

# Модуль 4. РЕГУЛЯРНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

## Лекция №10. Уравнения электродинамики для направляемых волн

1. Уравнения электродинамики для направляемых волн.
2. Полые волноводы.

# 1 Уравнения электродинамики для направляемых волн

Для передачи электромагнитной волны от источника к пункту назначения используются *линии передачи (направляющие системы (НС). Волна направляемая)*.

*Пример НС* – кабель, соединяющий телевизор с антенной.

НС называется *регулярной*, если она прямолинейна и ее поперечное сечение неизменно по длине.

*Основное требование* к НС - максимальная эффективность передачи энергии при экономической целесообразности линии.

Универсальных направляющих систем, удовлетворяющих данному требованию во всех диапазонах частот, не существует.

# Основные положения электродинамики для НС

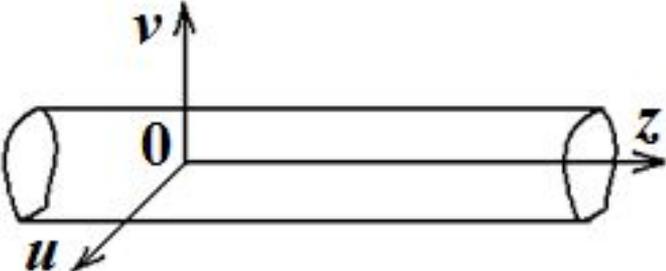


Рисунок 1.1 – Геометрия НС

Соотношения для описания комплексных амплитуд поля в системе координат  $0uvz$ :

$$, \quad (1.1)$$

$$\vec{E}(u, v, z) = \vec{E}_0(u, v) \exp(\pm\gamma z) \quad \vec{H}(u, v, z) = \vec{H}_0(u, v) \exp(\pm\gamma z)$$

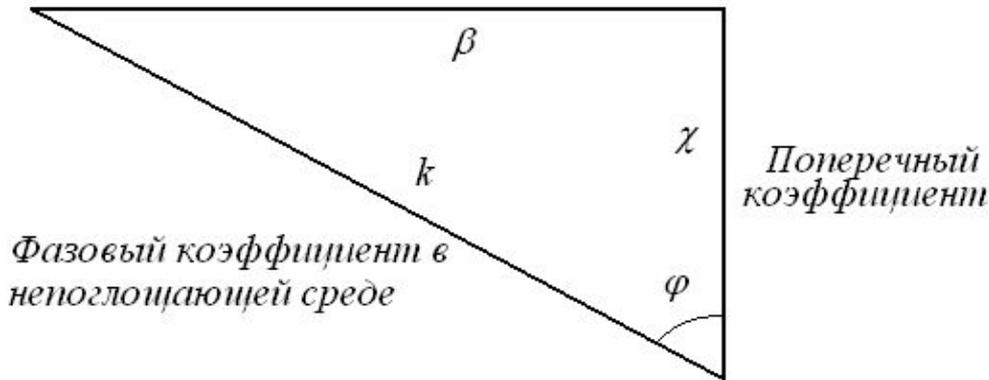
- множитель бегущей волны;

$\exp(\pm\gamma z)$  - коэффициент распространения волны

$$\gamma \quad ( \quad , \quad ).$$

$$\gamma = ik_\beta = i\beta \quad k = k_\beta - ik_\alpha$$

Фазовый коэффициент в  
регулярной линии



Фазовый коэффициент в  
непоглощающей среде

Поперечный  
коэффициент

уравнение коэффициентов:

$$k^2 = \chi^2 + \beta^2 . \quad (1.2)$$

Уравнения Гельмгольца с учетом (1.2):

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + \chi^2 E_z = 0 , \quad \nabla_{\perp}^2 H_z + \chi^2 H_z = 0 , \quad (1.3)$$

Уравнения для поперечных составляющих полей:

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} E_z - \frac{i\omega\tilde{\mu}_a}{\chi^2} [\text{grad}_{\perp} H_z, \vec{i}_z] ,$$

$$\vec{H}_{\perp} = -\frac{\gamma}{\chi^2} \text{grad}_{\perp} H_z + \frac{i\omega\tilde{\epsilon}_a}{\chi^2} [\text{grad}_{\perp} E_z, \vec{i}_z] . \quad (1.4)$$

Знак  $\perp$  показывает, что производные берутся только по поперечным координатам.

