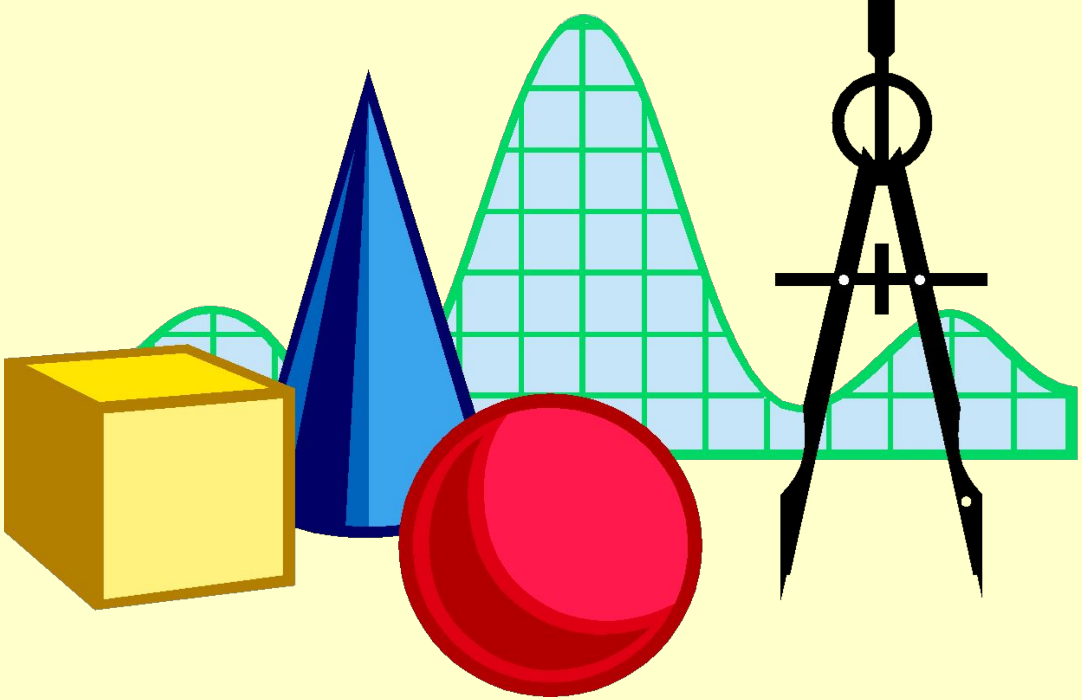


векторы

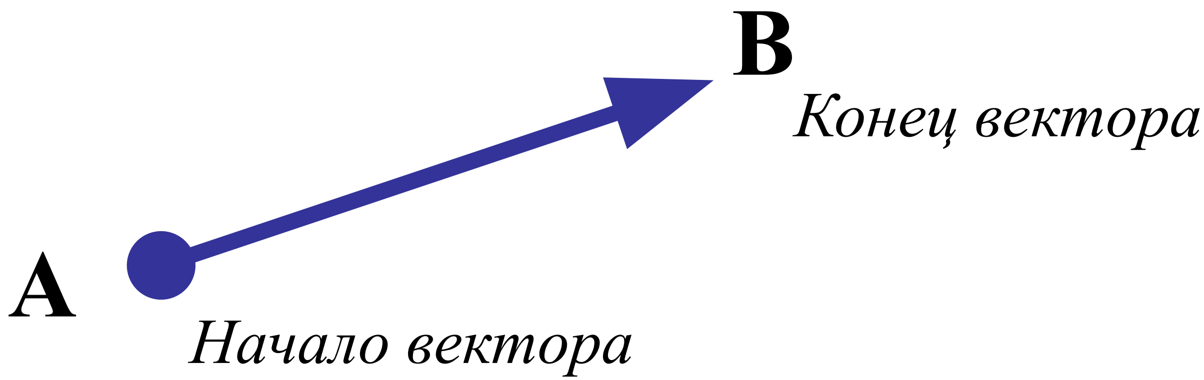
Величины, которые характеризуются не только числом, но еще и направлением, называются *векторными величинами* или просто векторами.

Скорость
Ускорение
Сила

Понятие вектора

Отрезок, для которого указано, какая его граничная точка является началом, а какая - концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**

$\overrightarrow{AB}$ *- вектор*

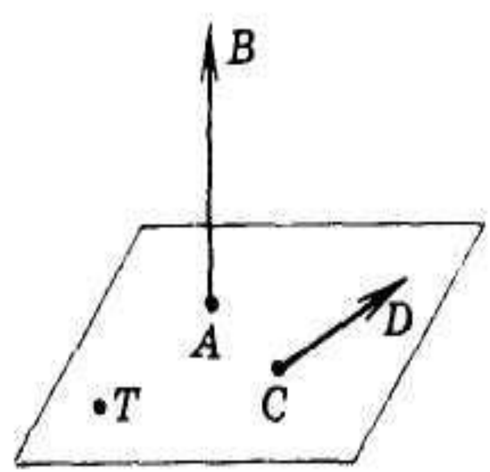


Вектор характеризуется

следующими элементами:

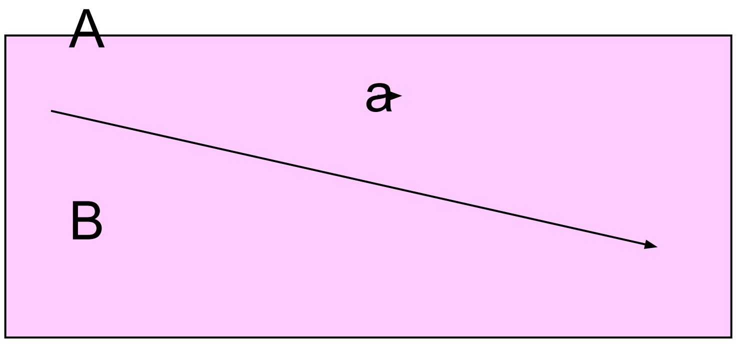
1. начальной точкой (точкой приложения);
2. направлением;
3. длиной

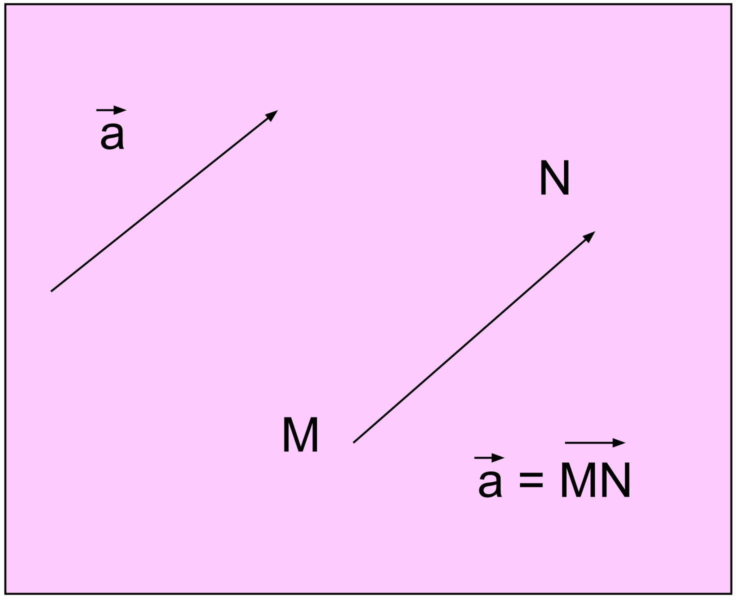
(«модулем вектора»).



Обозначение вектора.

- Если начало вектора – точка А, а его конец – точка В, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.
- **От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один, используя параллельный перенос.**



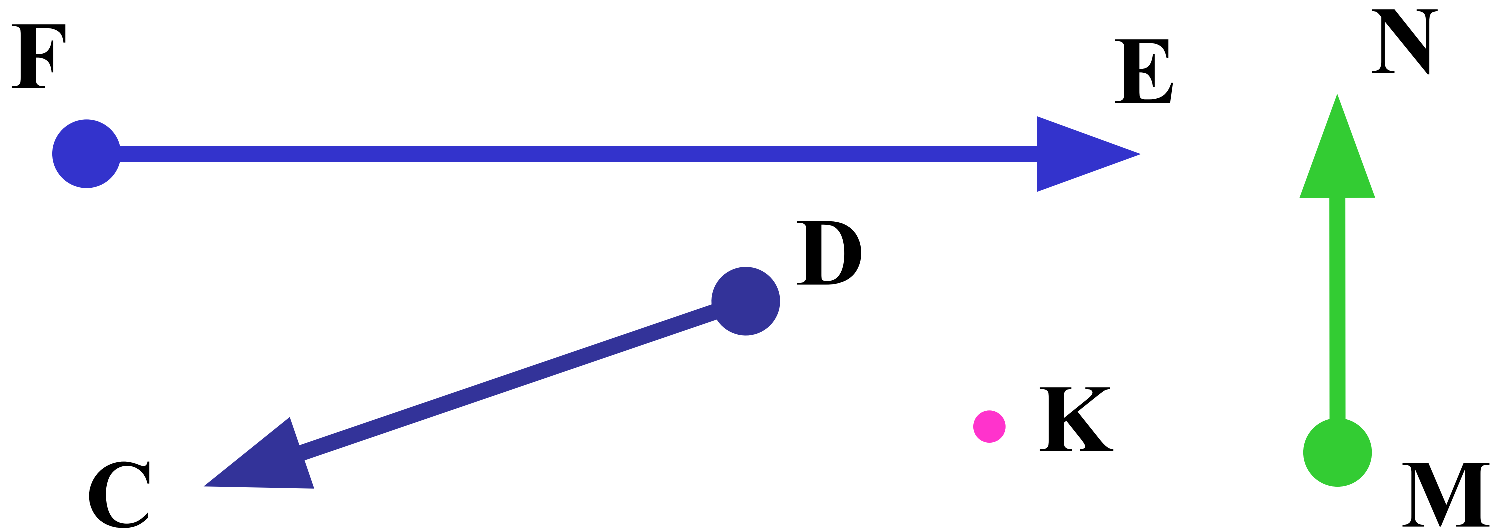


Нулевой вектор – точка в пространстве. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет длины и направления. Обозначается: $\vec{0}$. $\overrightarrow{KK}$

Абсолютной величиной (длиной или модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора обозначается $|\vec{a}|$.

