



Проектная работа « Интересные свойства трапеции »

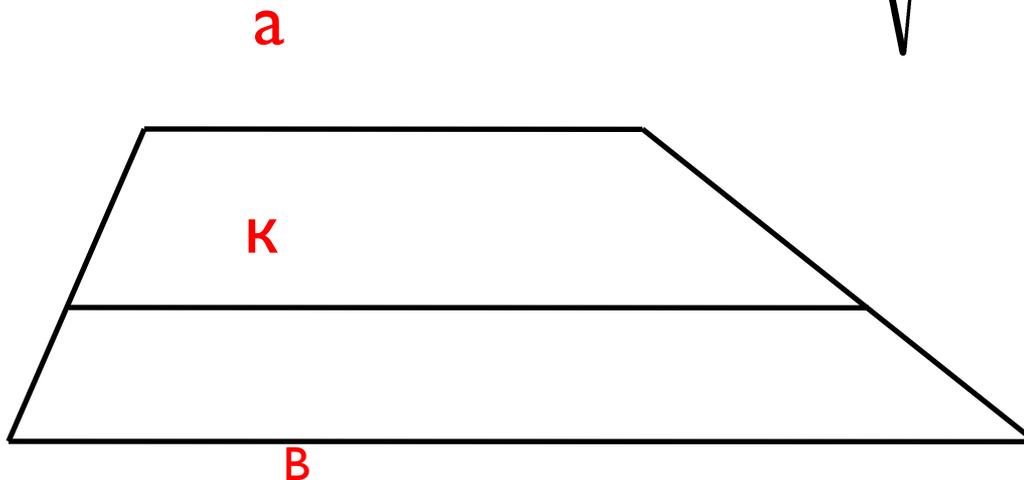
Цель работы:

- Рассмотреть свойства трапеции, которые в школьном курсе геометрии не изучаются, но при решении геометрических задач ЕГЭ из развернутой части С 4 бывает необходимо знать и уметь применять именно эти свойства .

Свойства трапеции:

- Если трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, равным **а** и **в**, на две равновеликие трапеции. Тогда отрезок **к** этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен

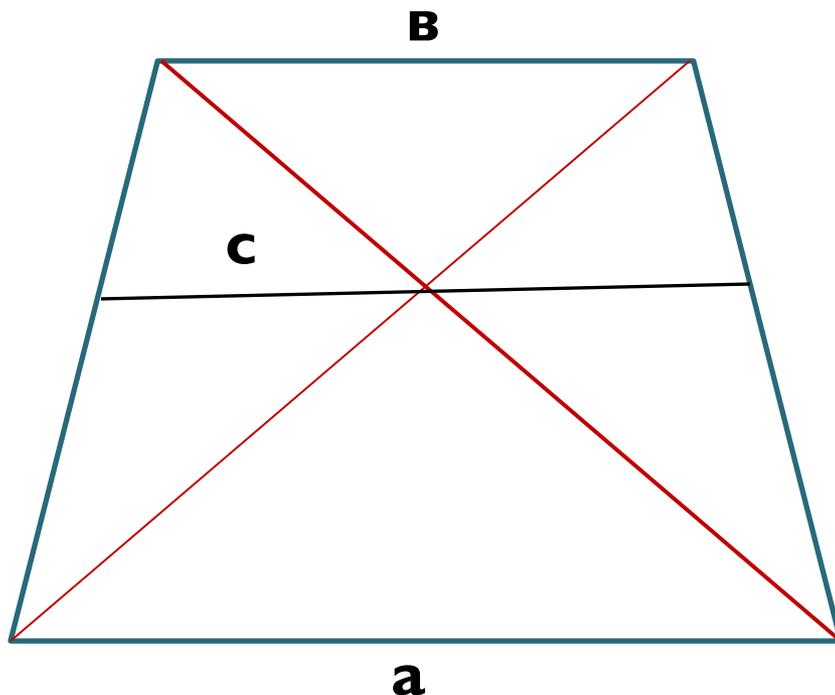
$$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



Свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции.

- Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей равен:

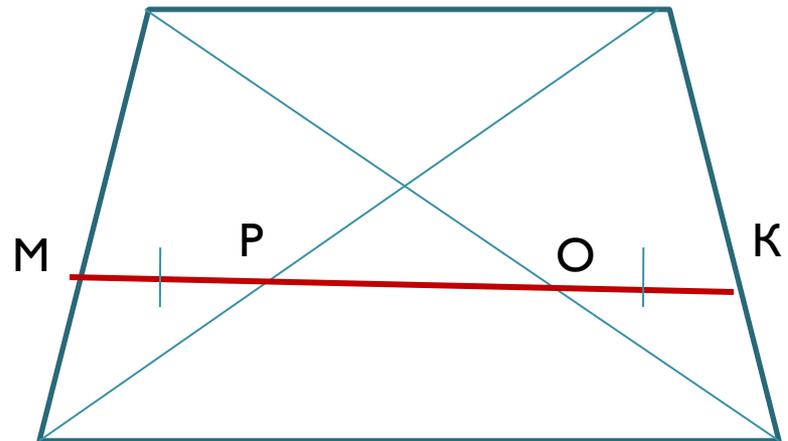
$$c = \frac{2av}{a + v}$$



Свойства трапеции:

- Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

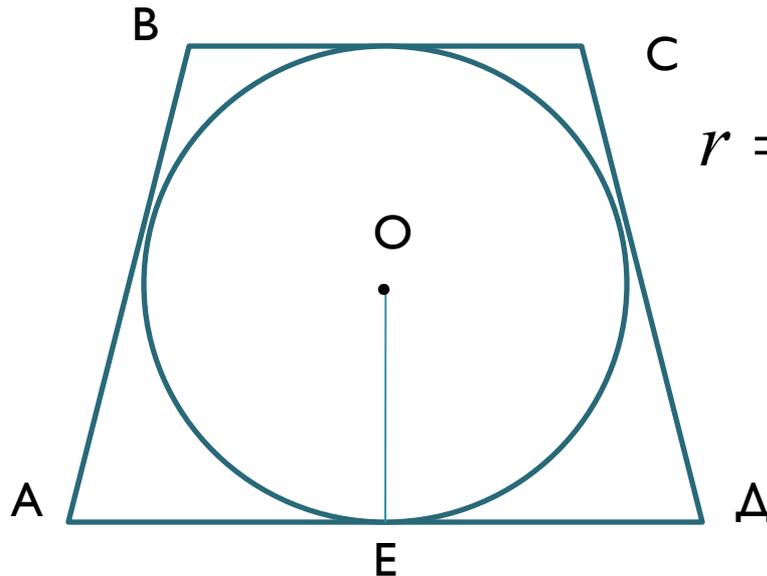
$$MP=OK$$



Свойства равнобедренной

трапеции:

- Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

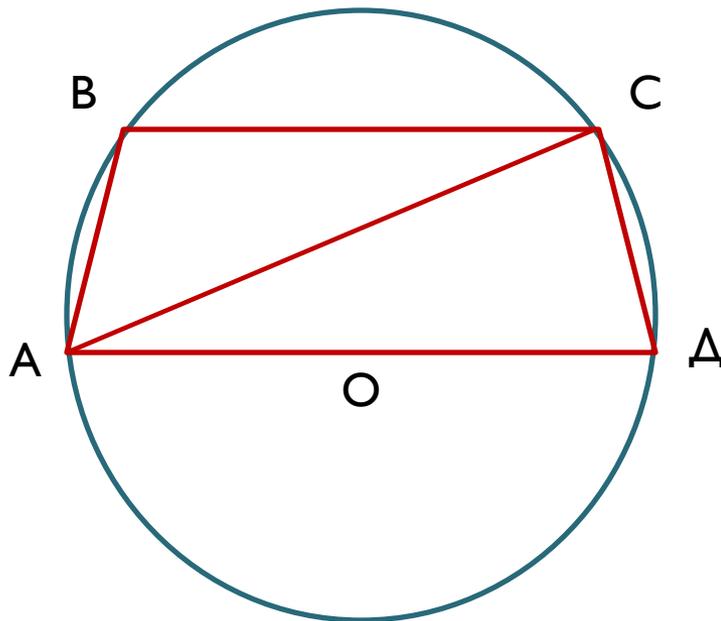


$$r = OE = \sqrt{AE \cdot ED}$$

Свойства равнобедренной трапеции:

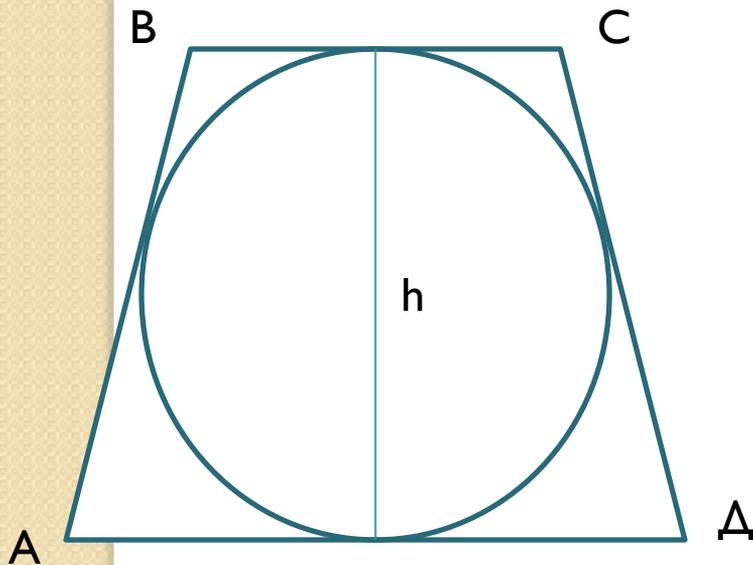
- Если центр описанной окружности лежит на основании трапеции, то её диагональ перпендикулярна боковой стороне

$$AC \perp CD$$



Свойства равнобедренной трапеции:

- В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна её средней линии.

