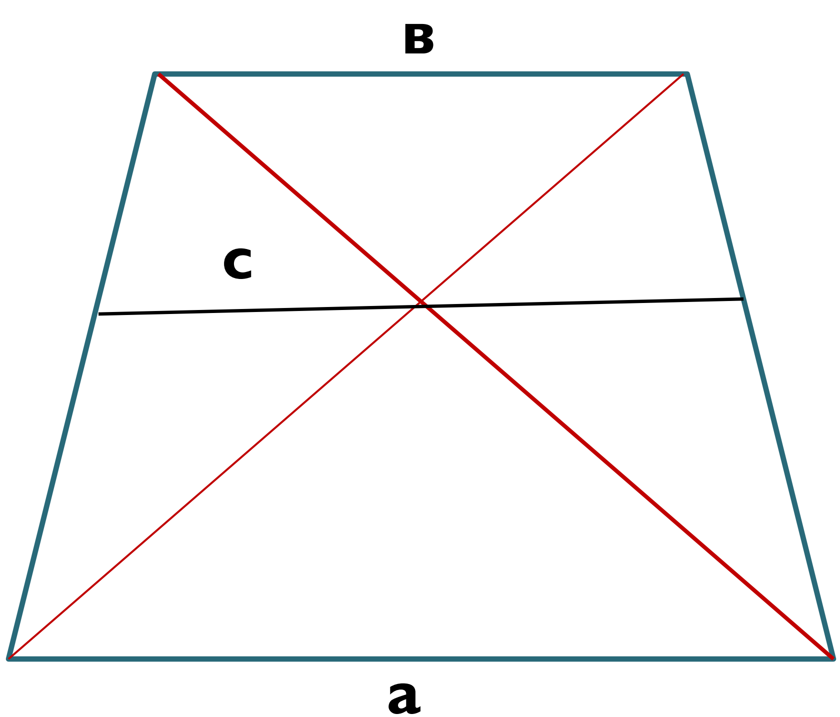
$$\kappa = \sqrt{\frac{a^2 + в^2}{2}}$$



Свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции.

- Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей равен:

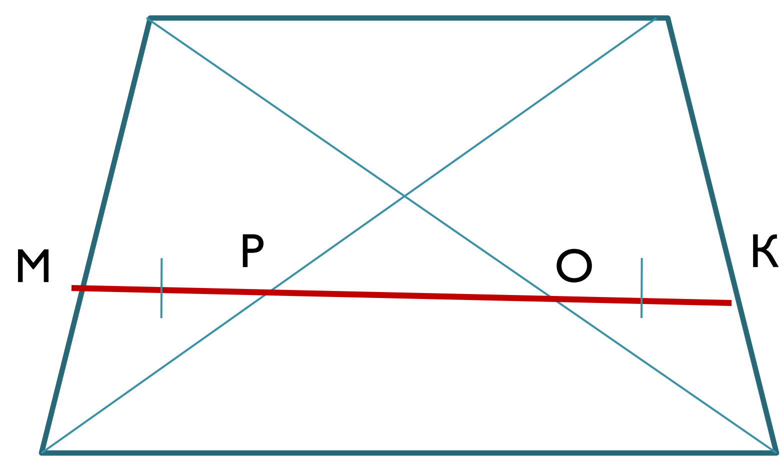
$$c = \frac{2ав}{а + в}$$



Свойства трапеции:

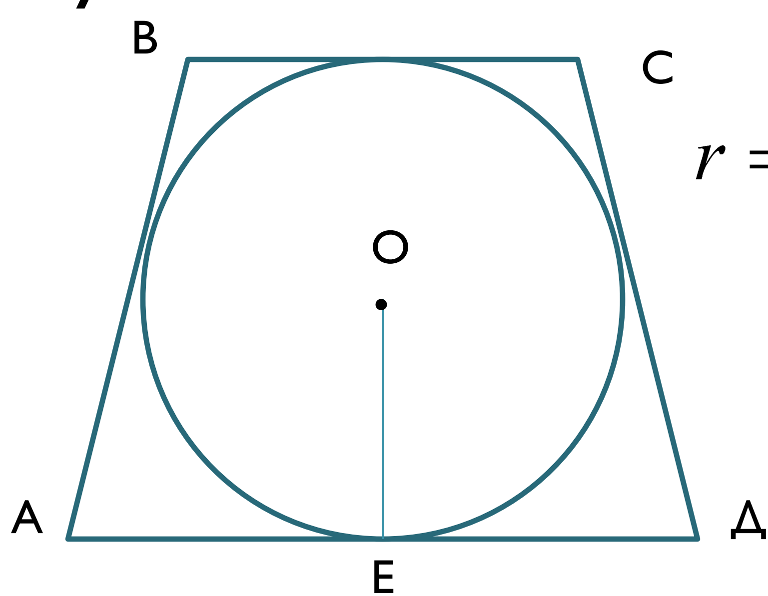
- Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