Задание.

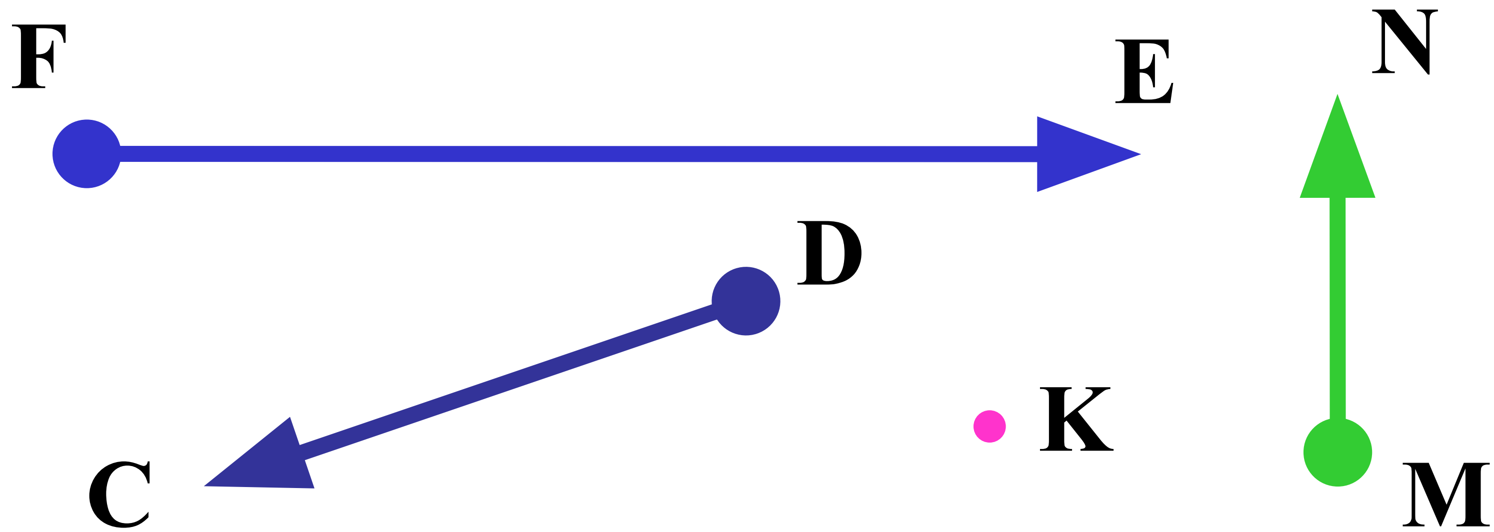
Назови вектора и запиши их обозначения.



Сравним ответ

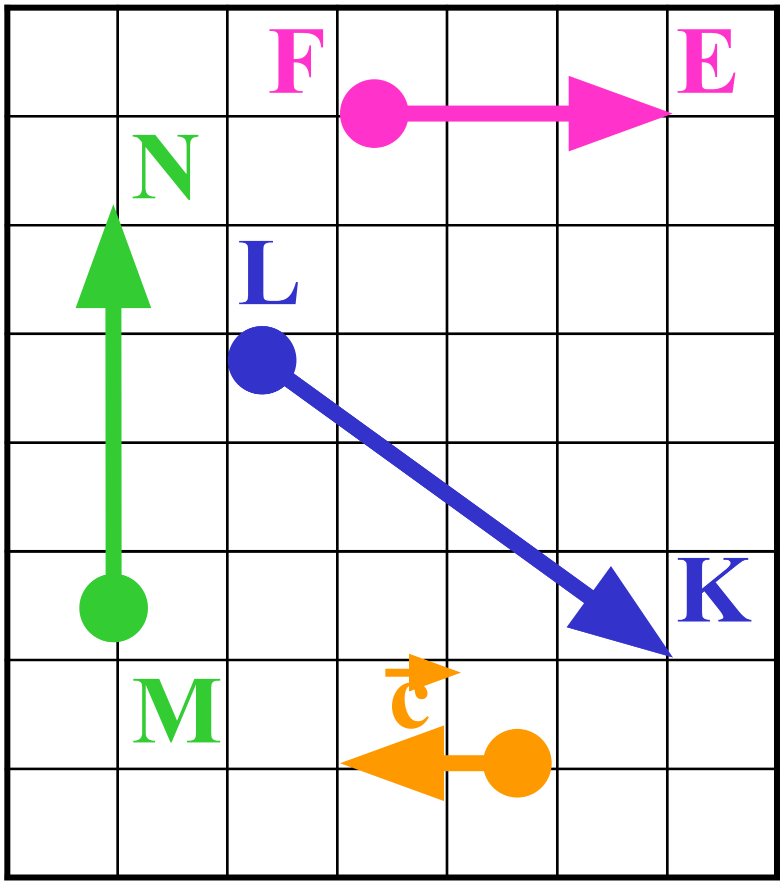
Задание.

Назови вектора и запиши их обозначения.



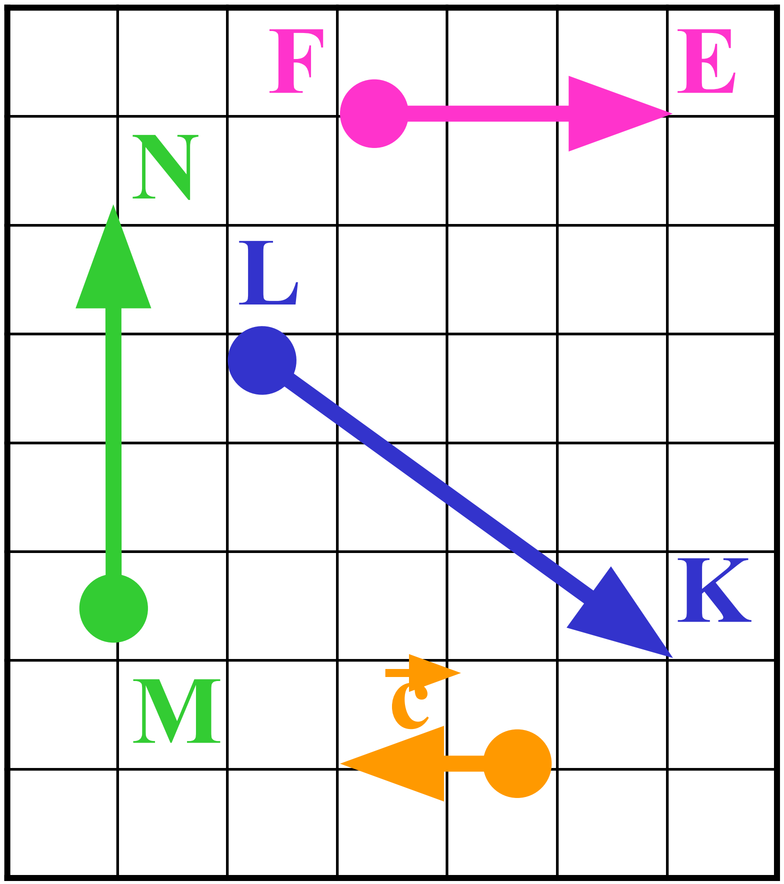
$\overrightarrow{FE}$ $\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{KK}$ $\overrightarrow{MN}$

