Движение абсолютно твёрдого тела

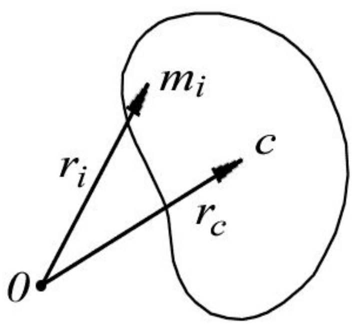
1. ***Момент силы***
2. ***Момент инерции***
3. ***Момент импульса***
4. ***Основной закон динамики вращательного движения***
5. ***Закон сохранения момента импульса***
6. ***Работа и энергия***
7. ***Условия равновесия АТТ***

Динамика движения АТТ

Любое сложное движение тела можно рассматривать как совокупность поступательного перемещения в трёхмерном пространстве и вращения вокруг трёх координатных осей.

Центр масс тела (системы материальных точек) - ***точка, характеризующая распределение масс в теле или механической системе***.

При движении АТТ его центр масс движется как материальная точка с массой, равной массе всего тела, к которой приложены все силы, действующие на это тело.



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}{m} = \frac{\vec{P}}{m}$$

$$m\vec{V}_c = \vec{P} \qquad m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{внеш}$$

В однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести твердого тела.

Динамические характеристики вращательного движения. Момент силы

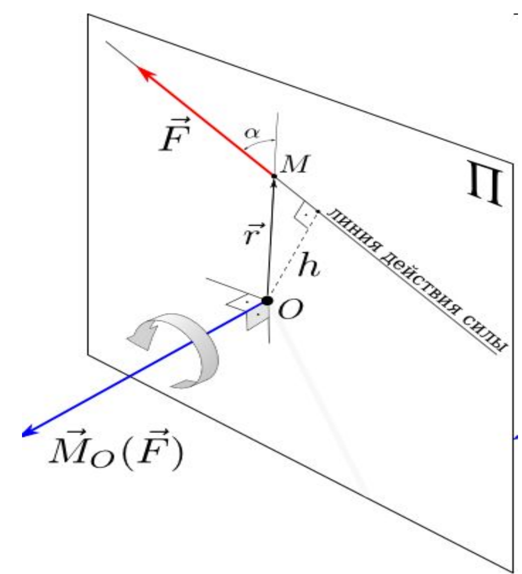
Момент силы относительно оси - ***величина, характеризующая вращательное действие силы и равная векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы на составляющую вектора силы в плоскости перпендикулярной оси вращения.***

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}_{\perp}\right] \qquad [\mathrm{M}] = \text{м}\cdot\text{Н} = \text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-2} = \text{Дж}$$

Направление вектора момента силы определяется правилом буравчика. Модуль вектора момента силы равен произведению перпендикулярной оси составляющей вектора силы на её плечо:

$$M = rF_{\perp}\sin\alpha \qquad M = F_{\perp}h$$

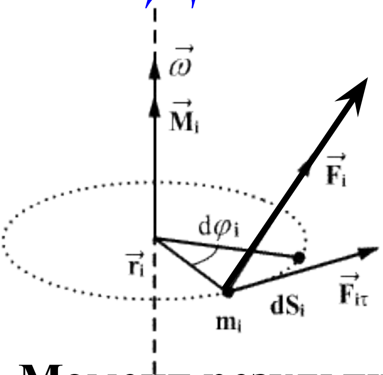
Плечо силы (h)- кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы: $h = r\sin\alpha$



Момент силы равен нулю, если линия действия силы:

- **параллельна оси вращения**
- **пересекает ось вращения**

Динамические характеристики вращательного движения. Момент инерции



Преобразуем II закон Ньютона для материальной точки:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_p}{m} \Rightarrow \varepsilon \cdot r = \frac{F_p r}{mr} \Rightarrow \varepsilon = \frac{M_p}{mr^2}$$

Момент результирующей действующих на тело сил относительно некоторой оси равен векторной сумме моментов сил, приложенных к телу, относительно данной оси.