# Анализ режимов работы НС на основе уравнения коэффициентов

Таблица 1.1 - Типы решений уравнения  $\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2}$  и их физическая трактовка

Соотношение подкоренных функций	Тип продольного волнового числа	Колебания	Режим работы линии
$k > \chi$	Вещественное число	Бегущие волны	Докритический
$k = \chi$	Нуль	Распространение волн прекращается	Критический
$k < \chi$	Мнимое число	Нераспространяющиеся колебания	Закритический (режим отсечки). Волновод как реактивная нагрузка

## Для критического режима:

Критическая частота:

$$f_{\text{кр}} = \frac{\omega_{\text{кр}}}{2\pi} = \frac{k}{2\pi \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a}} = \frac{\chi}{2\pi \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a}}, \quad (1.6)$$

Критическая длина волны:

$$\lambda_{\text{кр}} = 2\pi / \chi, \quad (1.7)$$

Условие распространения волн в волноводе:

$$\lambda_{\text{в}} < \lambda_{\text{кр}} \quad \text{или} \quad f > f_{\text{кр}}$$

## Дисперсионные характеристики волновода

С учетом (1.7) выражение для  $\beta$  принимает вид:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (1.8)$$

$\lambda_0$  - длина волны в свободном пространстве.

Дисперсионная характеристика волновода:

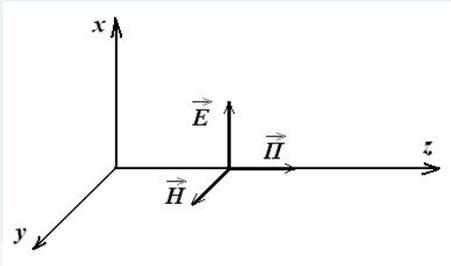
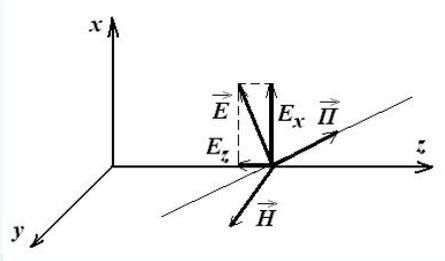
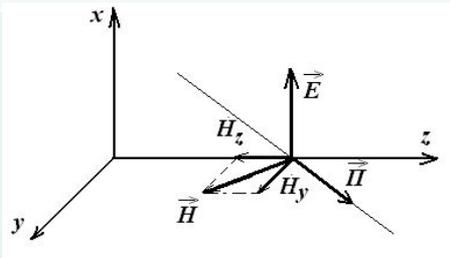
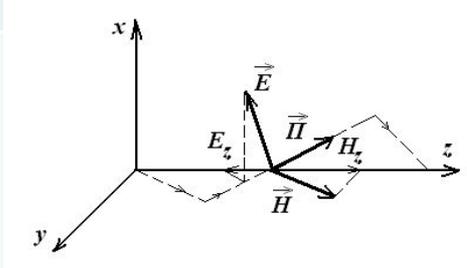
$$\lambda_{в} = \lambda_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (1.9)$$

Длина волны в волноводе всегда больше длины волны в неограниченном пространстве при той же частоте.

Фазовая скорость в волноводе:

$$v_{\phi} = c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (1.10)$$

Таблица 1.2 – Классификация типов волн

Тип волны	Продольные составляющие	Иллюстрация
Т-волны (ТЕМ-волны)	$E_z = 0$ $H_z = 0$	
Е-волны (ТМ-волны)	$E_z \neq 0$ $H_z = 0$	
Н-волны (ТЕ-волны)	$E_z = 0$ $H_z \neq 0$	
Гибридные волны (EH- или HE-)	$E_z \neq 0$ $H_z \neq 0$	