MP=OK



Свойства равнобедренной трапеции:

- Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

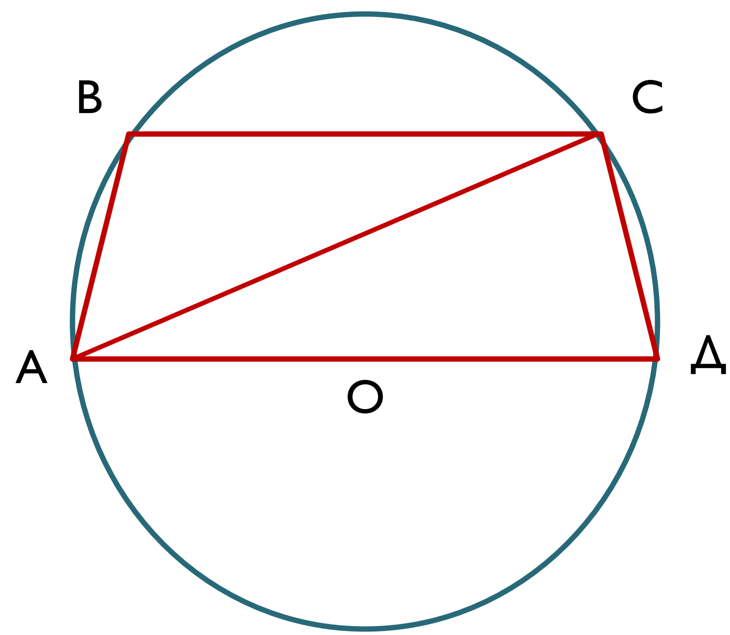


$$r = OE = \sqrt{AE \cdot EД}$$

Свойства равнобедренной трапеции:

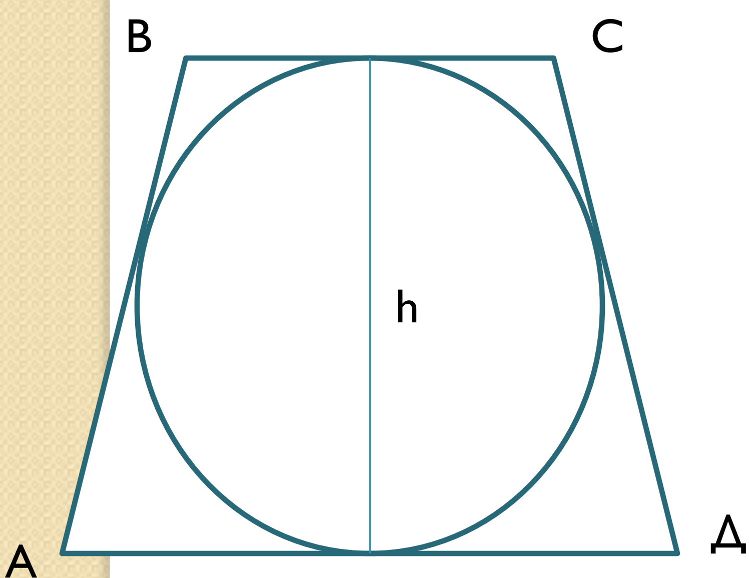
- Если центр описанной окружности лежит на основании трапеции, то её диагональ перпендикулярна боковой стороне

$$AC \perp CД$$



Свойства равнобедренной трапеции:

- В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна её средней линии.