$$\vec{M}_p = \left[\vec{r}\vec{F}_{p\perp}\right] = \sum \vec{M}_i$$

Момент инерции материальной точки - ***скалярная величина, характеризующая её инертные свойства во вращательном движении и равная произведению массы на квадрат расстояния до оси вращения.***

$$I = mr^2$$

Угловое ускорение материальной точки прямо пропорционально результирующему моменту действующих на неё сил и обратно пропорционально моменту инерции.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_p}{I} = \frac{\sum \vec{M}_i}{I}$$

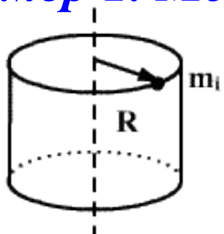
Момент инерции твердого тела

Момент инерции тела, ***мера его инертности во вращательном движении, равен сумме моментов инерции всех материальных точек, составляющих данное тело*****.**

Момент инерции зависит от распределения массы тела относительно оси вращения, т.е. зависит от положения оси вращения.

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad I = \int r^2 dm \qquad I = \int \rho r^2 dV$$

Пример 1. Момент инерции полого тонкостенного цилиндра радиусом R относительно его оси



$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

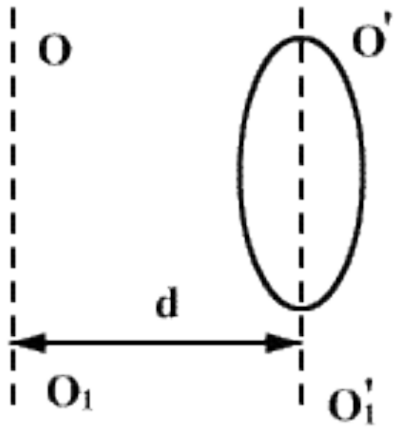
Пример 2. Момент инерции сплошного однородного цилиндра (диска) относительно его оси

Сплошной цилиндрический диск высотой h , радиусом R , массой m, плотностью ρ.
Элемент массы- тонкостенный цилиндр радиусом r , толщиной стенки dr , массой dm.

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho dV \qquad dm = 2\pi r h \rho dr$$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 2\pi r h \rho dr = 2\pi h \rho \int r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi \rho h R^4 = \tfrac{1}{2} mR^2$$

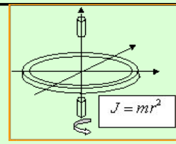
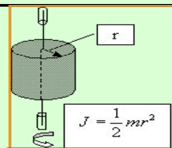
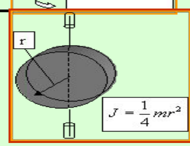
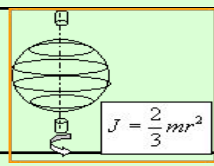
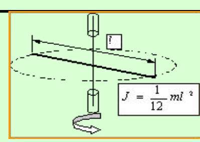
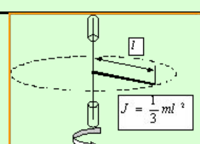
Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси. Теорема Штейнера

