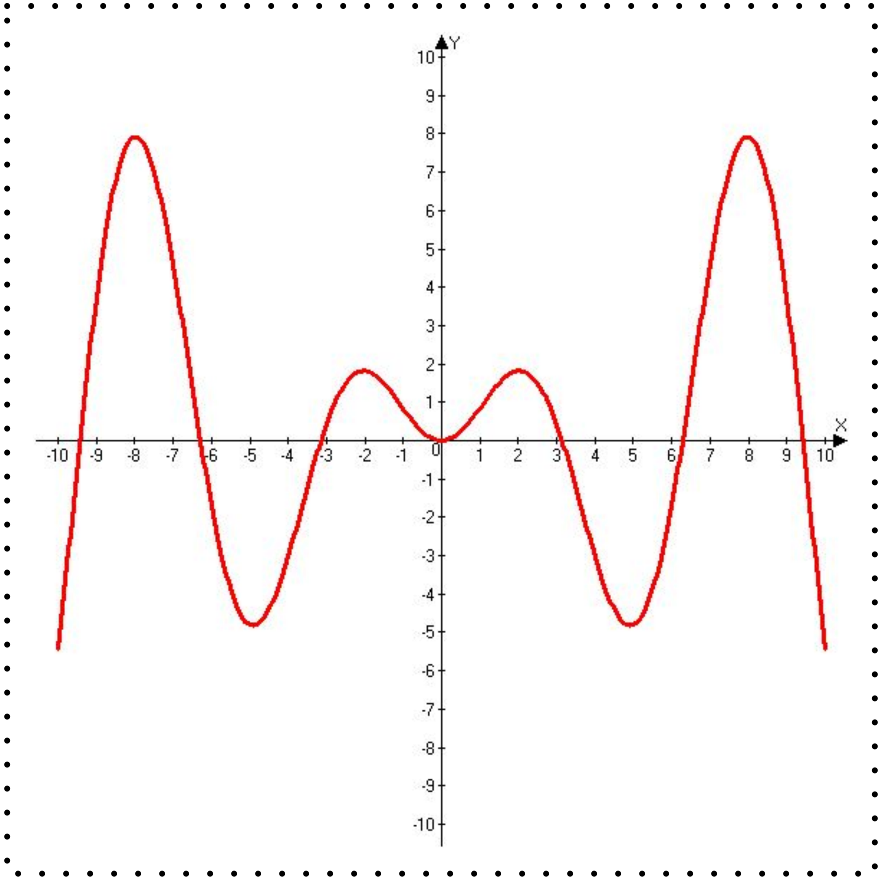
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ



Цели обучения:

10.4.1.33

исследовать свойства функции с помощью производной и строить её график

Критерии оценивания:

Учащийся достиг цели обучения, если:

- знает алгоритм исследования функции
- исследует функцию с помощью производной
- выполняет эскизы графиков, используя свойства функций

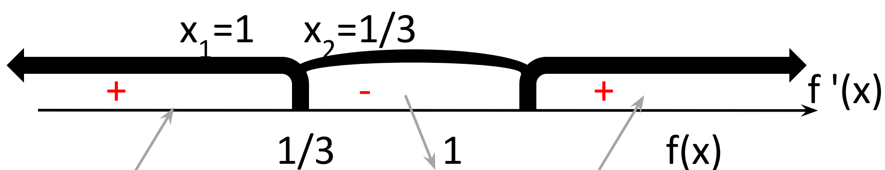
План исследования

- Найти область определения. Область значений (если возможно найти)
- Исследовать на четность и нечетность, периодичность (для тригонометрических) функцию.
- Найти точки пересечения графика с осями координат(осью Ох (х;0) и осью Оу (0;у))
- Непрерывность, асимптоты
- Найти критические точки.
- Найти промежутки монотонности (возрастания и убывания)
- Найти точки экстремума и экстремум функции(x_{max}, x_{min}, y_{max}, y_{min})
- Построить график.
- Если необходимо вычислить дополнительные точки.

