Математика и экономика

Задачи о наибольших и наименьших значениях величин

Прокофьева И.Л.

ПЛАН УРОКА.

1. *Повторение. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения функции на отрезке .*
2. *Задача 1*
3. *Задача 2*
4. *Задача 3*
5. *Задача 4*
6. *Задача 5*
7. *Задача 6*
8. *Анализ урока*
9. *Домашнее задание. Задачи для самостоятельного решения.*

•Задача 1

Завод производит х единиц продукции в месяц, а суммарные издержки производства составляют:

$$K = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800$$

Зависимость между ценой р и количеством единиц х, которое можно продать по этой цене определяется формулой:

$$p = 50 - \frac{1}{10}x$$

Выявить при каких условиях прибыль будет максимальной.

Решение

- Обозначим через Z получаемую прибыль, которая равна разности между выручкой от продаж товара и затратами.
- Очевидно $Z = U(x) - K(x)$
  Прибыль будет максимальной если, $Z' = 0$ т.е. $\left[U(x) - K(x)\right]' = 0$
  или $U'(x) = K'(x)$
- Предприятие получает максимальную прибыль при таком объеме производства продукции, для которого предельная выручка равна предельным издержкам.
- Выручка $U = xp = 50x - \frac{1}{10}x^2$; а предельная выручка $\frac{dU}{dx} = 50 + \frac{1}{5}x$
- Предельные издержки $\frac{dK}{dx} = \frac{1}{25}x + 15$
- Прибыль будет максимальной, если $50 - \frac{1}{5}x = \frac{1}{25}x + 15$ или $x \approx 146$

$$Z'(100) = 35 - \frac{6}{25} \cdot 100 = 11 > 0$$

$$Z'(200) = 35 - \frac{6}{25} \cdot 200 = -13 < 0$$

- Производная меняет знак плюс на минус, следовательно функция достигает своего максимального значения. В данном случае – максимальной прибыли.
- При таком объеме выпускаемой продукции цена составит:

$$p = 50 - \frac{1}{10} \cdot 146 = 35{,}4 \text{ (рублей)}$$

•Задача 2

Требуется построить здание с общей площадью S так, чтобы затраты на наружные стены были наименьшими.

Решение

- Обозначим через *x* длину здания, тогда ширина здания будет S/x
  Периметр здания выразится формулой

$$P = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$$

- Найдем производную этой функции и приравняем ее к нулю.

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) \qquad 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) = 0 \qquad x = \sqrt{S}$$

- Вторая производная $P''(x) = \frac{4}{x^3}$ при $x = \sqrt{S}$ больше нуля, что указывает о наличии минимума.
- Найдем этот периметр.

$$P = 2\left(\sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}}\right) = 2 \cdot 2\sqrt{S} = 4\sqrt{S}$$

- Задача 3

Определить соотношение высоты и поперечника цилиндрической консервной банки заданной вместимостью V так, чтобы на ее изготовление потребовалось минимальное количества металла.

Решение

- Обозначим радиус основания цилиндрической консервной банки через r.

- Зная, что объем цилиндрической банк определим высоту банки

$$V = \pi r^2 h \qquad (1)$$

- Боковая поверхность банки равна произведению длины окружности основания на высоту, т.е.

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad (2)$$

- Тогда полная поверхность банки будет

$$\frac{V}{\pi r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2V}{r}$$

(3)

- Продифференцируем функцию (3)

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

- Приравняем производную S' к нулю, $4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$
- Отсюда $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
- Вторая производная $S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$, что подтверждает минимальность функции S.
- Высота банки

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{(2\pi)^2}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

- Следовательно, чтобы на изготовление консервной банки потребовалось бы минимальное количество металла, высота ее должна равняться диаметру.