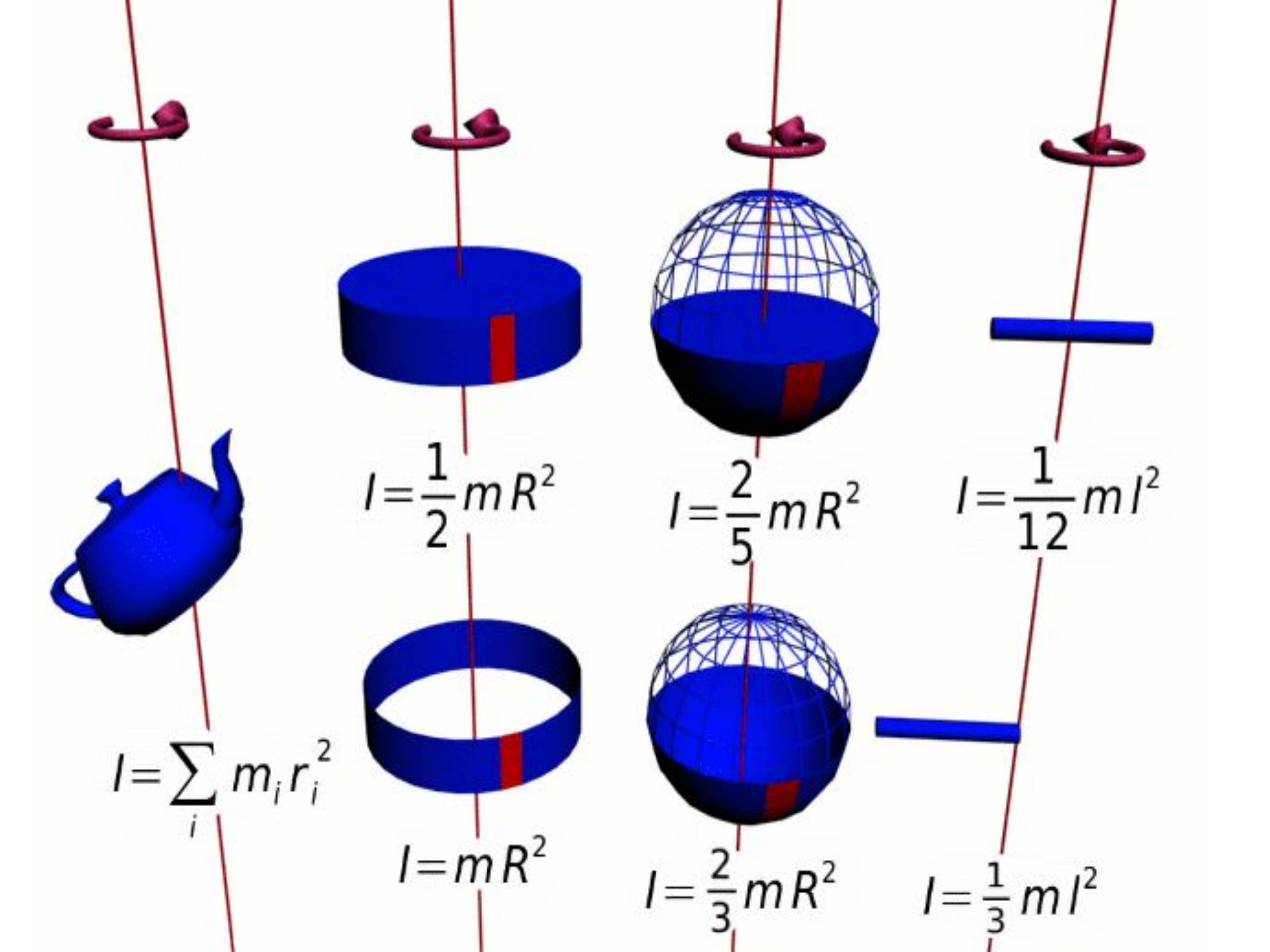


$$I = I_0 + md^2$$

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями .

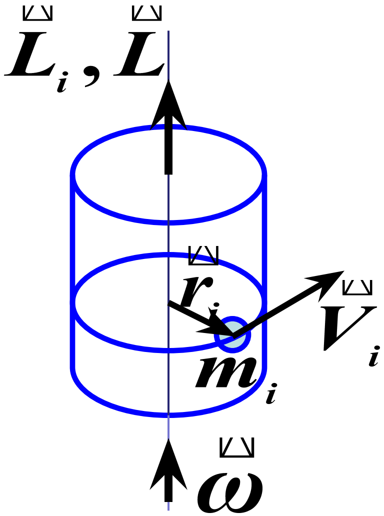
Моменты инерции некоторых тел

Тело	Положение оси	Момент инерции
Тонкостенный цилиндр 	Центр инерции, параллельно образующей	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр, диск 	Центр инерции, параллельно образующей	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Сплошной цилиндр, диск 	Центр инерции, параллельно диаметру	$J = \frac{1}{4}mR^2$
Шар 	Центр инерции	$J = \frac{2}{5}mR^2$
Тонкостенная сфера	Центр инерции	$J = \frac{2}{3}mR^2$
Стержень 	Центр инерции, перпенди-кулярно стержню	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Стержень 	Конец, перпенди-кулярно стержню	$J = \frac{1}{3}ml^2$