Исследовать функцию и построить её график.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

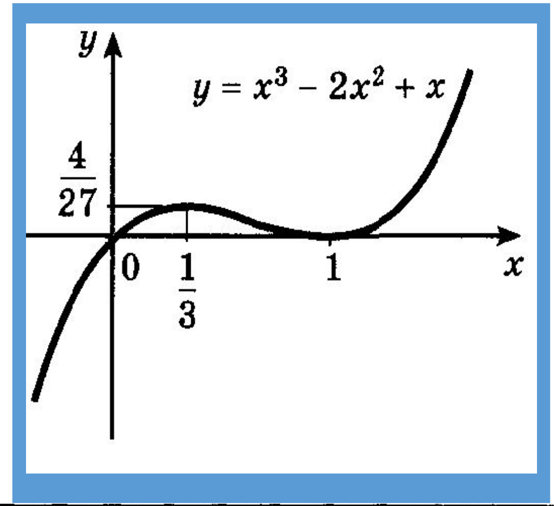
1. ООФ x – любое
2. f '(x)=(x³-2x²+x)’ =3x²-2·2x+1= 3x²-4x+1
3. f '(x)=0 3x²-4x+1=0

4. 

x=1/3 – т. max x=1 – т. min

5. $y_{max}=(1/3)^3-2\cdot(1/3)^2+1/3=4/27$

$y_{min}=1^3-2\cdot1^2+1=0$



x	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

6. Находим точки пересечения графика с осями координат:

С осью Ох y=0 => $x^3-2x^2+x=0$

$x(x^2-2x+1)=0$

x=0 x=1

С осью Оу x=0 => $y(0)=0^3-2\cdot0^2+0=0$

7. Построение графика и нахождение дополнительных координат (если это требуется)

Схема исследования функций и построение графиков

1. Найти область определения и множество значений функции.

2. Исследовать функцию на четность и периодичность.

3. Найти вертикальные асимптоты.

4.Исследовать поведение функции на бесконечности и найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.

6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7. Найти точки пересечения графика с осями координат и некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

Решение:

1 **Находим область определения функции.**

Функция определена при всех значениях x, кроме $x = \pm 1$

Следовательно, область определения функции будет объединение интервалов:

$$(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$$

2 **Исследуем функцию на четность и периодичность:**

$$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = f(x)$$

Функция является четной, следовательно ее график будет симметричен относительно оси ординат.

Функция не периодична.

3 Находим вертикальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции x =1 и x = -1.

Сначала рассмотрим точку x =1.

Если хотя бы один из пределов при $x \to 1$

слева и справа равен бесконечности, то прямая x =1 является вертикальной асимптотой.

При $x \to 1$ слева $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$

При $x \to 1$ справа $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$

Следовательно, прямая х=1 является вертикальной асимптотой.

Аналогично можно проанализировать х=-1, но так как график функции симметричен относительно оси ординат, то прямая х=-1 также будет вертикальной асимптотой.

4 Исследуем поведение функции на бесконечности и найдем горизонтальные и наклонные асимптоты.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1$$

Следовательно, y=-1 - горизонтальная асимптота.

Т.к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}=\infty$$

то наклонных асимптот нет.