Укажите длину векторов



Сравним ответ

Укажите длину векторов



$|\overrightarrow{EF}| = 3$

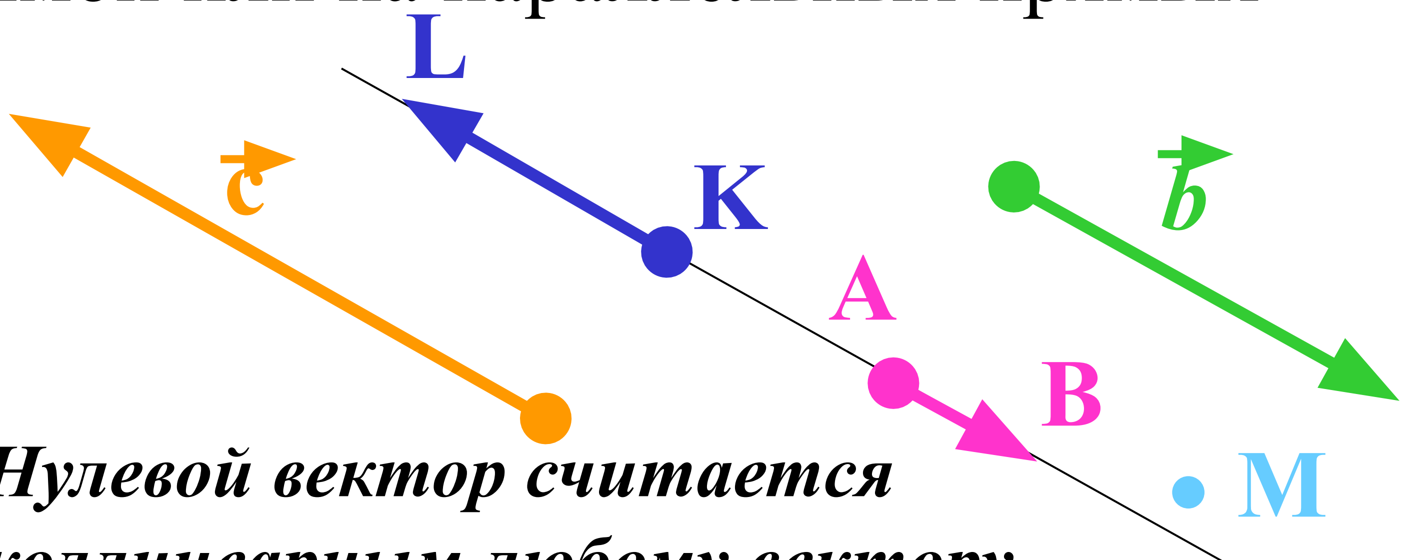
$|\overrightarrow{MN}| = 4$

$|\overrightarrow{LK}| = 5$

$|\vec{c}| = 2$

<u>Коллинеарные вектора</u>

Ненулевые вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

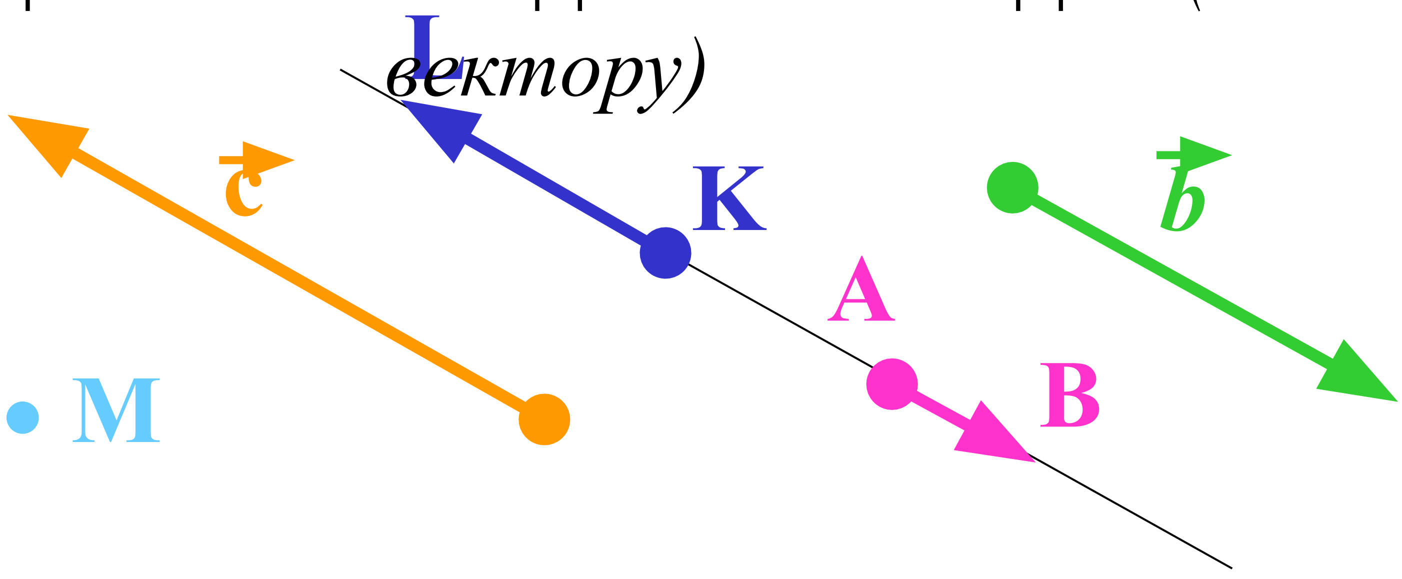


Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

Сонаправленные вектора

Коллинеарные вектора имеющие одинаковое направление, называются **сонаправленными** векторами

$\vec{c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \vec{c}$ *(любому вектору)*

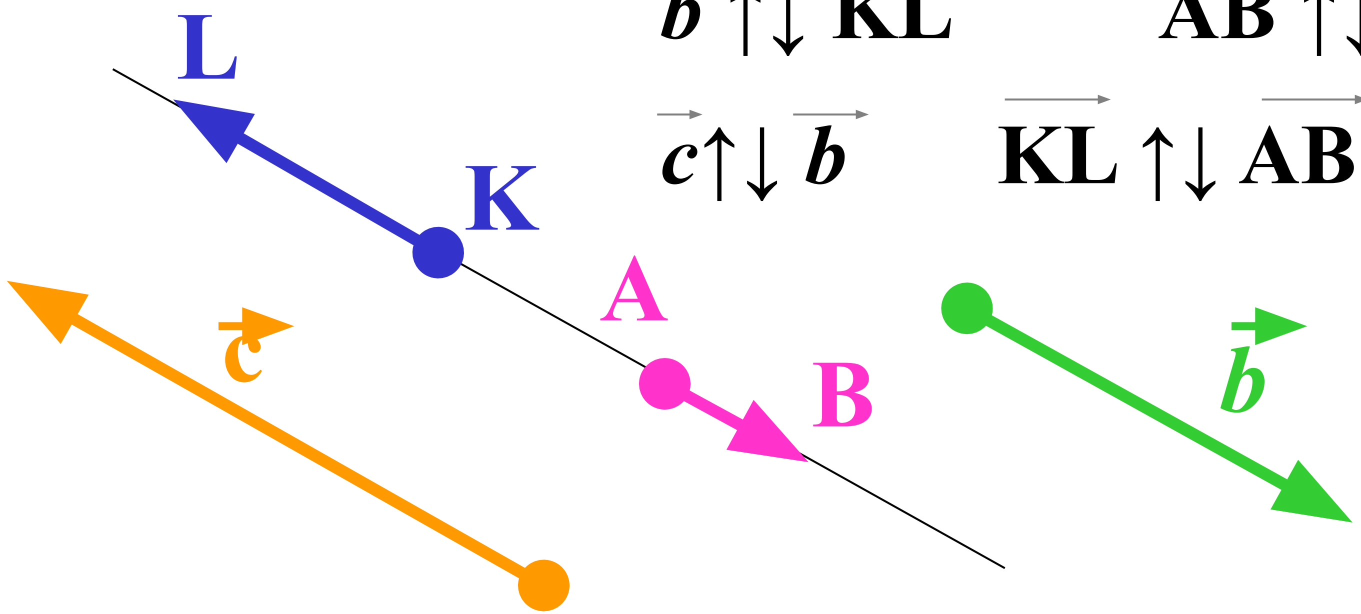


Противоположно направленные вектора

Коллинеарные вектора имеющие противоположное направление, называются **противоположно направленными** векторами

$\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{c}$

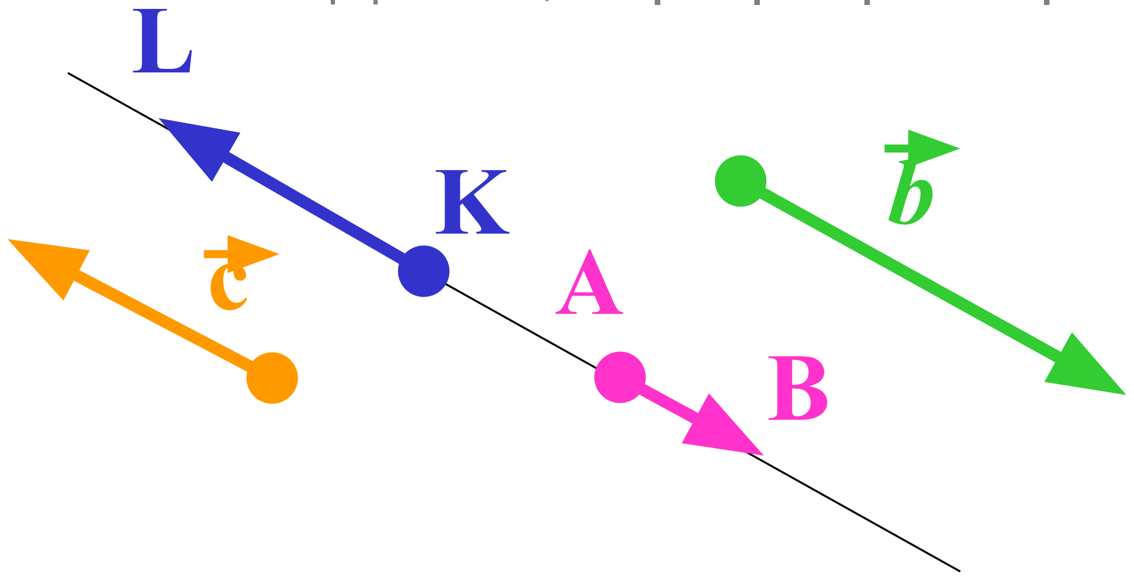
$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\overrightarrow{KL} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$



Равенство векторов

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны

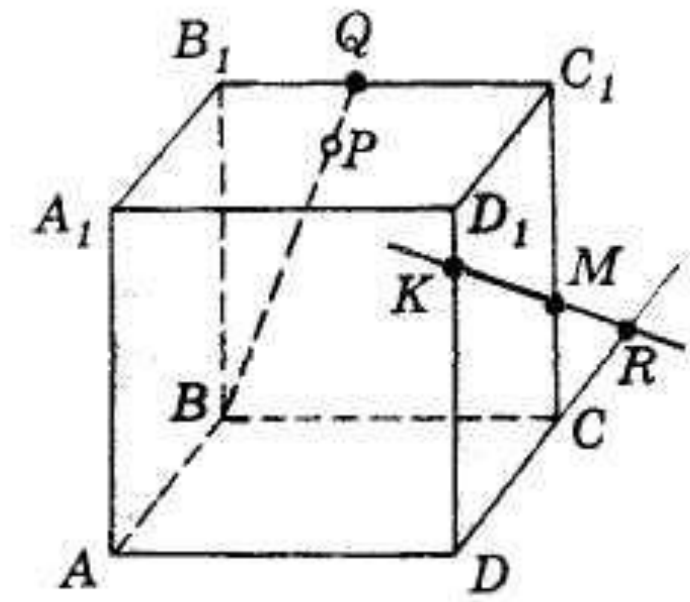
$$\vec{c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}, \quad |\vec{c}| = |\overrightarrow{KL}| \Rightarrow \vec{c} = \overrightarrow{KL}$$



Задание

Привести примеры по чертежу куба с ребром 3 см:

- коллинеарные векторы;
- сонаправленные векторы;
- равные векторы;
- найдите длину векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{AC}$; .