## 2 Полые волноводы

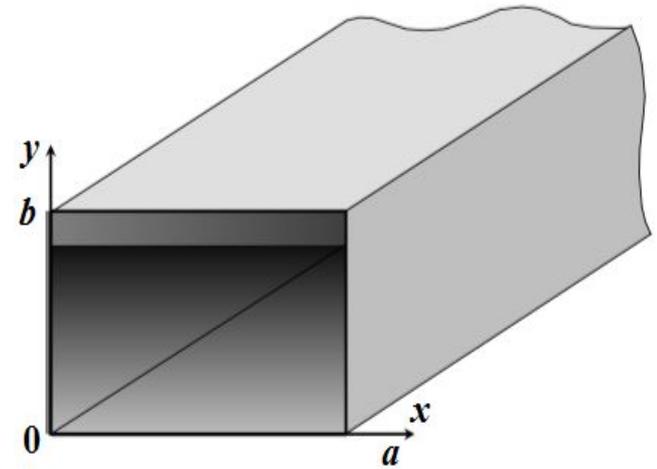
**Прямоугольный волновод** – металлическая труба с прямоугольным поперечным сечением.

**Тип распространяющейся волны** – либо  $E$ - либо  $H$ -.  $T$ -волна не может распространяться в принципе.

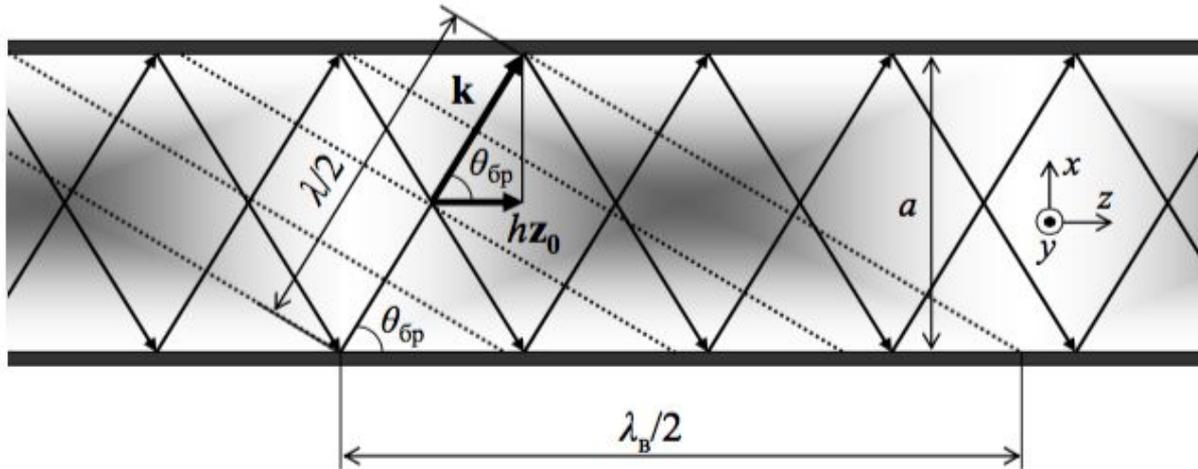
**Концепция Бриллюэна** (лучевая трактовка):

Поле в волноводе – результат сложения плоских однородных волн, называемых *парциальными*, многократно отраженных от его граничных поверхностей.

Парциальная ТЕМ-волна распространяется вдоль линии, образующей угол с осью  $z$ . В силу этого путь, пройденный за одно и то же время фронтом волны вдоль оси  $z$ , больше, чем по направлению распространения, следовательно, фазовая скорость у волн  $E$  и  $H$  всегда превышает скорость света в среде.



# Пояснение концепции Бриллюэна



$$m \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{\sin(\theta_{бр})}$$

Число полуволн в поперечном сечении

$$\theta_{бр} = \arcsin\left(\frac{2a}{m\lambda}\right) = \arcsin\left(\frac{a\omega}{\pi mc}\right)$$

Бриллюэновский угол

Для волны, распространяющейся в продольном направлении

$$v_{\phi} = \frac{c}{\cos(\theta_{бр})}$$

Для волны в поперечном направлении  $\theta_{бр} = 90^\circ$   $\omega_{кр} = \frac{\pi mc}{a}$   $\lambda_{кр} = \frac{2a}{m}$

## Поле поперечно-магнитных волн:

$$E_z = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cdot \exp(-\gamma_{mn}z) \quad , \quad (1.12)$$

## *поперечный волновой коэффициент волновода:*

$$\chi_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad , \quad (1.13)$$

Каждой комбинации  $m$  и  $n$  соответствует своя структура поля, т.