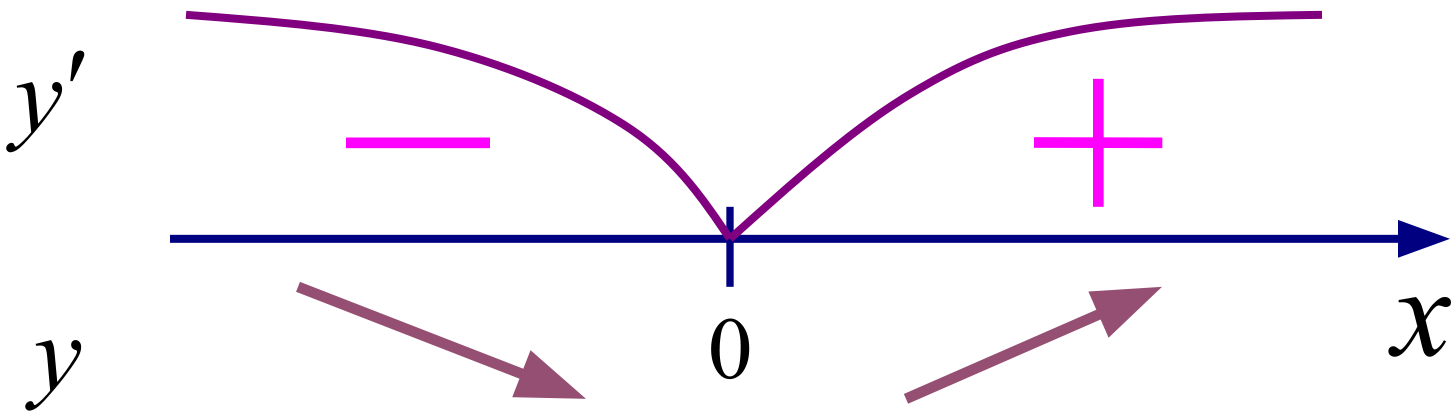
5 **Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.**

Для этого вычислим первую производную:

$$y'=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}$$

Исследуем знак производной при переходе через эту точку:



минимум

$$f_{\min}(0) = 1$$

Интервалы монотонности функции:

Функция убывает на: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$

Функция возрастает на: $(0;1)\cup(1;+\infty)$

6 **Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба.**

Для этого вычислим вторую производную:

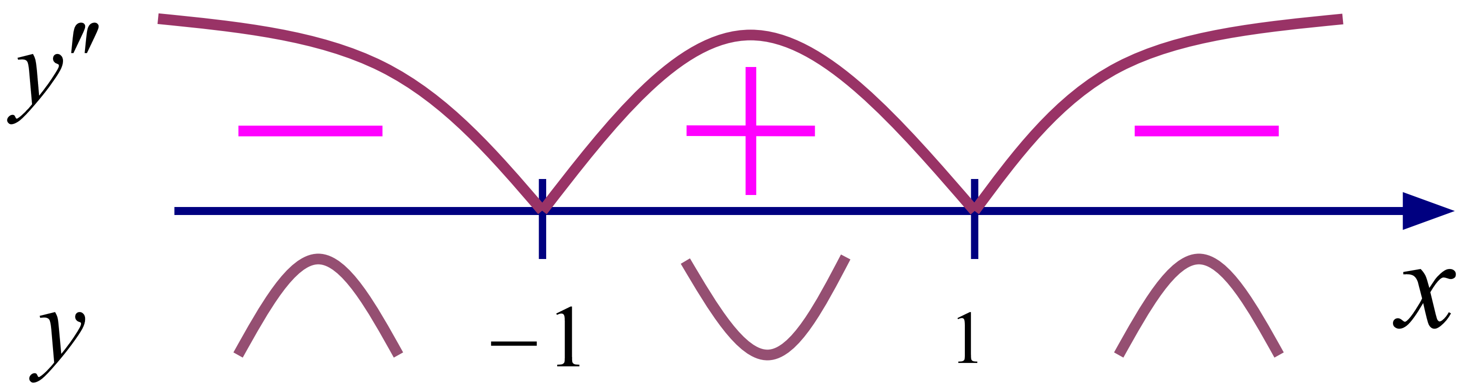
$$y''=\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{(4x)'\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot\left((1-x^2)^2\right)'}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3}=$$

$$= \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Точек, в которых вторая производная обращается в ноль, нет. Поэтому точек перегиба у графика нет.

Числитель всегда положителен, поэтому знак второй производной будет определяться знаменателем.



