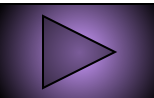


# Математика и ЭКОНОМИКА

Задачи о наибольших и наименьших  
значениях величин

Прокофьева И.Л.



# ПЛАН УРОКА.

1. Повторение. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения функции на отрезке .
2. Задача 1
3. Задача 2
4. Задача 3
5. Задача 4
6. Задача 5
7. Задача 6
8. Анализ урока
9. Домашнее задание. Задачи для самостоятельного решения.

▪



## • Задача 1

*Завод производит  $x$  единиц продукции в месяц, а суммарные издержки производства составляют:*

$$K = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800$$

*Зависимость между ценой  $p$  и количеством единиц  $x$ , которое можно продать по этой цене определяется формулой:*

$$p = 50 - \frac{1}{10}x$$

*Выявить при каких условиях прибыль будет максимальной.*



# Решение

- Обозначим через  $Z$  получаемую прибыль, которая равна разности между выручкой от продаж товара и затратами.
- Очевидно  $Z = U(x) - K(x)$   
Прибыль будет максимальной если,  $Z' = 0$  т.е.  $[U(x) - K(x)]' = 0$   
или  $U'(x) = K'(x)$
- Предприятие получает максимальную прибыль при таком объеме производства продукции, для которого предельная выручка равна предельным издержкам.
- Выручка  $U = xp = 50x - \frac{1}{10}x^2$ , а предельная выручка  $\frac{dU}{dx} = 50 - \frac{1}{5}x$
- Предельные издержки  $\frac{dK}{dx} = \frac{1}{25}x + 15$
- Прибыль будет максимальной, если  $50 - \frac{1}{5}x = \frac{1}{25}x + 15$  или  $x \approx 146$

$$Z'(100) = 35 - \frac{6}{25} \cdot 100 = 11 \neq 0$$



$$Z'(200) = 35 - \frac{6}{25} \cdot 200 = -13 < 0$$

- Производная меняет знак плюс на минус, следовательно функция достигает своего максимального значения. В данном случае – максимальной прибыли.
- При таком объеме выпускаемой продукции цена составит:

$$p = 50 - \frac{(рублей)1}{10} \cdot 146 = 35,4$$



## • Задача 2

*Требуется построить здание с общей площадью  $S$  так, чтобы затраты на наружные стены были наименьшими.*



# Решение

- Обозначим через  $x$  длину здания, тогда ширина здания будет  $\frac{S}{x}$   
Периметр здания выразится формулой

$$P = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$$

- Найдем производную этой функции и приравняем ее к нулю.

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) \quad 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) = 0 \quad x = \sqrt{S}$$

- Вторая производная  $P''(x) = \frac{4}{x^3}$  при  $x = \sqrt{S}$  больше нуля, что указывает о наличии минимума.

- Найдем этот периметр.

$$P = 2\left(\sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}}\right) = 2 \cdot 2\sqrt{S} = 4\sqrt{S}$$



---

## • Задача 3

*Определить соотношение высоты и поперечника цилиндрической консервной банки заданной вместимостью  $V$  так, чтобы на ее изготовление потребовалось минимальное количества металла.*





## Решение

- Обозначим радиус основания цилиндрической консервной банки через  $r$ .
- Зная, что объем цилиндрической банк определим высоту банки

$$V = \pi r^2 h \quad (1)$$

- Боковая поверхность банки равна произведению длины окружности основания на высоту, т.е.

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \quad (2)$$

- Тогда полная поверхность банки будет

$$\frac{V}{\pi r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2V}{r}$$

(3)

- Продифференцируем функцию (3)

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$



$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

- Приравняем производную  $S'$  к нулю,  $4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$

- Отсюда  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

- Вторая производная  $S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} \gg 0$ , что подтверждает минимальность функции  $S$ .

- Высота банки 
$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{(2\pi)^2}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

- Следовательно, чтобы на изготовление консервной банки потребовалось бы минимальное количество металла, высота ее должна равняться диаметру.