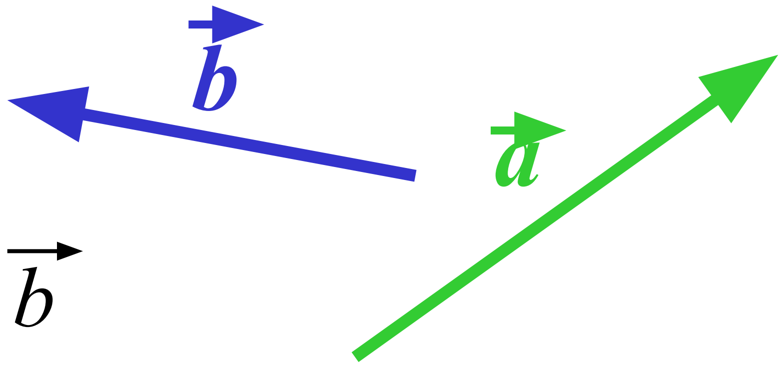
Действия над векторами

Сложение векторов

- Правило треугольника
- Правило параллелограма
- Сложение коллинеарных векторов

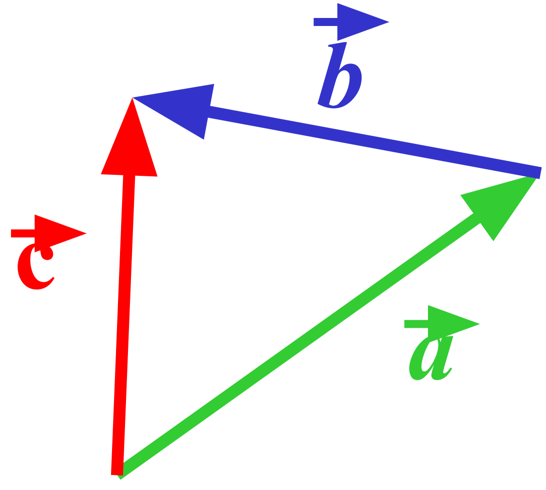
Правило треугольника

Дано: $\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}$



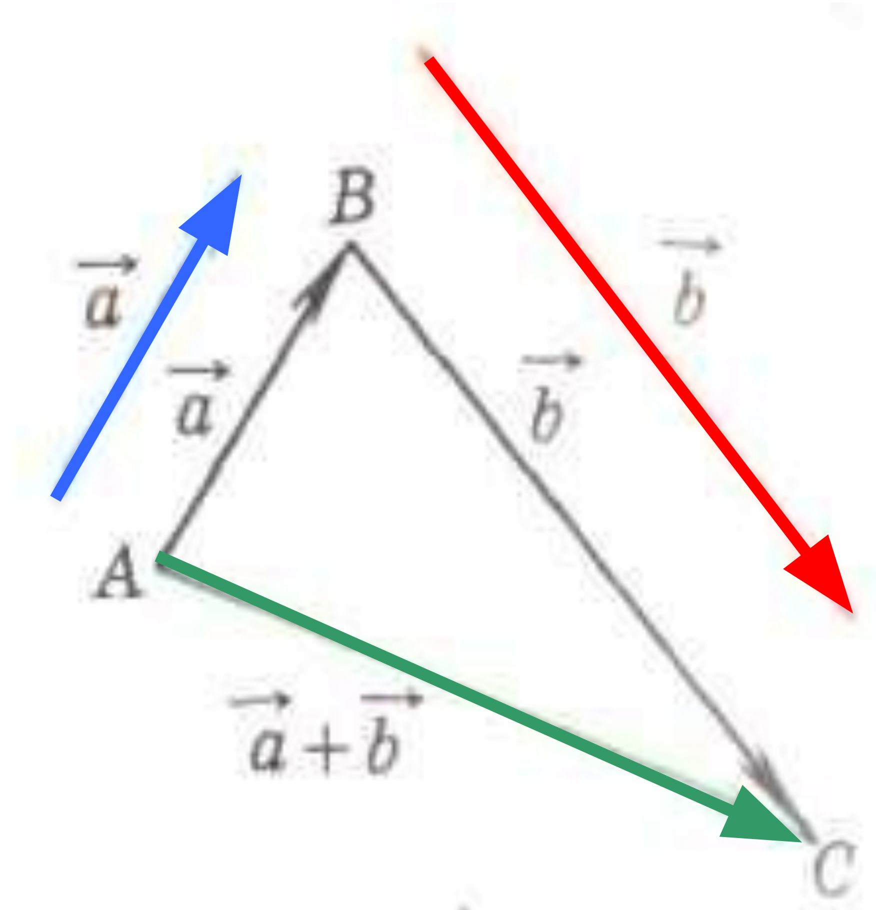
Построить: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

Построение:



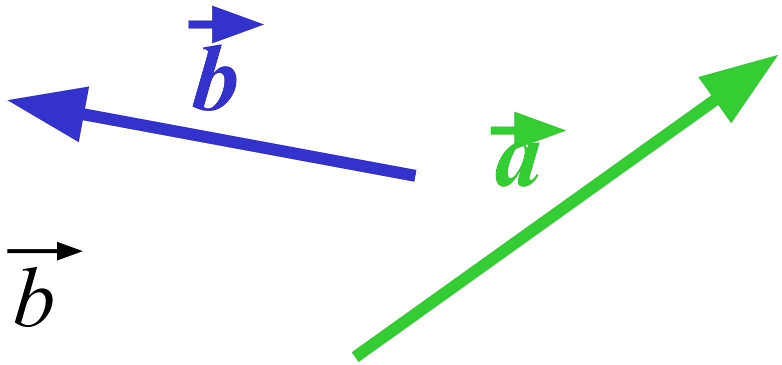
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

- ***Правило треугольника.*** *(правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и Ь).* Отложим от какой-нибудь точки *A* вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки *B* отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный Ь. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC}$ **=** $\vec{a}$**+Ь**.



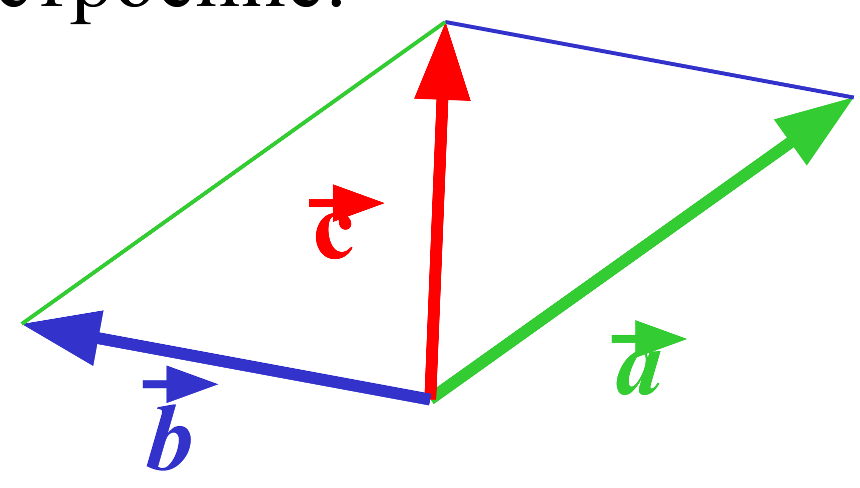
Правило параллелограмма

Дано: $\vec{a}, \ \vec{b}$



Построить: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

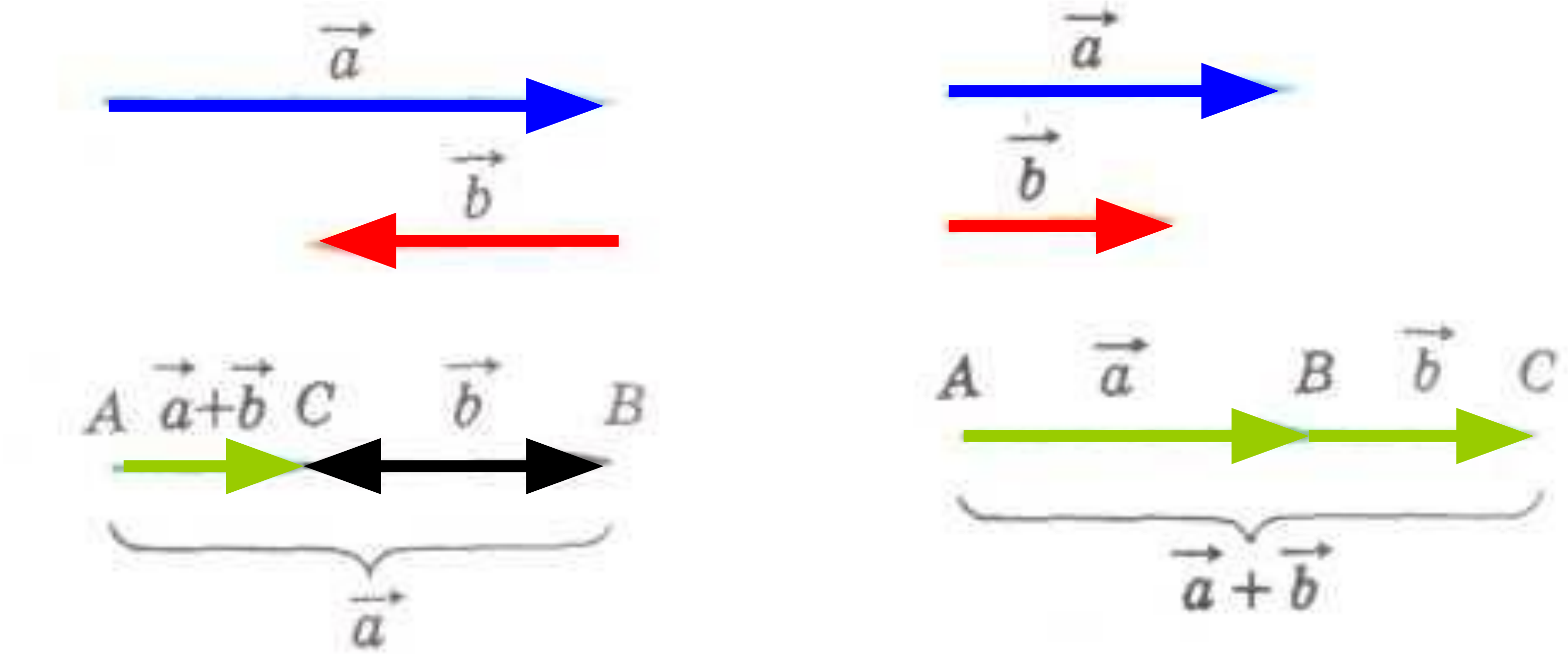
Построение:



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

<u>Сложение коллинеарных векторов</u>.

- По этому же правилу складываются и <u>коллинеарные</u> векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника.