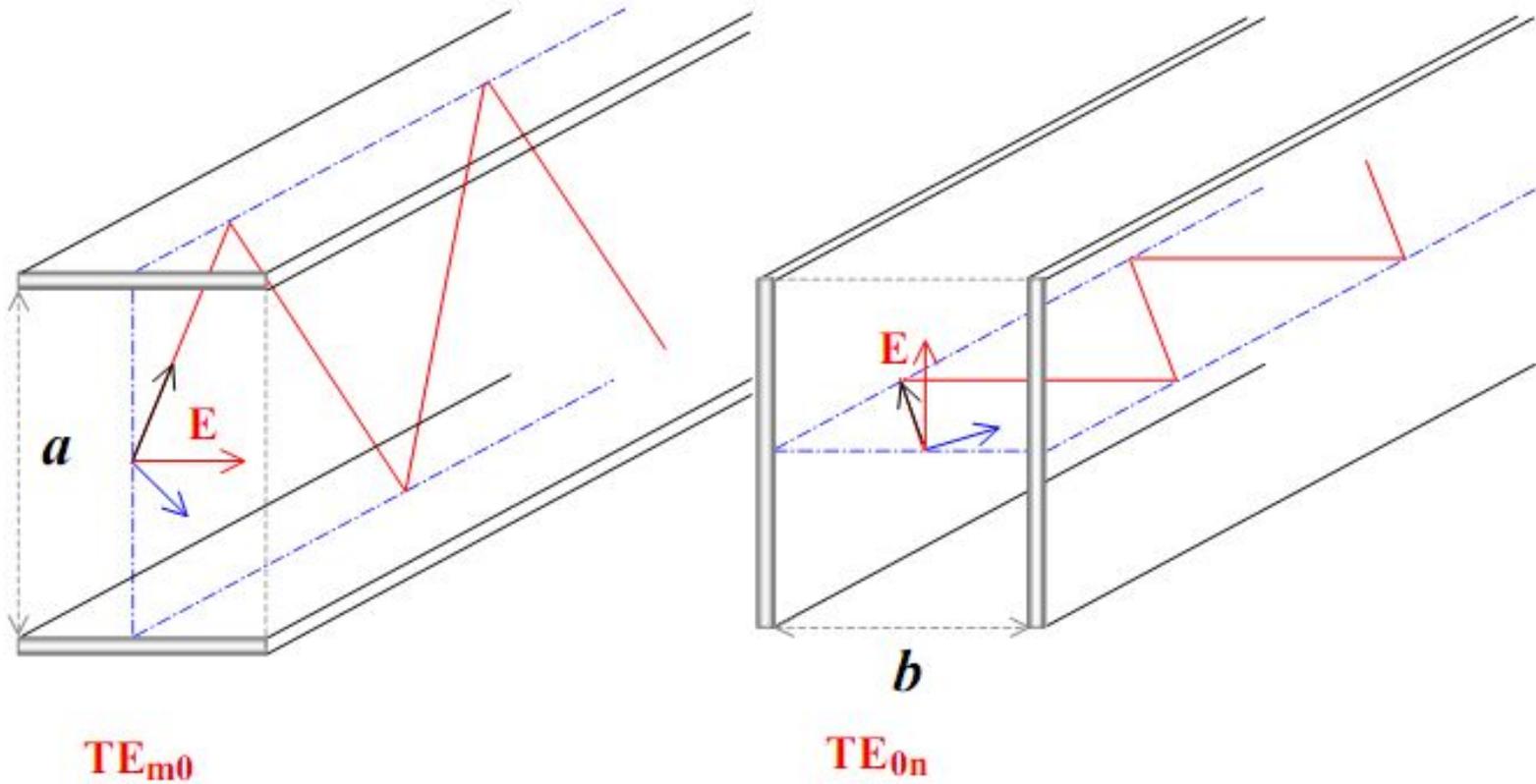
*е. мода.*

**Волна**, имеющая минимальную критическую частоту из всех возможных волн, относящихся к рассматриваемому классу, называется *основной* или *волной основного типа*.