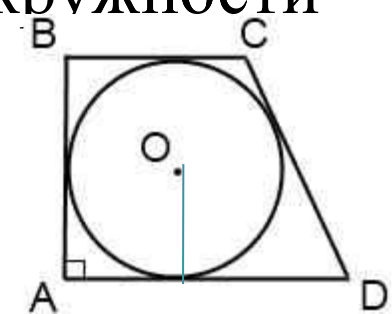


$$AB = \frac{BC + AД}{2} \quad ; h = 2r$$

1)Если в условии задачи сказано, что в прямоугольную трапецию вписана окружность, можно использовать следующие свойства:

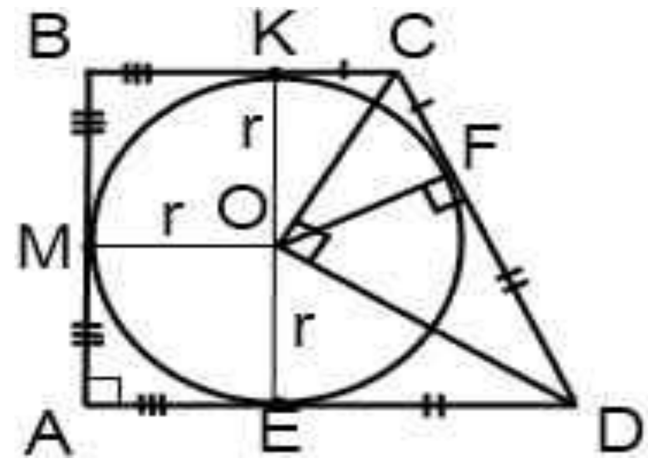
- 1. Сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.
- 2. Расстояния от вершины трапеции до точек касания вписанной окружности равны.
- 3. Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.
- 4. Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис углов трапеции.
- 5. Если точка касания делит боковую сторону на отрезки m и n, то радиус вписанной окружности равен

$$r = \sqrt{mn}$$



Свойства прямоугольной трапеции, в которую вписана окружность:

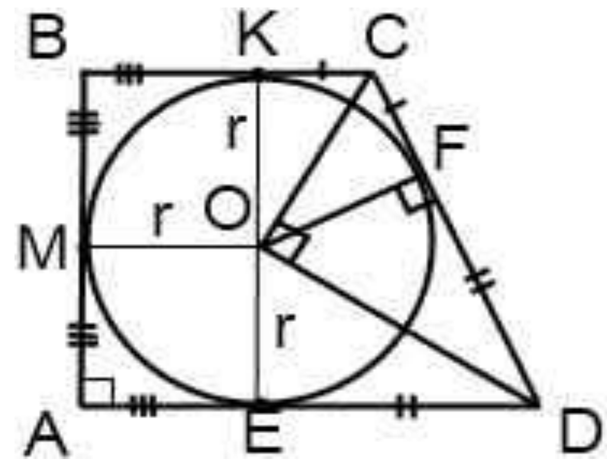
- 1) Четырехугольник, образованный центром вписанной окружности, точками касания и вершиной трапеции — квадрат, сторона которого равна радиусу. (AMOE и BKOM — квадраты со стороной r).



- 2) Если в прямоугольную трапецию вписана окружность, то площадь трапеции равна произведению ее оснований: S=AD*BC

Доказательство :

- Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту: $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB$
- Обозначим CF=m, FD=n. Поскольку расстояния от вершин до точек касания равны, высота трапеции равна двум радиусам вписанной окружности, а



$$r = \sqrt{mn}, \Rightarrow r^2 = mn$$

$$AD = AE + ED = r + n,$$

$$BC = DK + KC = r + m,$$

$$S = \frac{r + n + r + m}{2} \cdot 2r = (2r + m + n)r =$$

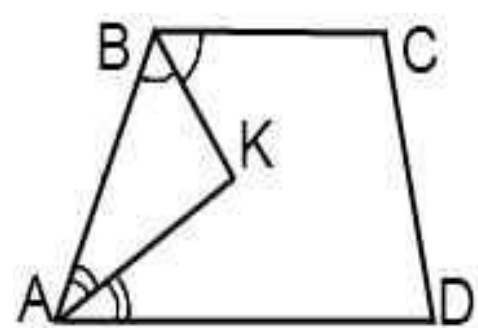
$$= 2r^2 + rm + rn = r^2 + r^2 + rm + rn =$$

$$= r^2 + mn + rm + rn = (mn + rm) + (r^2 + nr) =$$

$$m(n + r) + r(n + r) = (n + r)(m + r) = BC \cdot AD$$

I. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом 90º .