Свойства сложения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

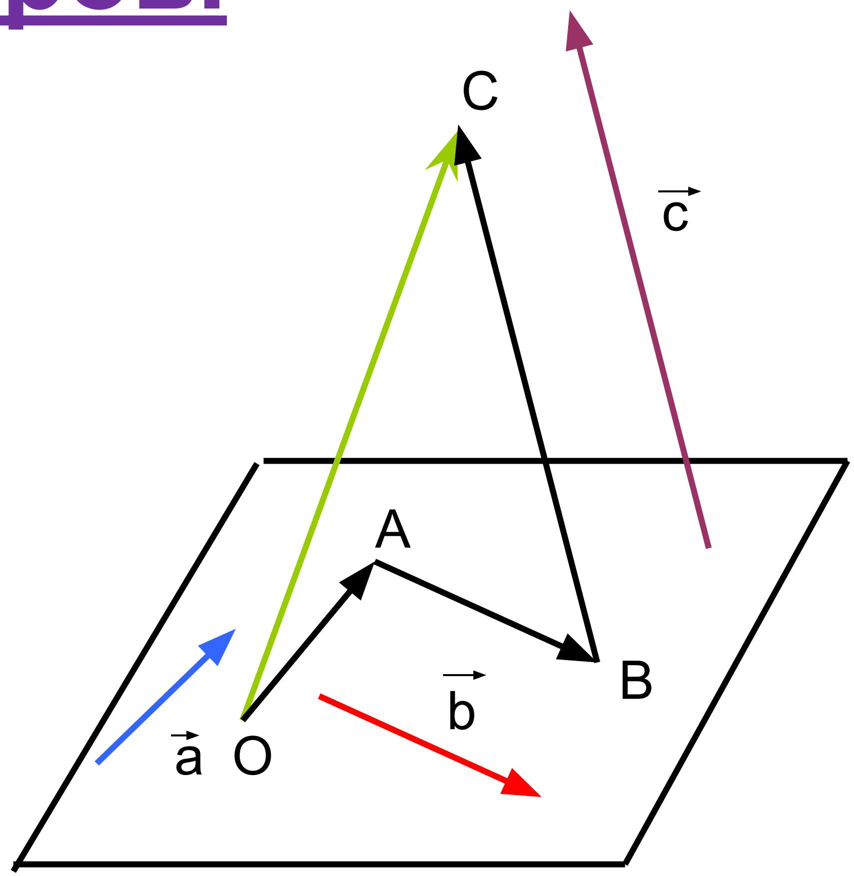
(***переместительный закон***);

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

(***сочетательный закон***).

Сложение нескольких векторов.

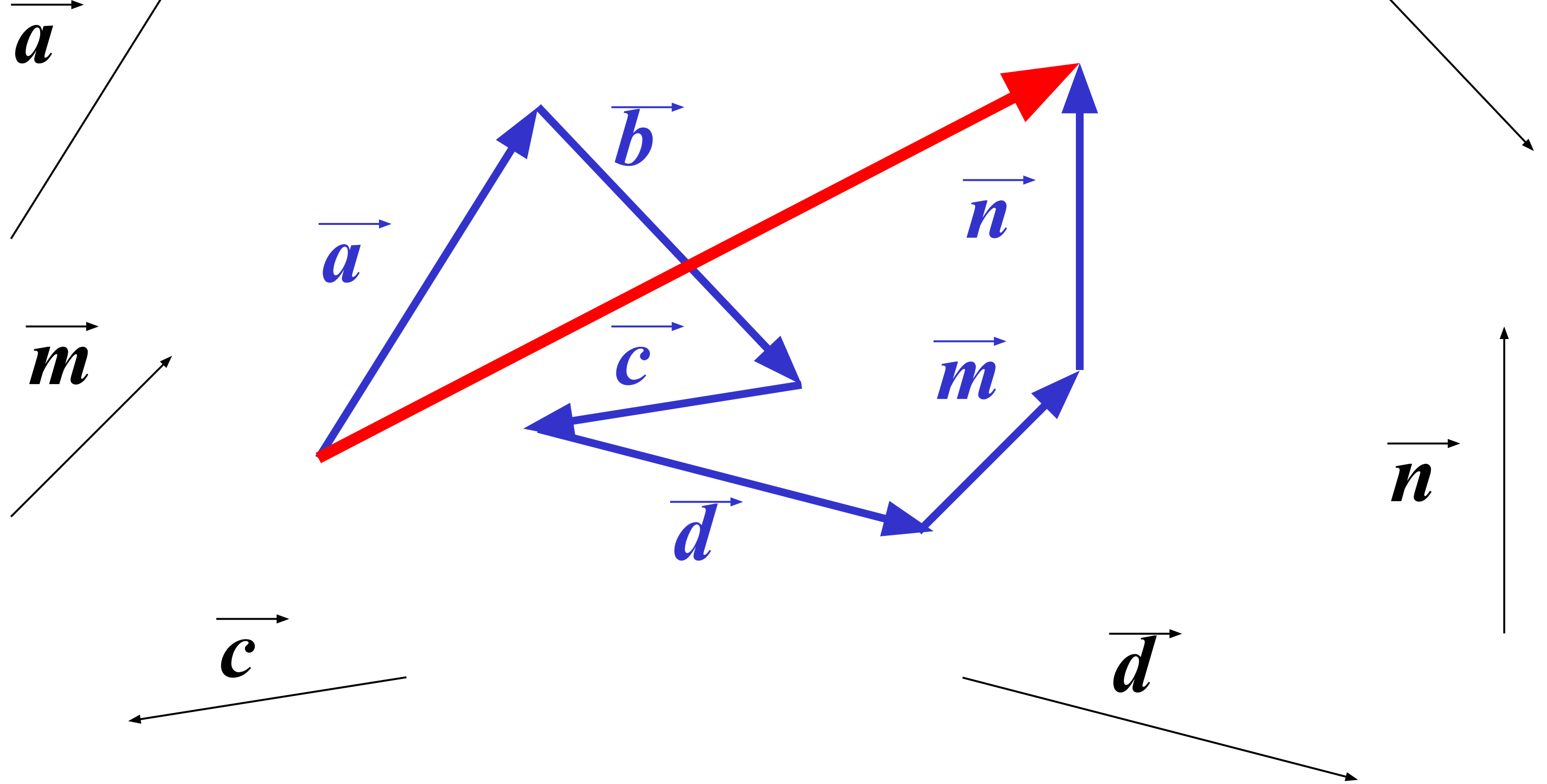
- Сложение нескольких векторов выполняется так: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**



$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Сумма нескольких векторов

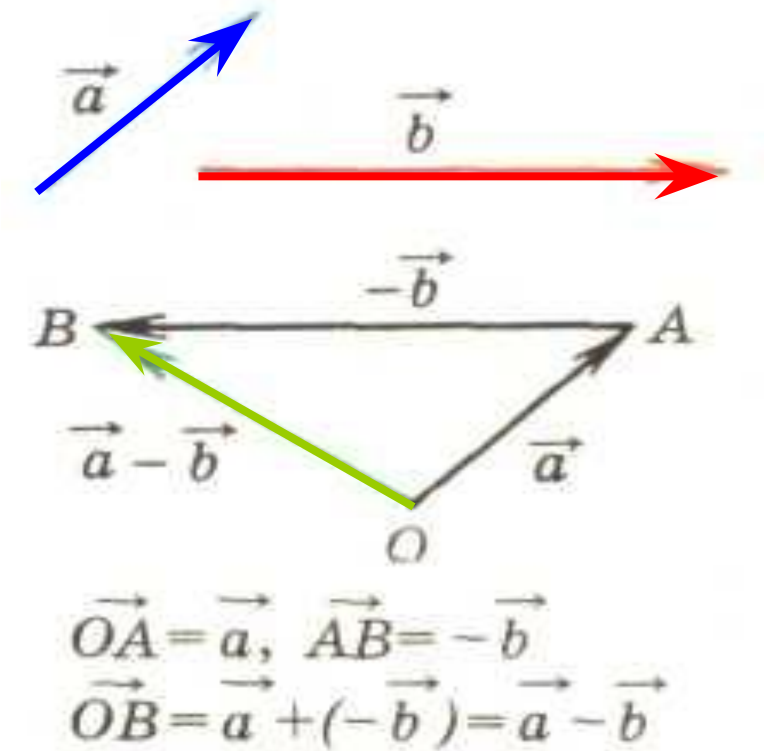
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{m}+\vec{n}$$

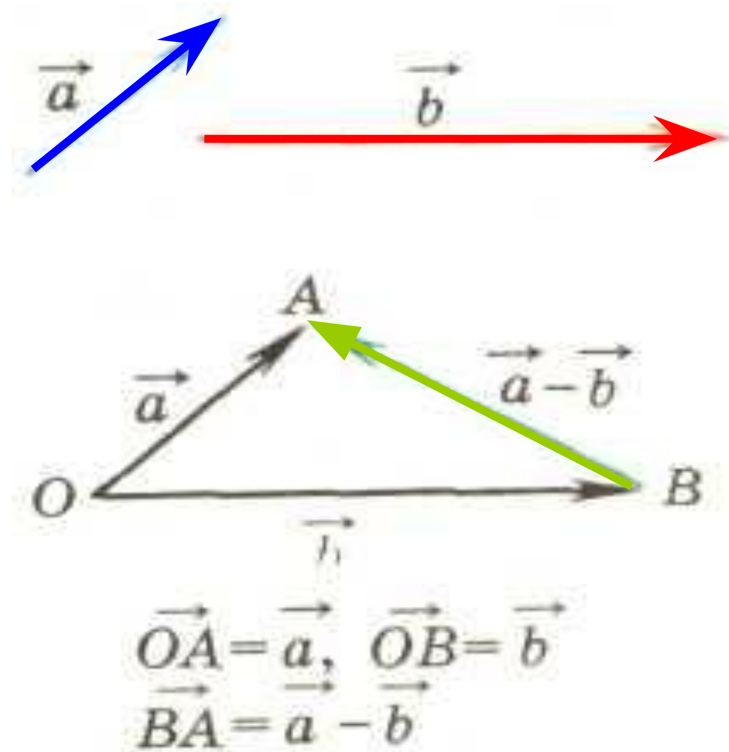


Разность векторов.