$I=\frac{1}{2}mR^2$
$I=\frac{2}{5}mR^2$
$I=\frac{1}{12}ml^2$
$I=\sum_i m_i r_i^2$
$I=mR^2$
$I=\frac{2}{3}mR^2$
$I=\frac{1}{3}ml^2$

Динамические характеристики вращательного движения. Момент импульса



Момент импульса материальной точки ***относительно оси- векторная характеристика вращательного движения, равная векторному произведению её радиуса- вектора на вектор импульса.***

$$\vec{P}_i = m_i \vec{V}_i \qquad \vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{P}_i\right] = \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i\right]$$

$$V_i = r_i \omega \qquad L_i = r_i m_i V_i = m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

Момент импульса абсолютно твёрдого тела (системы материальных точек) равен сумме моментов импульса всех составляющих его материальных точек:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega} = I\vec{\omega} \qquad \vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$$

Момент импульса АТТ ***относительно некоторой оси равен произведению его момента инерции относительно данной оси на вектор угловой скорости.***

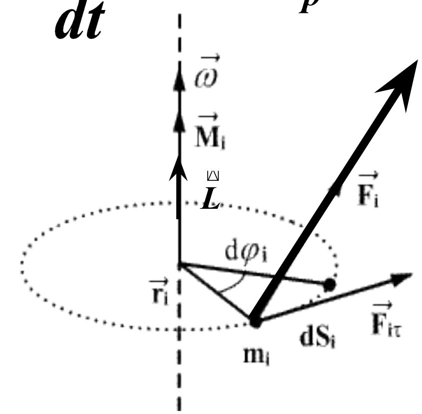
Основной закон динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Угловое ускорение, приобретаемое телом, при вращении вокруг неподвижной оси прямо пропорционально результирующему моменту действующих на тело сил и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно данной оси.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_p}{I} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{M}_p}{I} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}_p$$

Момент импульса АТТ: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_p$$



Скорость изменения момента импульса тела равна суммарному моменту всех действующих на него сил.

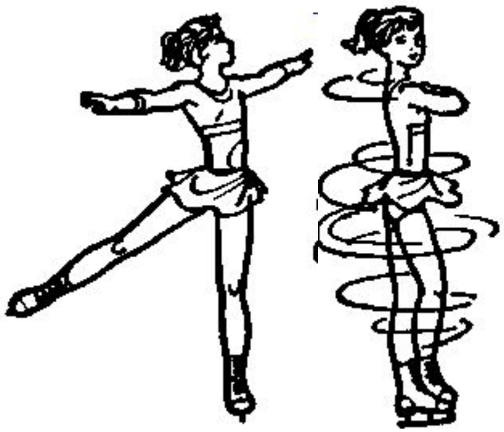
Закон сохранения момента импульса

Экспериментально, XVIII в., Эйлер.
В XX в. теоретически обоснована связь закона сохранения момента импульса с изотропностью пространства Нашей Вселенной.

$$\sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{i\,внутр.} + \sum \vec{M}_{i\,внеш.}$$

$$\sum \vec{M}_{i\,внутр.} = 0 \Longrightarrow \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{i\,внеш.}$$

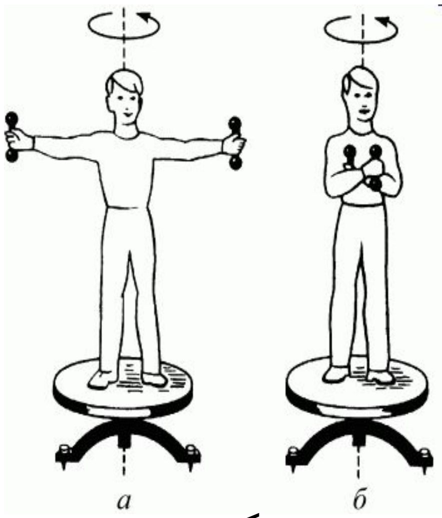
Для замкнутой системы тел:



$$\sum \vec{M}_{i\,внеш.} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0$$

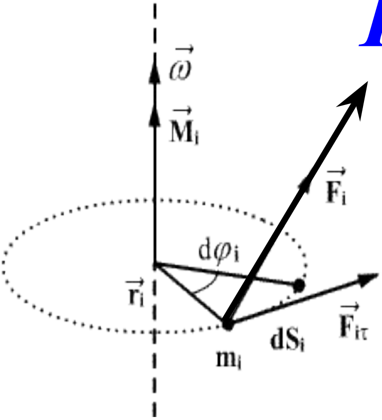
$$\Longrightarrow \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i = const$$



$\omega_а < \omega_б$

Векторная сумма моментов импульсов замкнутой системы тел есть величина постоянная.