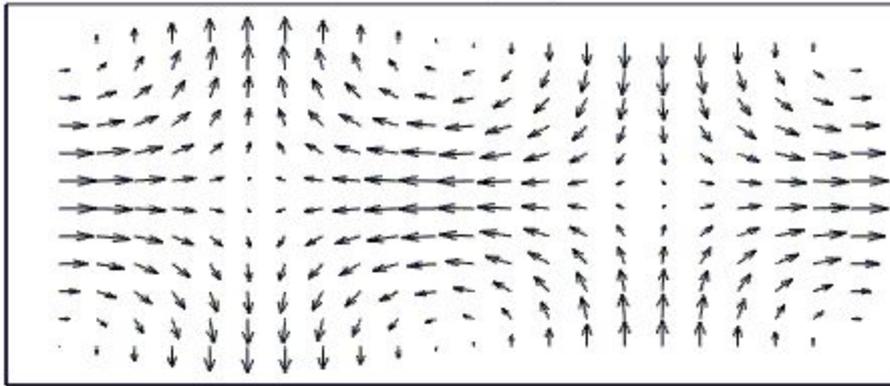
## *Характеристическое сопротивление волновода:*

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = W_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} \quad . \quad (1.14)$$

# Механизм распространения ТЕ-волн



$E_x$  and  $E_z$  in the plane  $y = 0$ .



$-x = a$

For the TM mode

$m = 1$

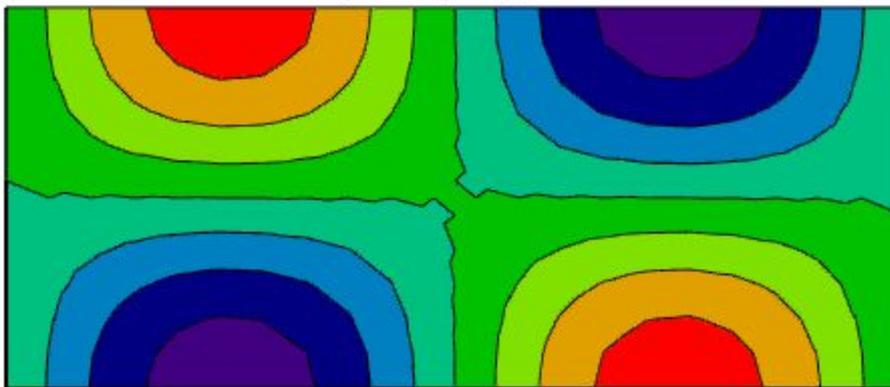
at time (in periods,  $T_p$ )

$\frac{\text{time}}{T_p} = 0.000$

$-x = 0$

$(e_{zc}, e_{xc})$

$H_y$  in the plane  $y = 0$ .



$-x = a$

For the TM mode

$m = 1$

at time (in periods,  $T_p$ )

$\frac{\text{time}}{T_p} = 0.000$

$-x = 0$

$h_{yc}$

$z = 0$

$z = \lambda_z$

## Поле поперечно-электрических волн:

$$H_z = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \exp(-\gamma_{mn} z) \quad . \quad (1.15)$$

Характеристическое сопротивление волновода:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \quad . \quad (1.16)$$

Низшим типом волн среди  $H$ -волн является волна  $H_{10}$ , для которой  $\lambda_{крH_{10}} = 2a$  .

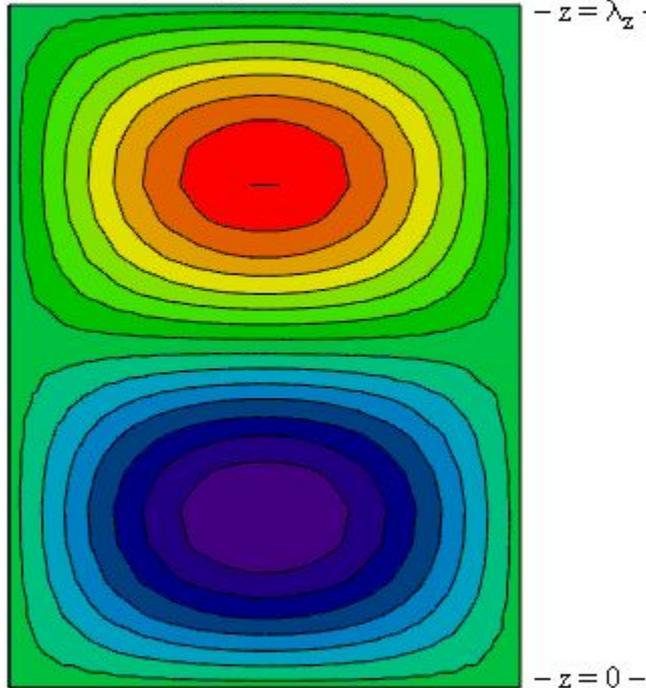
Для данной волны мощность, переносимая по волноводу, определяется выражением:

$$P = E_0^2 \frac{ab}{4W_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \quad . \quad (1.17)$$

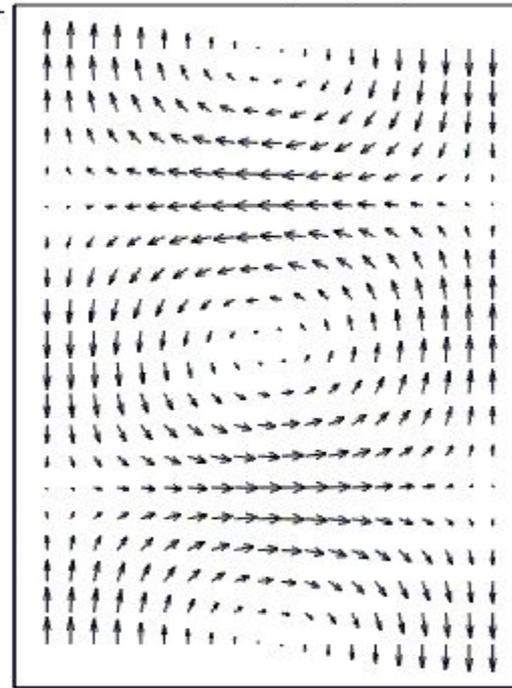
For the TE mode  
 $m = 1, n = 0$

At time (in periods,  $T_p$ )  $\frac{\text{time}}{T_p} = 0.000$

$E_y$  in the plane  $y = y_0$ .



$H_x$  and  $H_z$  in the plane  $y = y_0$ .