- ***Разностью векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле:

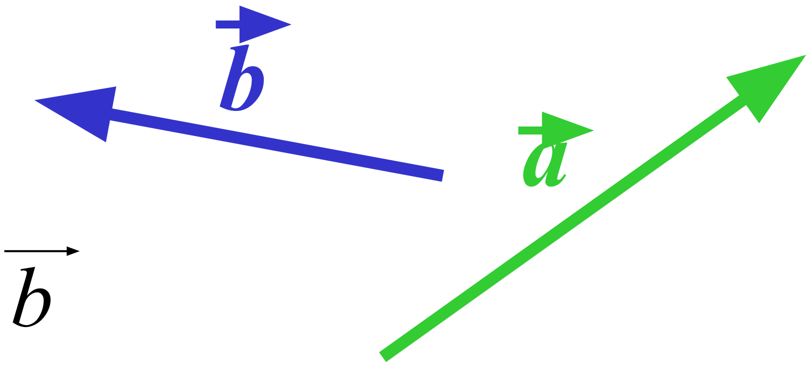
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$





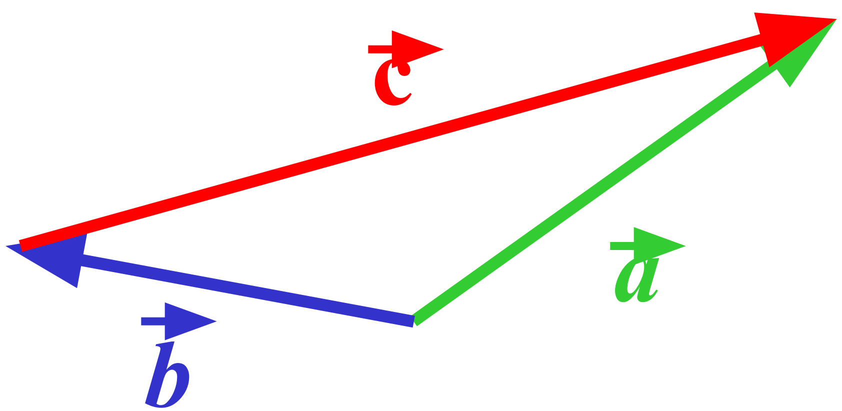
Вычитание векторов

Дано: $\vec{a}, \vec{b}$



Построить: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

Умножение вектора $\vec{a}$ на число k

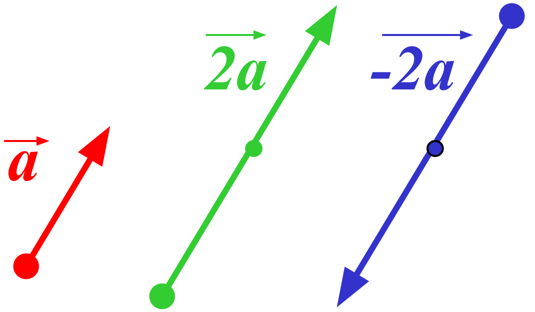
$$k \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$, k – произвольное число

$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$,

если $k>0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

если $k<0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Правила умножения вектора на число.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, $\boldsymbol{m}$ справедливы равенства:

$(km)\vec{a}=k(m\vec{a})$ **(сочетательный закон);**

$k(\vec{a} + \vec{b})= k\vec{a} + k\vec{b}$ **(первый распределительный закон);**

$(k + m)\vec{a} =k\vec{a} + m\vec{a}$ **(второй распределительный закон).**

Свойства умножения вектора на число.

- $(-1)\vec{a}$ является вектором, противоположным вектору $\vec{a}$, т.е.

  $$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

- если вектор $\vec{a}$ ненулевой, то векторы $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.
- если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{O}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

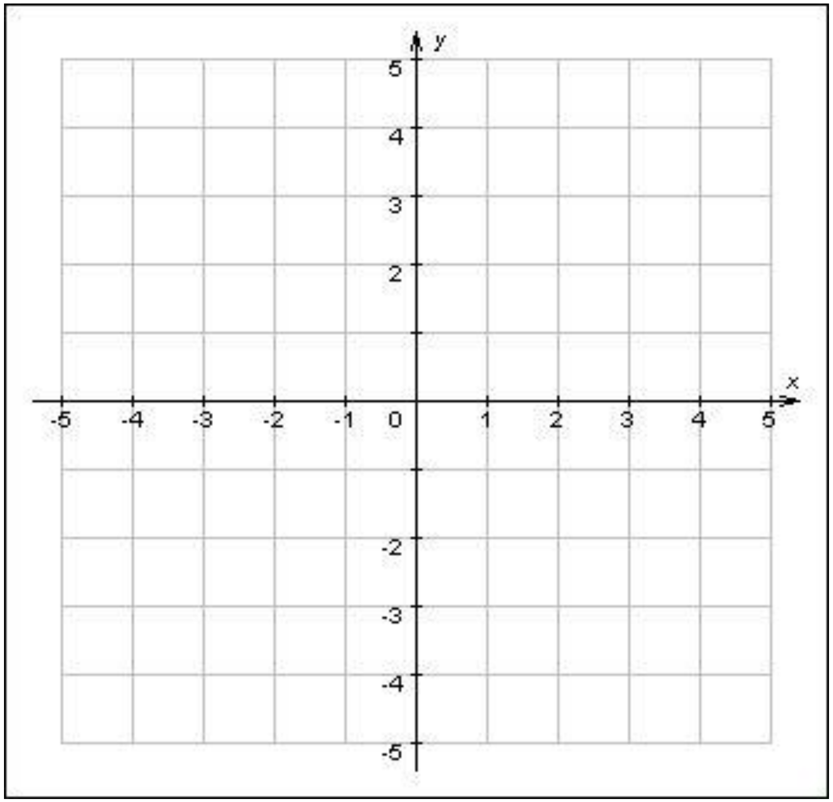
- **Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.**

- **Для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.**

Рене Декарт

- французский философ, математик, физик и физиолог. Заложил основы аналитической геометрии, дал понятия переменной величины и функции, ввел многие алгебраические обозначения.
- Декарту принадлежит заслуга создания современных систем обозначений: он ввел знаки переменных величин (x, y, z...), коэффициентов (a, b, c...), обозначение степеней (a2, x-1...).
- Декарт является одним из авторов теории уравнений: им сформулировано правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней, поставил вопрос о границах действительных корней и выдвинул проблему приводимости, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения двух функций этого рода и многое другое..

Давайте вспомним что же называется системой координат?



Системой координат называется совокупность одной, двух, трех или более пересекающихся координатных осей.

Точки, в которой эти оси пересекаются– **начало координат** .

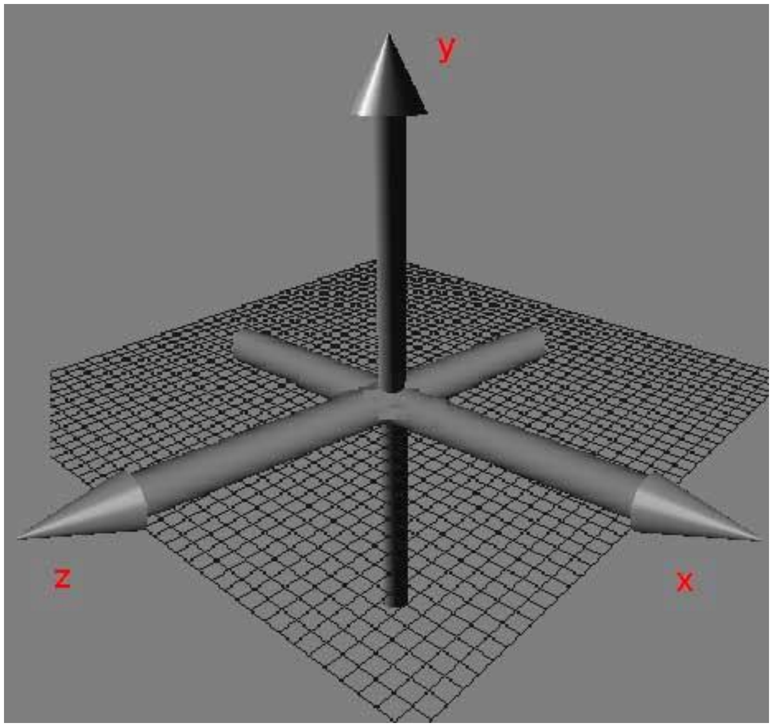
Если в качестве координатных осей берутся прямые, перпендикулярные друг другу, то система координат называется

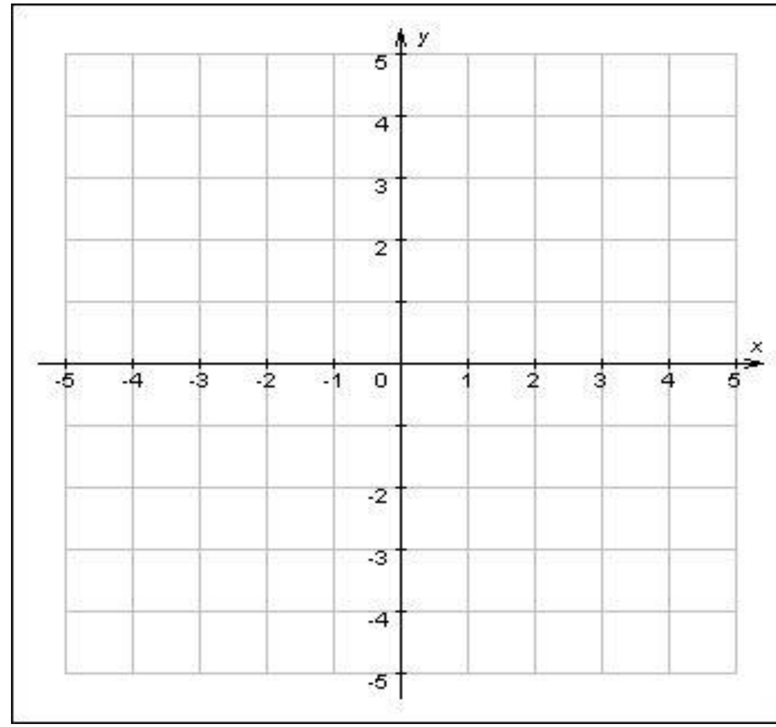
прямоугольной *(или* ***ортогональной****)*

Прямоугольная система координат, в которой единицы измерения по всем осям равны друг другу, называется

ортонормированной (декартовой)

В элементарной математике чаще всего рассматривается двухмерная или трехмерная декартова система координат