Работа внешних сил при вращении твердого тела. Кинетическая энергия вращения



Элементарная работа i-той силы при вращении тела:

$$dA_i = F_{i\tau} dS_i = F_{i\tau} r_i \, d\varphi = M_i d\varphi = M_i \omega dt$$

Элементарная работа равнодействующей при вращении тела:

$$dA = \sum M_i d\varphi = d\varphi \sum M_i = M_p d\varphi = M_p \omega dt$$

Работа равнодействующей всех сил при вращении тела: $A = \int M_p d\varphi = \int M_p \omega dt$

Кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех составляющих его материальных точек.

$$W_{к\ пост} = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} \qquad V_i = \omega r_i \qquad W_{к\ вр} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

В общем случае любое сложное движение АТТ можно представить как сумму двух движений: поступательного со скоростью, равной скорости центра инерции тела V_c, и вращательного с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции.

$$W_{кин\ АТТ} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

Аналогия между величинами и соотношениями, характеризующими поступательное и вращательное движения

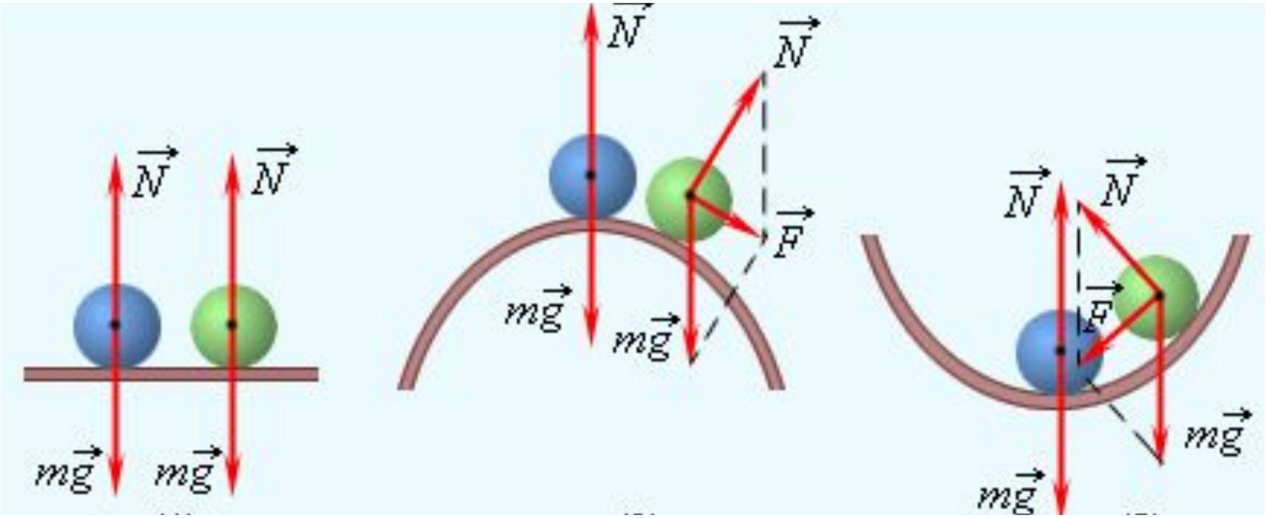
Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	S	Угол поворота	φ
Скорость	$\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$
	$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$ $S = \upsilon_0 t \pm \dfrac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t \upsilon\, dt$		$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega\, dt$

Поступательное движение		Вращательное движение	
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \mathrm{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты h			
$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$			