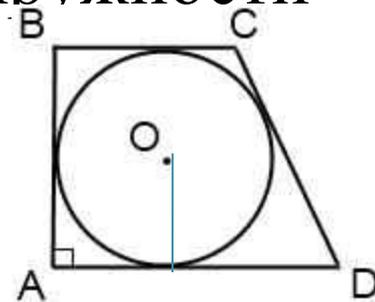


$$AB = \frac{BC + AD}{2} ; h = 2r$$

1) Если в условии задачи сказано, что в прямоугольную трапецию вписана окружность, можно использовать следующие свойства:

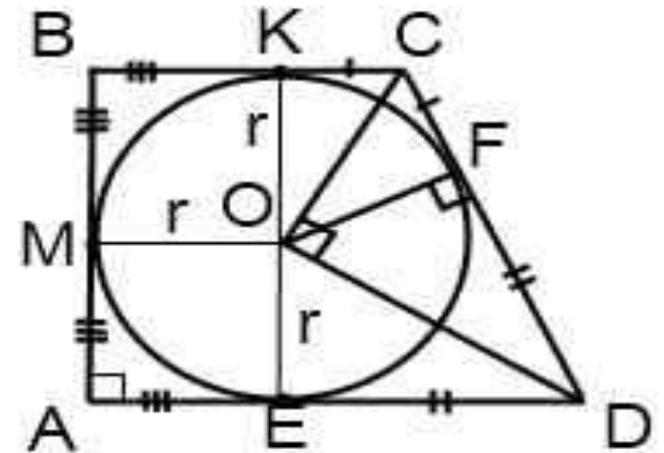
- 1. Сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.
- 2. Расстояния от вершины трапеции до точек касания вписанной окружности равны.
- 3. Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.
- 4. Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис углов трапеции.
- 5. Если точка касания делит боковую сторону на отрезки m и n , то радиус вписанной окружности равен

$$r = \sqrt{mn}$$



Свойства прямоугольной трапеции, в которую вписана окружность:

- 1) Четырехугольник, образованный центром вписанной окружности, точками касания и вершиной трапеции — квадрат, сторона которого равна радиусу. (АМОЕ и ВКОМ — квадраты со стороной r).



- 2) Если в прямоугольную трапецию вписана окружность, то площадь трапеции равна произведению ее оснований: $S=AD*BC$

Доказательство :

- Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту: $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB$
- Обозначим $CF=m$, $FD=n$. Поскольку расстояния от вершин до точек касания равны, высота трапеции равна двум радиусам вписанной окружности, а

$$r = \sqrt{mn}, \Rightarrow r^2 = mn$$

$$AD = AE + ED = r + n,$$

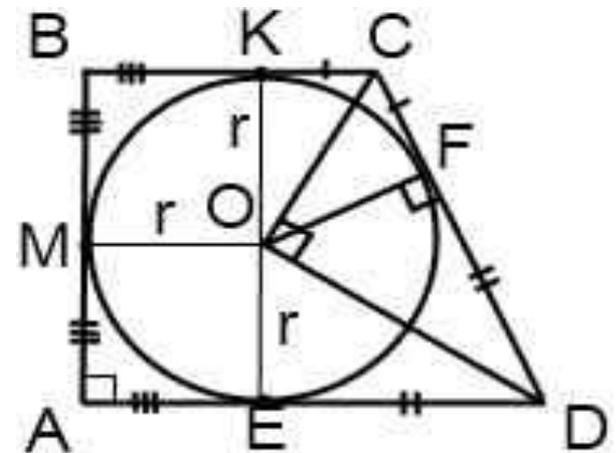
$$BC = DK + KC = r + m,$$

$$S = \frac{r + n + r + m}{2} \cdot 2r = (2r + m + n)r =$$

$$= 2r^2 + rm + rn = r^2 + r^2 + rm + rn =$$

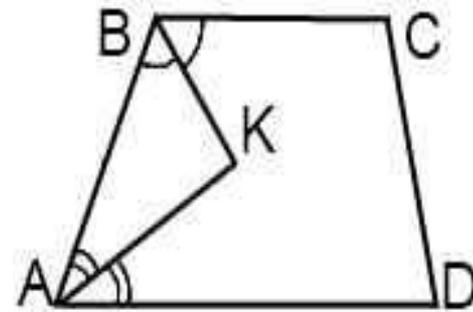
$$= r^2 + mn + rm + rn = (mn + rm) + (r^2 + nr) =$$

$$m(n + r) + r(n + r) = (n + r)(m + r) = BC \cdot AD$$



I. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом 90° .