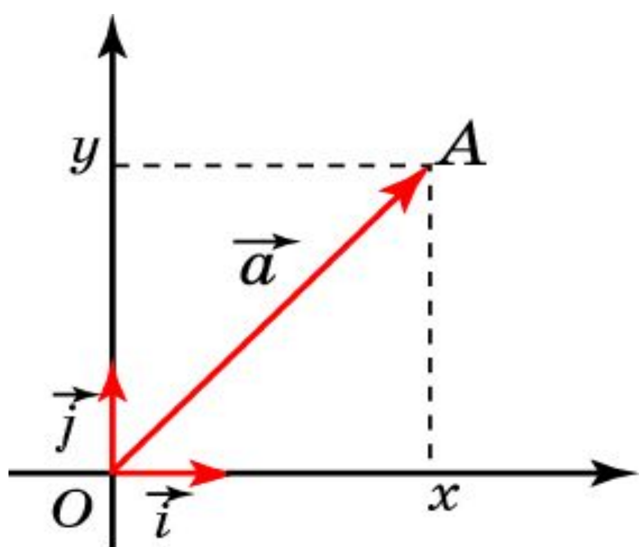


Координаты обычно обозначаются латинскими буквами x, y, z и называются, соответственно, ***абсциссой, ординатой*** *и* ***аппликатой****. Координатная ось OX называется* ***осью абсцисс****, ось OY –* ***осью ординат****, ось OZ –* ***осью аппликат****. Положительные направления отсчета по каждой из осей обозначаются стрелками.*

Координаты вектора

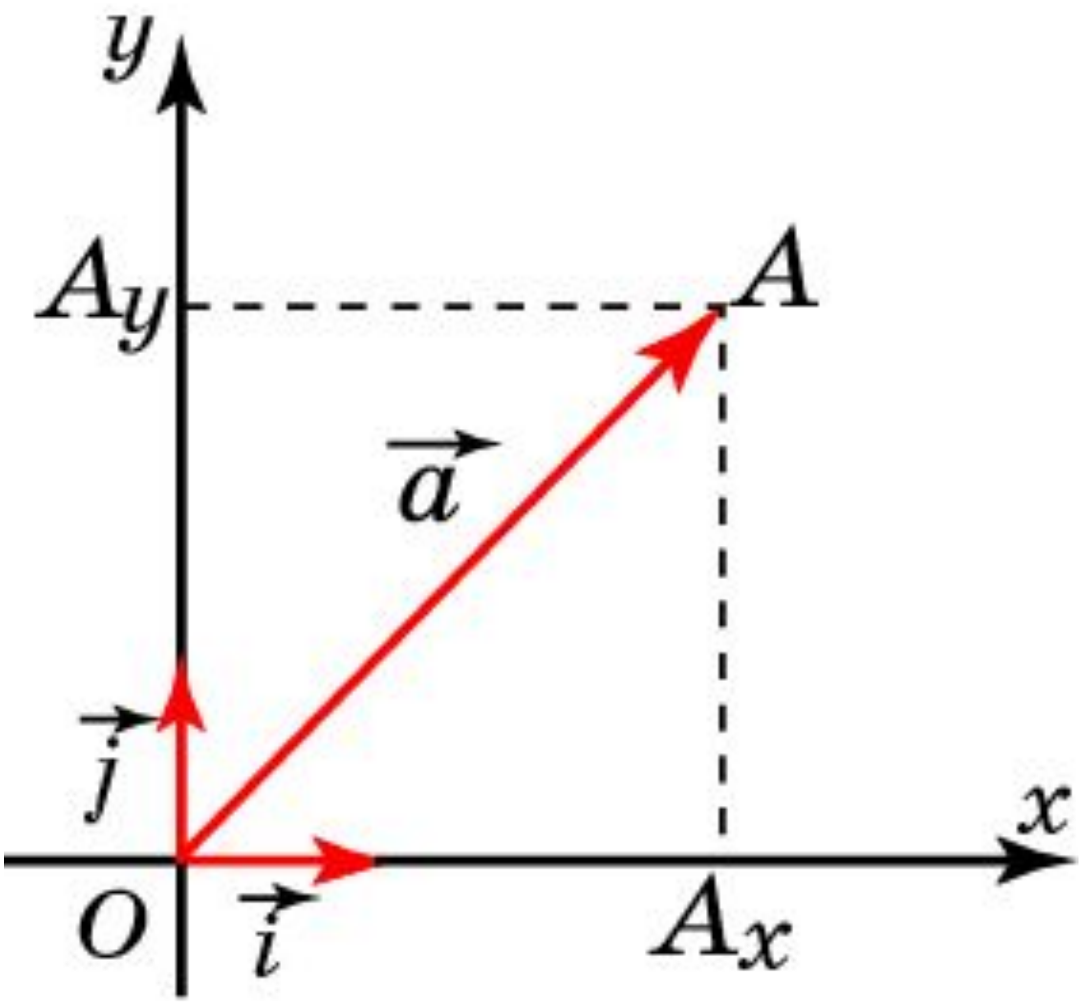
Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Определим понятие координат вектора. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора**.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторы с координатами (1, 0), (0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем рисовать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



Теорема

Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда он представим в виде ***a = xi + yj***



Пример

Выразите длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Решение: Длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ равна длине отрезка A_1A_2. Используя формулу длины отрезка, получаем

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Упражнение 1

Назовите координаты векторов:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j};$

б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j};$

в) $\vec{c} = -3\vec{j};$

г) $\vec{d} = -5\vec{i}.$

Упражнение 2

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (-3, 5), (2, 3) соответственно.

Упражнение 3

Выразите длину вектора $\vec{a}$ через его координаты (x, y).

Ответ: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Упражнение 4

Найдите координаты точки *N*, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4, -3) и точка *M* – (1, -3).

Упражнение 5

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) *A* (2, -6), *B* (-5, 3);

б) *A* (1, 3), *B* (6, -5);

в) *A* (-3, 1), *B* (5, 1).

Упражнение 6

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (*a*, *b*). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

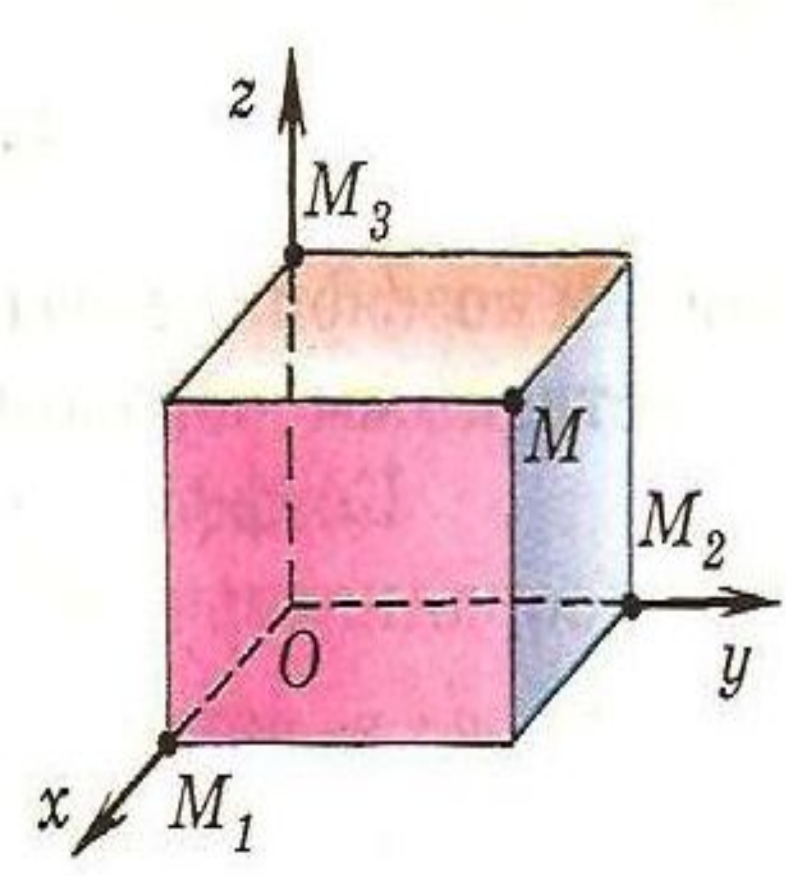
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2$$

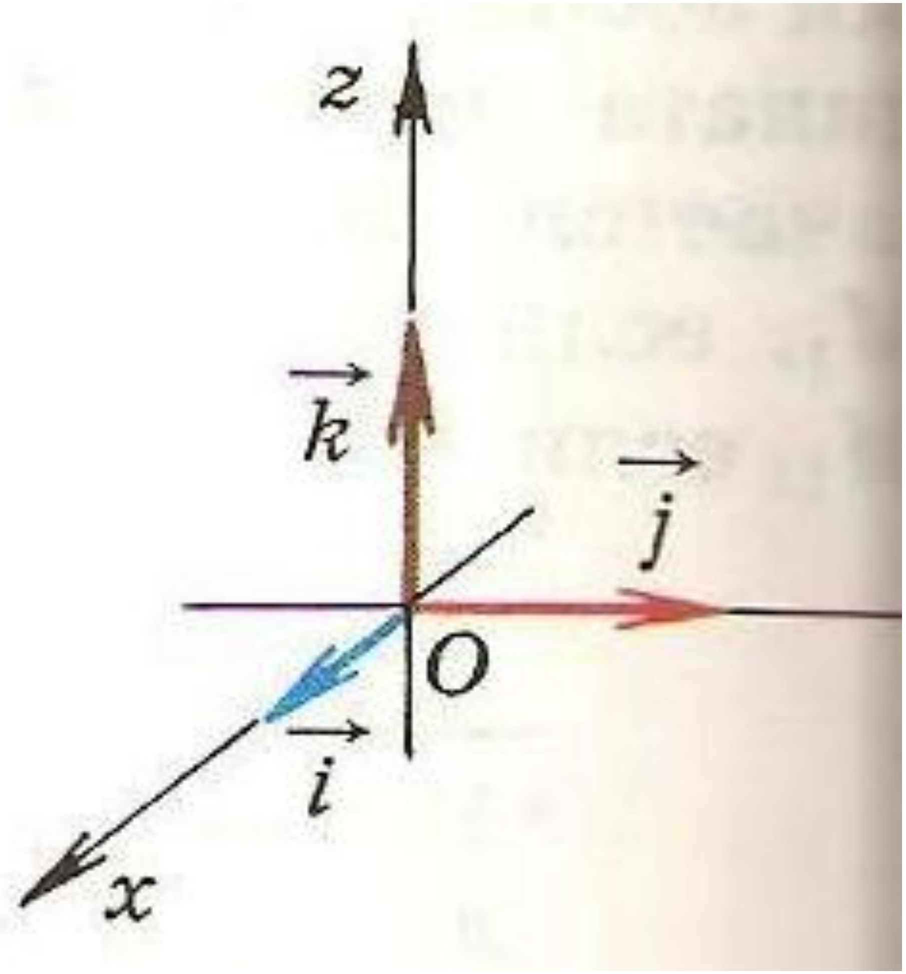
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Координаты точки



