



Дифференциальные уравнения

- 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (примеры)**
- 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами (примеры).**

1) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (примеры)

Задание 1. Найти общий решение ДУ: $(x + 1)^3 dy - (y - 2)^2 dx = 0$

Поделим обе части на чтобы разделить переменные: $(x + 1)^3 \cdot (y - 2)^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{(y - 2)^2} - \frac{dx}{(x + 1)^3} = 0 \quad \text{Проинтегрируем обе части:}$$

$$\int \frac{dy}{(y - 2)^2} - \int \frac{dx}{(x + 1)^3} = C \quad (C - \text{const}) \Rightarrow$$

$$\int (y - 2)^{-2} \cdot d(y - 2) - \int (x + 1)^{-3} \cdot d(x + 1) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{y - 2} + \frac{1}{2(x + 1)^2} = C \quad - \text{Общее решение ДУ}$$

2. $y = y' \cos^2 x \ln y$

Перепишем уравнение, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{dy}{dx} \cos^2 x \ln y \quad | \cdot dx$$

$$y dx = \cos^2 x \ln y dy \quad | : y \cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \ln y \cdot \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y dy}{y} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \int \ln y d(\ln y) \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln^2 y + C - \text{общий интеграл}$$

3.

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$$

Приведем уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, вынося общие множители за скобки:

$$y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0 \quad | : (yx)$$

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1+x}{x}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = C \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy = C \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int dx + \int \frac{dy}{y} - y = C \Rightarrow$$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C \text{ - общий интеграл}$$

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами (примеры).

Таковыми уравнениями называются уравнения вида:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

в котором все члены имеют первую степень относительно функции и её производных, а коэффициенты

$$a, b, c - \text{постоянные} \quad (a \neq 0)$$

Для отыскания общего решения уравнения составляется характеристическое уравнение:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (2)$$

Которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями r , причем сама эта функция заменяется единицей.

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

где y_1 и y_2 - линейно независимые частные решения уравнения (1),

а C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Строится общее решение в зависимости от дискриминанта D квадратного уравнения (2):

1) $D > 0$

В этом случае имеем 2 различных действительных корня r_1 и r_2 , и общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) $D = 0$

В этом случае имеем единственный действительный корень r_0 , и общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}$$

3) $D < 0$

В этом случае имеем пару комплексных сопряженных корней

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad \text{где } i = \sqrt{-1} \text{ - мнимая единица, } \alpha \text{ и } \beta \text{ - действительные числа.}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Примеры выделения чисел α и β :

$$\begin{aligned} 1. \quad r_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{-5} = -2 \pm \sqrt{5 \cdot (-1)} = -2 \pm \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \\ &= -2 \pm \sqrt{5} \cdot i \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2, \quad \beta = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad r_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad \Rightarrow \\ \alpha &= \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Примеры интегрирования уравнений

1. $y'' - 5y' - 6y = 0$, $y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 5r - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 6 \\ r_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow D > 0$$

Имеем случай 1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$ - общее решение

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$, $y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \Rightarrow D = 0.$$

Имеем случай 2). Общее решение запишется:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$$

3. $\frac{d^2 S}{dt^2} - 6 \frac{dS}{dt} + 13S = 0$, $S = S(t)$.

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 6r + 13 = 0, \quad D = 36 - 52 = -16 < 0. \text{ Имеем случай 3).}$$

$$r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6}{2} \pm \frac{4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 2.$$

Общее решение:

$$S = e^{3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

4. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$
с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Найдём общее решение. Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2r + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow$$

имеем 2 комплексных корня

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -\frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm i \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 1$$

Общее решение:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad - \quad *$$

$$y' = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

В эти 2 равенства подставляем 2 начальных условия

$$x = 0, \quad y = 1 \quad x = 0, \quad y' = 1:$$

$$\begin{cases} 1 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) \\ 1 = e^0(C_2 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в общее решение $(*)$:

$$y = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x) \quad - \text{ искомое частное решение.}$$