Условия равновесия тел

Виды равновесия

Безразличное	***Неустойчивое***	***Устойчивое***
При любых малых отклонениях от положения равновесия равновесие не нарушается .	**При любых малых отклонениях от положения равновесия возникают силы, смещающие тело от начального положения.**	**При любых малых отклонениях от положения равновесия возникают силы, которые стремиться возвратить тело в начальное положение.**

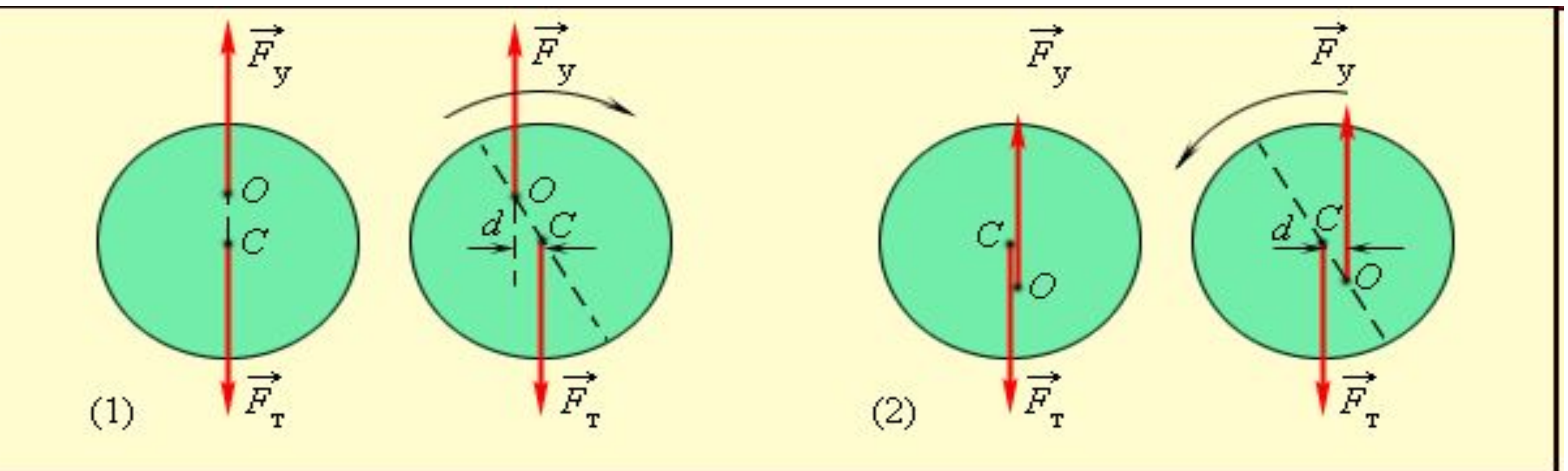


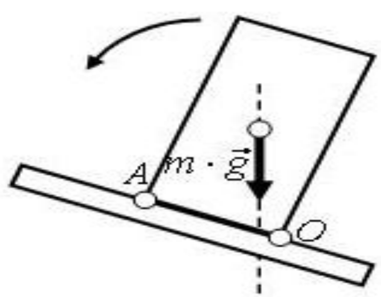
Условия равновесия тела имеющего неподвижную ось вращения:

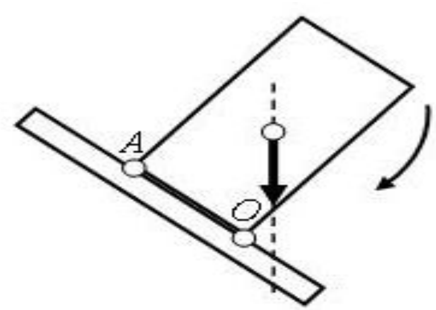
безразличное равновесие - ось вращения проходит через центр масс

устойчивое равновесие - центр масс находится ниже оси вращения

неустойчивое равновесие –центр масс расположен выше оси вращения







Условия равновесия твёрдого тела

Твердое тело находится в равновесии, если равны нулю равнодействующая приложенных к телу сил и векторная сумма моментов всех сил относительно произвольной оси.

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_p = \sum \vec{M}_i = 0$$