- 1) $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей AB).
- 2) $\angle ABK + \angle KAB = (\angle ABC + \angle BAD) : 2 = 90^\circ$ (так как биссектрисы делят углы пополам).
- 3) Так как сумма углов треугольника равна 180° , в треугольнике ABK имеем: $\angle ABK + \angle KAB + \angle АКВ = 180^\circ$, отсюда $\angle АКВ = 180 - 90 = 90^\circ$.
- Вывод: *Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом.*
- Это утверждение применяется при решении задач на трапецию, в которую вписана окружность.



II. Точка пересечения биссектрис трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на средней линии трапеции.

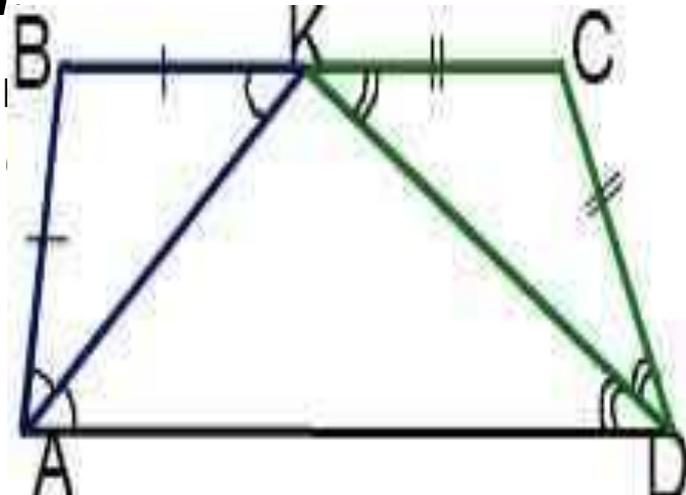
- Пусть биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке S . Тогда треугольник ABS — равнобедренный с основанием BS
- Значит, его биссектриса AK является также медианой, то есть точка K — середина BS .
- Если M и N — середины боковых сторон трапеции, то MN — средняя линия трапеции и $MN \parallel AD$.
- Так как M и K — середины AB и BS , то MK — средняя линия треугольника ABS и $MK \parallel AS$.
- Поскольку через точку M можно провести лишь одну прямую, параллельную данной, точка K лежит на средней линии трапеции.

III. Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники ABK и DCK — равнобедренные с основаниями AK и DK соответственно.
- Таким образом, $BC = BK + KC = AB + CD$.

Вывод:

- **Если биссектрисы острых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей меньшему основанию, то меньшее основание равно сумме боковых сторон трапеции**
- У равнобедренной трапеции основание в два раза больше

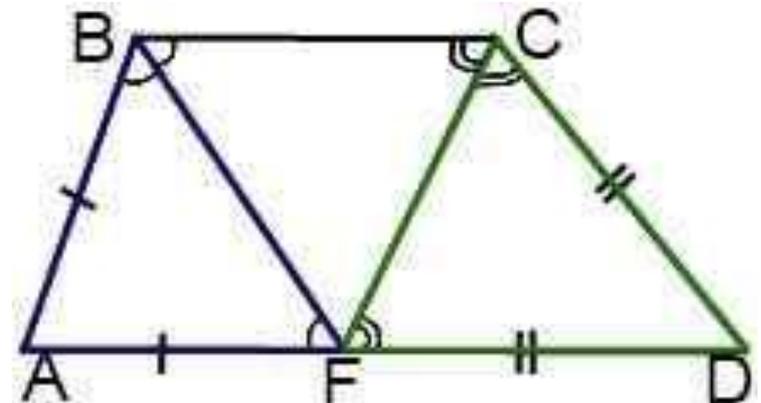


IV. Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию.

- В этом случае треугольники ABF и DCF — равнобедренные с основаниями BF и CF соответственно.
- Отсюда $AD = AF + FD = AB + CD$.

Вывод:

- Если биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей большему основанию, то большее основание равно сумме боковых сторон трапеции.
- У равнобедренной трапеции в этом случае большее основание в два раза больше боковой стороны.



- Если равнобедренную трапецию со сторонами a, b, c, d можно вписать и около неё можно описать окружности, то площадь трапеции равна

$$S = \sqrt{abcd}$$