$e_{yb}$

|  
 $x = 0$

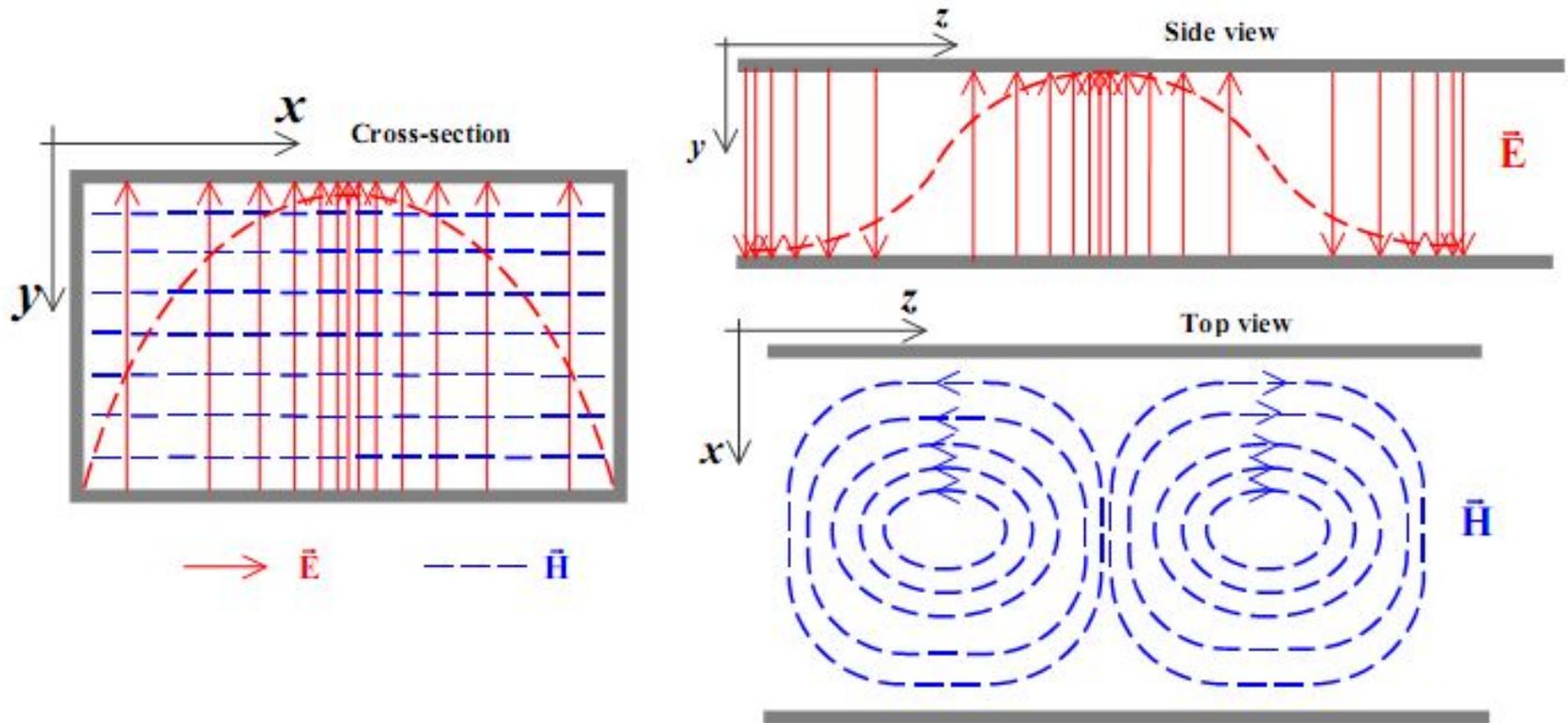
|  
 $x = a$

$(h_{xb}, h_{zb})$

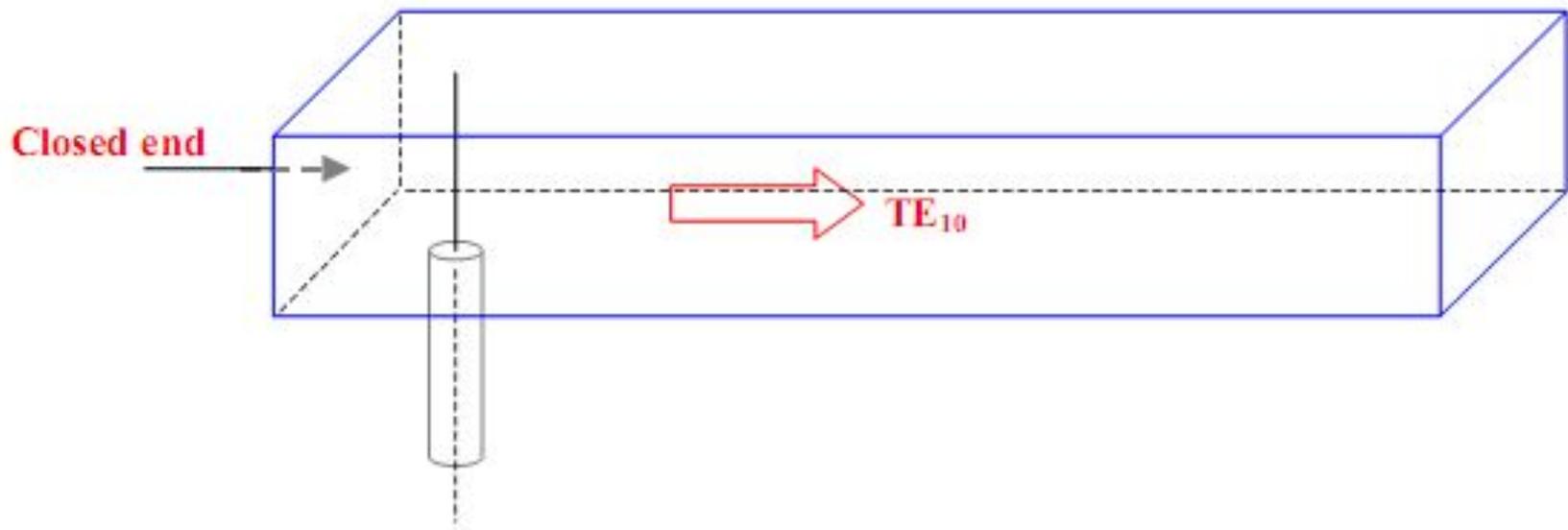
|  
 $x = 0$

|  
 $x = a$

# Структура поля волны Н<sub>10</sub>



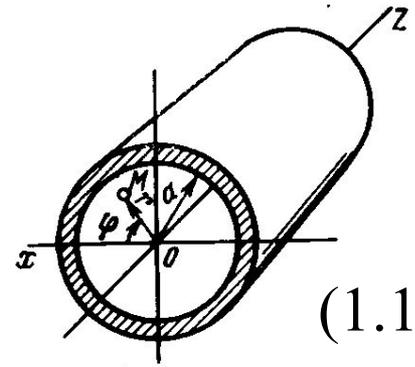
# Способ возбуждения волны Н<sub>10</sub>



# Круглый волновод радиусом $a$ .

Поле ТМ-волн:

$$E_z = \sum_m \sum_n B_{mn} J_m \left( \frac{v_{mn}}{a} \rho \right) \cos(m\varphi) \exp(-\gamma_{mn} z) \quad (1.18)$$



$$\left( f_{кр} \right)_{TM} = \frac{v_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \left( \lambda_{кр} \right)_{TM} = \frac{2\pi a}{v_{mn}} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (1.19)$$

где  $J_m(\cdot)$  - функция Бесселя  $m$ -го порядка;