- Каждая точка в пространстве задаётся тройкой чисел (x,y,z) называемых координатами точки в пространстве

Координаты вектора



- Векторы (i. j. k) единичные векторы
- Любой вектор можно разложить по координатным векторам

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Назад

Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{-6;\ 9\}$ $\vec{b}\ \{-1;\ 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6\cdot(-1) + 9\cdot 0 = 6$$

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\qquad$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot22 + 0\cdot1 + 4\cdot8 = 32$$

Пример №3

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\{1; 7; 9\}$ $\vec{b}\{-2; 4; 0\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-2) + 7\cdot 4 + 9\cdot 0 = 26$$

Проверочная работа

1. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{1;\ 10;\ 7\}$ $\qquad$ $\vec{b}\,\{0;\ 7;\ 0\}$

Проверочная работа

2. Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\,\{7;\ 25;\ 0\}$ $\vec{b}\,\{11;\ 0;\ 54\}$

Проверочная работа

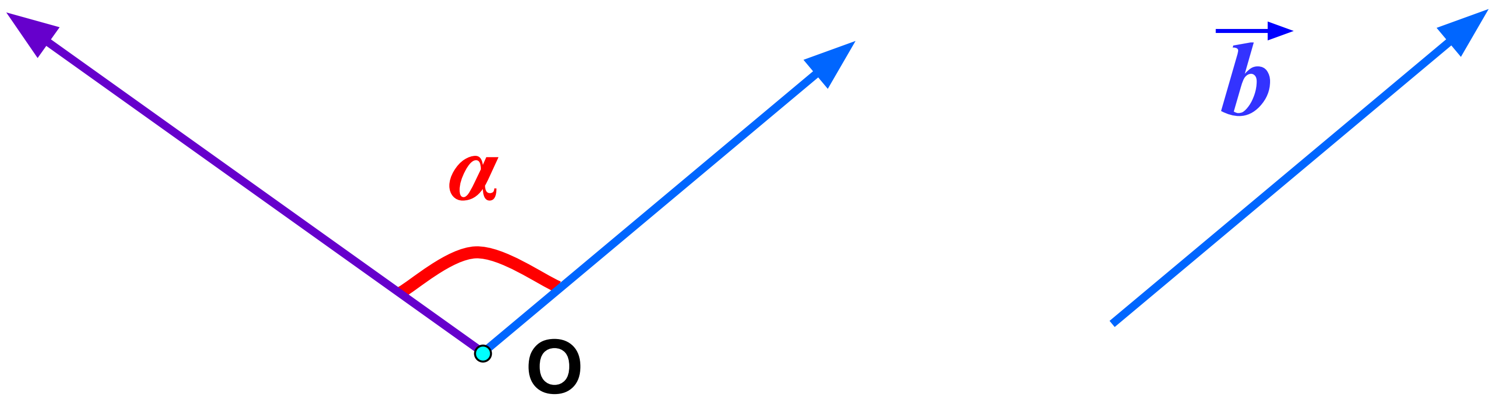
3. Найти скалярное произведение векторов:

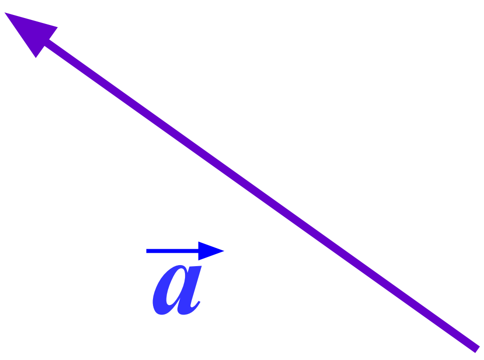
$\vec{a}\,\{-1;\,2;\,8\}$ $\qquad$ $\vec{b}\,\{5;\,5;\,0\}$

Скалярное произведение векторов

(через длину векторов и угол между ними)

Угол между векторами

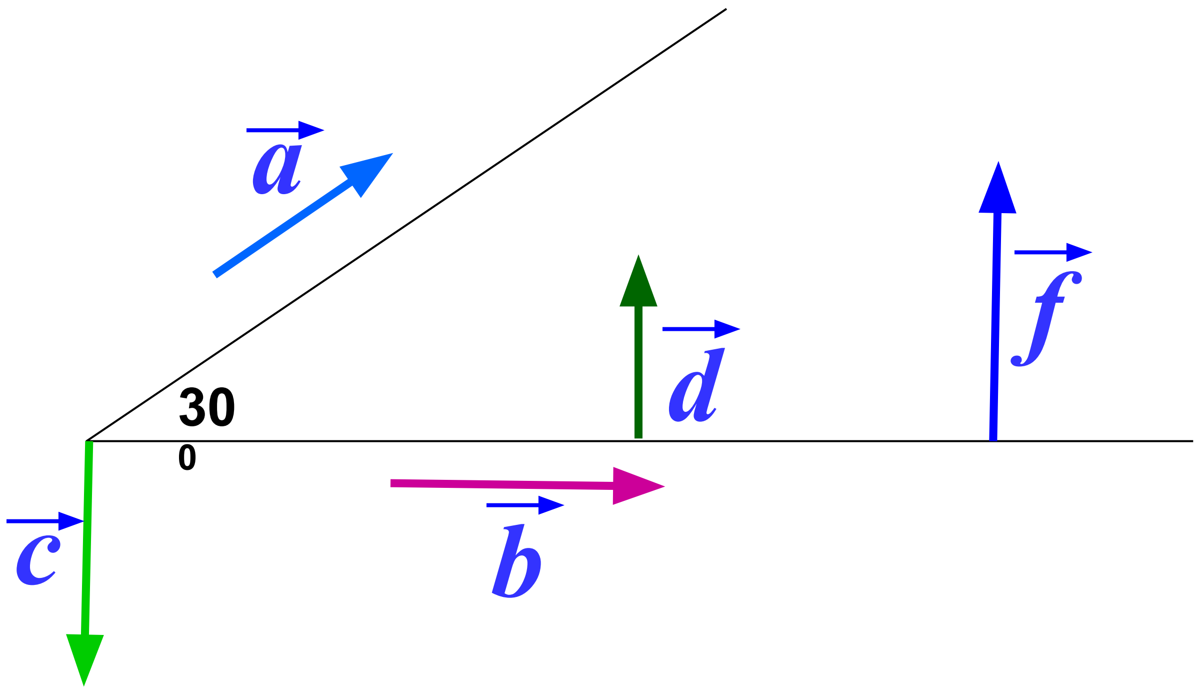




Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α.

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$$

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$$

$$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$$

$$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$$

$$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$$

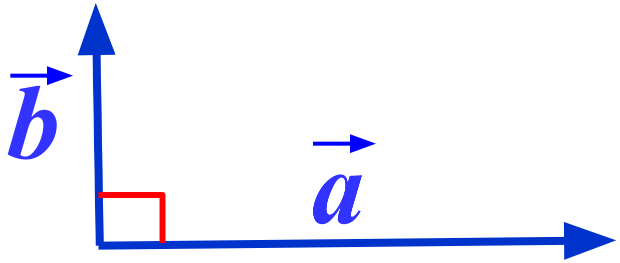
Определение

<u>**Скалярным произведением**</u> **двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Частный случай №1



$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 90^0$$

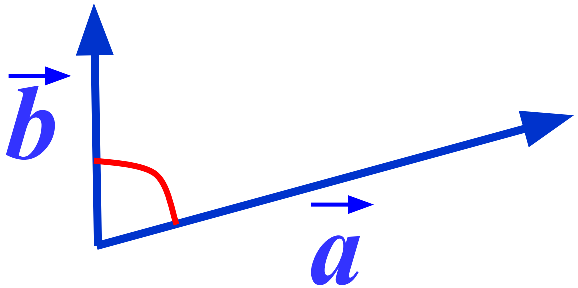
$$= 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Частный случай №2



$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$

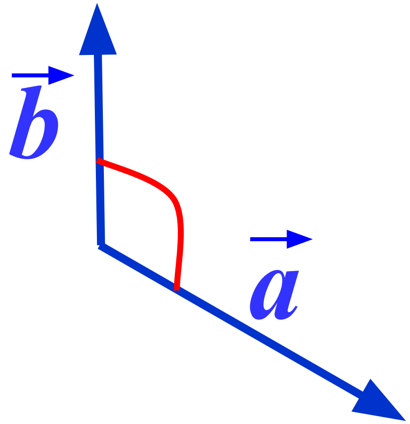
> 0

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

Частный случай №3



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

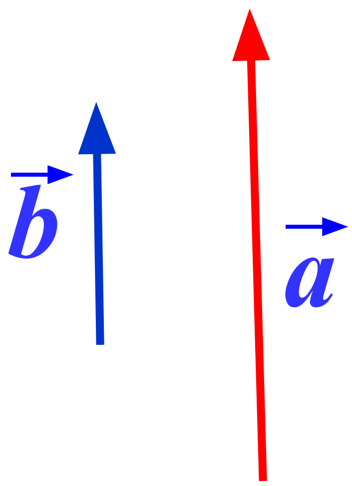
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

$$< 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

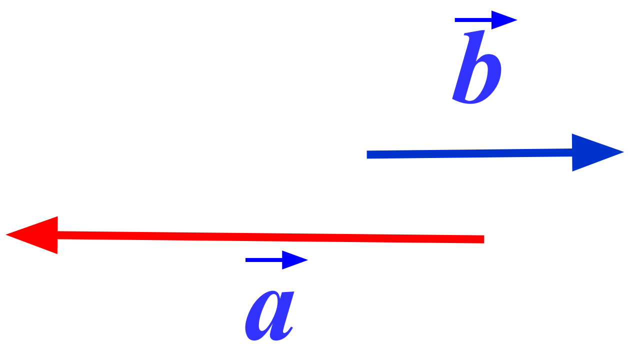
Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

$$1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



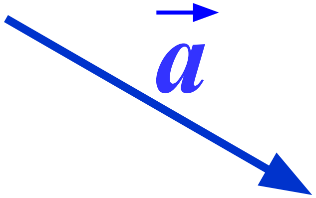
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

$$-1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{a}} = 0^0$$



$\vec{a}$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overbrace{\cos 0^0}^{1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Задача

Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$