Интервалы выпуклости функции:

Функция выпукла вниз на: $(-1\,;1)$

Функция выпукла вверх на: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

7 **Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:**

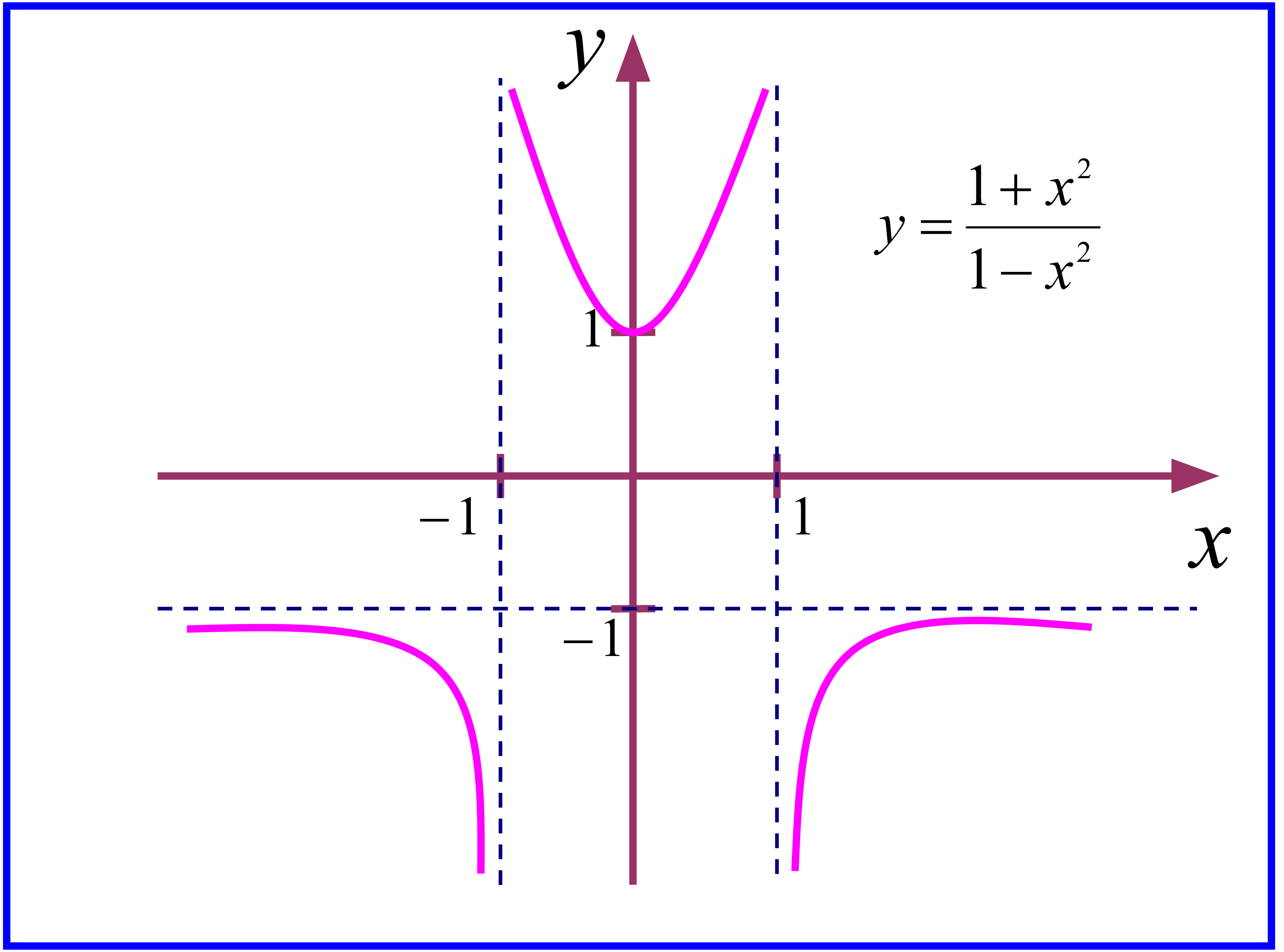
При $x=0$

$$y=\frac{1+0}{1-0}=1$$

(0,1) - точка пересечения с осью ординат.

Точек пересечения с осью абсцисс нет.

8 **Строим график функции:**



y
x
1
-1
1
-1
$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$