- 1)$\angle$ABC+$\angle$BAD=180º(как внутренние односторонние при AD // BC и секущей AB).
- 2) $\angle$ABK+$\angle$KAB=($\angle$ABC+$\angle$BAD):2=90º(так как биссектрисы делят углы пополам).
- 3) Так как сумма углов треугольника равна 180º, в треугольнике ABK имеем: $\angle$ABK+$\angle$KAB+$\angle$AKB=180º, отсюда $\angle$AKB=180-90=90º.
- Вывод: *Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом.*
- Это утверждение применяется при решении задач на трапецию, в которую вписана окружность.



I I .Точка пересечения биссектрис трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на средней линии трапеции.

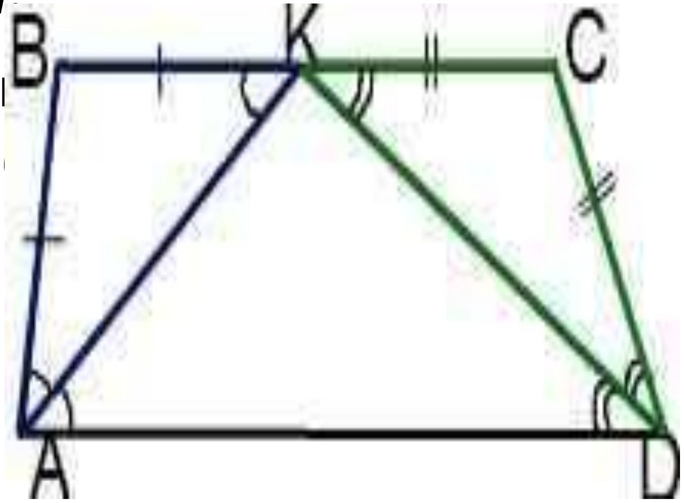
- Пусть биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке S. Тогда треугольник ABS — равнобедренный с основанием BS
- Значит, его биссектриса AK является также медианой, то есть точка K — середина BS.
- Если M и N — середины боковых сторон трапеции, то MN — средняя линия трапеции и MN // AD.
- Так как M и K — середины AB и BS, то MK — средняя линия треугольника ABS и MK // AS.
- Поскольку через точку M можно провести лишь одну прямую, параллельную данной, точка K лежит на средней линии трапеции.

III. Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники ABK и DCK — равнобедренные с основаниями AK и DK соответственно.
- Таким образом, BC=BK+KC=AB+CD.

Вывод:

- ***Если биссектрисы острых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей меньшему основанию, то меньшее основание равно сумме боковых сторон трапеции.***
- У равнобедренной трапеции і основание в два раза больше

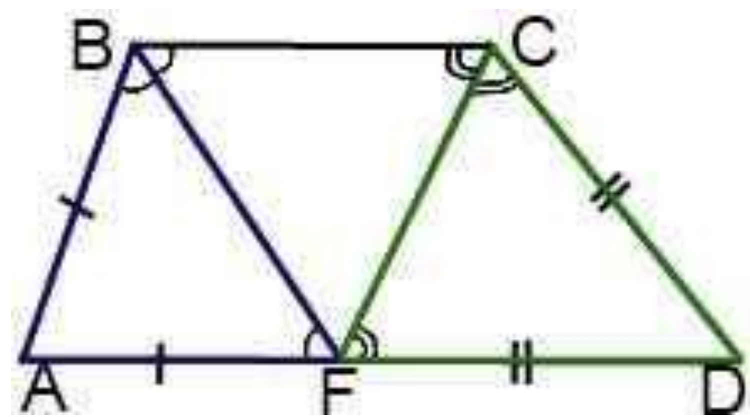


IV.Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники ABF и DCF — равнобедренные с основаниями BF и CF соответственно.
- Отсюда AD=AF+FD=AB+CD.

Вывод:

- **Если биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей большему основанию, то большее основание равно сумме боковых сторон трапеции.**
- У равнобедренной трапеции в этом случае большее основание в два раза больше боковой стороны.



- Если равнобедеренную трапецию со сторонами a,в,c,d можно вписать и около неё можно описать окружности, то площадь трапеции равна

$$S = \sqrt{abcd}$$