Дифференциальные уравнения

1. **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (примеры)**
2. **Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами (примеры).**

1) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (примеры)

Задание 1. Найти общий решение ДУ: $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$

Поделим обе части на чтобы разделить переменные: $(x+1)^3 \cdot (y-2)^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{(y-2)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} = C \quad (C - const) \Rightarrow$$

$$\int (y-2)^{-2} \cdot d(y-2) - \int (x+1)^{-3} \cdot d(x+1) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = C$$

- Общее решение ДУ

2. $y = y' \cos^2 x \ln y$

Перепишем уравнение, заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{dy}{dx}\cos^2 x \ln y \quad \Big| \cdot dx$$

$$ydx = \cos^2 x \ln y \, dy \quad \Big| \; : y\cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \ln y \cdot \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y dy}{y} \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}x = \int \ln y d(\ln y) \Rightarrow \mathrm{tg}x = \frac{1}{2}\ln^2 y + C$$ - общий интеграл

3. $$(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$$

Приведем уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, вынося общие множители за скобки:

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0 \qquad |:(yx)$$

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0 \;\Rightarrow\; \int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C \;\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C \;\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int dx+\int\frac{dy}{y}-y=C \;\Rightarrow$$

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$$ - общий интеграл

1.Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами (примеры).

Такими уравнениями называются уравнения вида:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

в котором все члены имеют первую степень относительно функции и её производных, а коэффициенты

a, b, c - постоянные $(a \neq 0)$

Для отыскания общего решения уравнения составляется **<u>характеристическое</u>** уравнение:

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями r, причем сама эта функция заменяется единицей.

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

где y_1 и y_2 - линейно независимые частные решения уравнения **(1)**,

а C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Строится общее решение в зависимости от дискриминанта D квадратного уравнения **(2):**

1) $D > 0$

В этом случае имеем 2 различных действительных корня r_1 и r_2 , и общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) $D = 0$

В этом случае имеем единственный действительный корень r_0 , и общее решение имеет вид: $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}$

3) $D < 0$

В этом случае имеем пару комплексных сопряженных корней

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, α и β - действительные числа.

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x} \cdot \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

<u>Примеры выделения чисел α и β :</u>

1. $r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-5} = -2 \pm \sqrt{5 \cdot (-1)} = -2 \pm \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} =$

$= -2 \pm \sqrt{5} \cdot i \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2, \ \ \beta = \sqrt{5}$

2. $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad \Rightarrow$

$\alpha = \dfrac{1}{2}, \ \ \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Примеры интегрирования уравнений

1. $y'' - 5y' - 6y = 0 \quad , \; y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 5r - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} r_1 = 6 \\ r_2 = -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad D > 0$$

Имеем случай 1) $\quad y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$ - общее решение

2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad , \quad y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -2 \Rightarrow D = 0.$$

Имеем случай 2). Общее решение запишется:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

3. $\dfrac{d^2S}{dt^2} - 6\dfrac{dS}{dt} + 13S = 0 \quad , \; S = S(t).$

Характеристическое уравнение:

$r^2 - 6r + 13 = 0, \qquad D = 36 - 52 = -16 < 0.$ Имеем случай 3).

$$r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6}{2} \pm \frac{4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2i \;\Rightarrow\; \alpha = 3, \; \beta = 2.$$

Общее решение:

$$S = e^{3t}\left(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\right)$$

4. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$

с начальными условиями $y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$

Найдём общее решение. Характеристическое уравнение:

$r^2 + 2r + 2 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0 \;\Rightarrow$

имеем 2 комплексных корня

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -\frac{2}{1} \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm i \;\Rightarrow\; \alpha = -1, \; \beta = 1$$

Общее решение:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) \quad - \quad *$$

$$y' = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x}\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right)$$

В эти 2 равенства подставляем 2 начальных условия

$$x = 0,\ y = 1 \qquad x = 0,\ y' = 1:$$

$$\begin{cases} 1 = e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) \\ 1 = e^0\left(C_2 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0\left(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в общее решение $(*)$:

$y = e^{-x}\left(\cos x + 2\sin x\right)$ - искомое частное решение.