$v_{mn}$  - корни уравнения  $J_m(v) = 0$ .

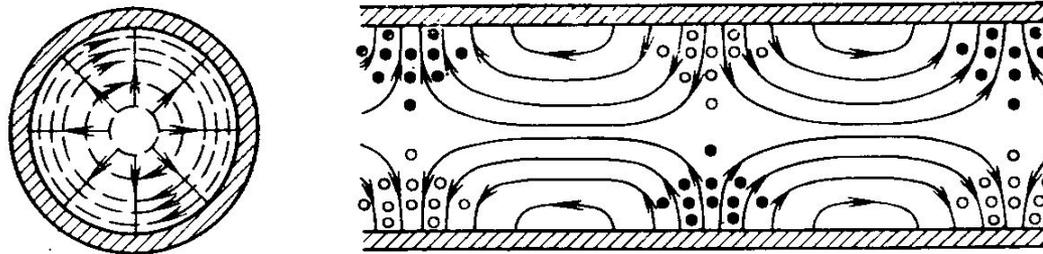


Рисунок 1.4 – Структура поля волны  $E_{01}$  (волны низшего типа)

## Поле TE-волн:

$$H_z = \sum_m \sum_n A_{mn} J_m \left( \frac{v'_{mn}}{a} \rho \right) \cos(n\varphi) \exp(-\gamma_{mn} z) , \quad (1.20)$$

$$\left( f_{кр} \right)_{TE} = \frac{v'_{mn}}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}} , \quad \left( \lambda_{кр} \right)_{TE} = \frac{2\pi a}{v'_{mn}} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} , \quad (1.21)$$

где  $v'_{mn}$  - корни уравнения  $J'_m(v) = 0$  .

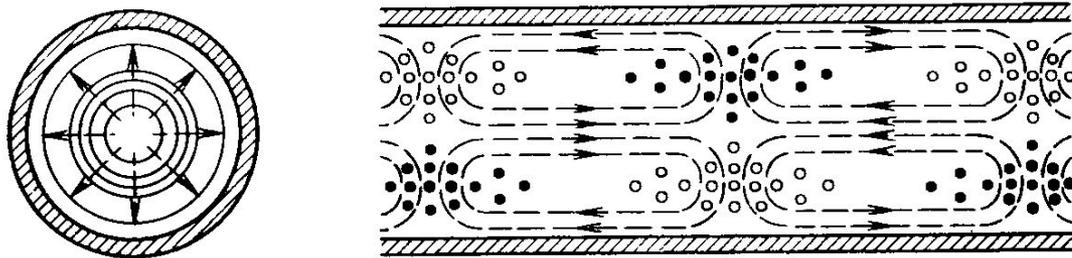


Рисунок 1.5 – Структура поля волны  $H_{01}$  (волны низшего типа)