

Моделирование сетей в ГИС

Примеры поиска оптимальных маршрутов

- Ключевой задачей моделирования сетей является задача поиска оптимального пути на ациклическом ориентированном графе (сети). В качестве параметра оптимизации может фигурировать длина пути (расстояния), время или стоимость перемещения.

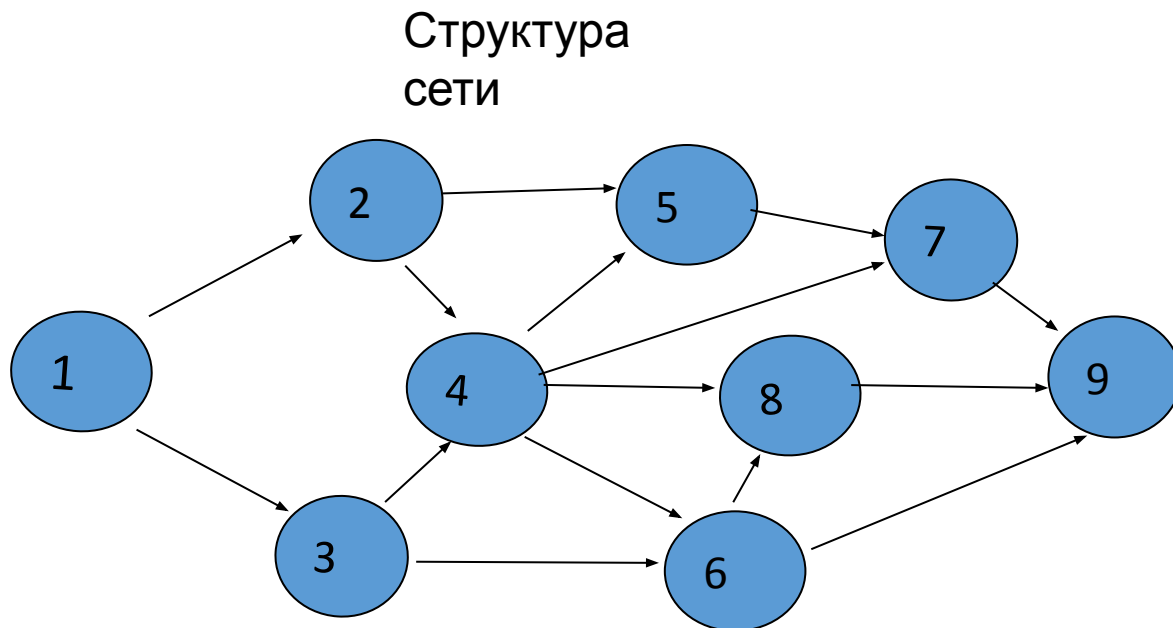
Граф состоит из множества узлов и множества соединяющих узлы дуг. Узлы будем нумеровать целыми числами от 1 до n .

- Дугу выходящую из узла i и входящую в узел j будем обозначать (i,j) .
- Для каждой дуги (i,j) задано значение параметра оптимизации t_{ij} (в частности, стоимость проезда из i в j).
- Путем (i_1, i_2, \dots, i_n) называется конечная последовательность узлов, каждая пара которых соединена дугами.

Пример ориентированной ациклической сети

Таблица стоимости дуг

i	j	t_{ij}
1	2	1
1	3	2
2	4	6
2	5	12
3	4	3
3	6	4
4	5	4
4	6	2
4	7	15
4	8	7
5	7	7
6	8	7
6	9	15
7	9	3
8	9	10



В ориентированной ациклической сети (как и в дереве) всегда можно пронумеровать узлы таким образом, что для каждой дуги (i,j) будет выполняться неравенство $i < j$.

Алгоритм прямой проходки

- T_i – стоимость проезда до i узла.
- t_{ij} – стоимость проезда из узла i в узел j (стоимость дуги (i,j)).
- Условие $i < j$ позволяет упростить последовательный перебор вершин.

Начало: $n=9$

1. Положить $T_1 = 0$; $T_j = \infty$ для $j=2, 3, \dots, n$;
 $i=1$.
2. Для каждой дуги (i,j) , исходящей из узла i вычислить
$$T_j = \min \{T_j, T_i + t_{ij}\}$$
3. Если $i=n-1$ то Конец; $i=i+1$; на 2.

Конец.

Примечание. В результате решения будет найдена не только стоимость самого дешевого проезда из узла 1 в узел 9 (T_9), но и построен соответствующий путь (маршрут) ведущий из узла 1 в узел 9.

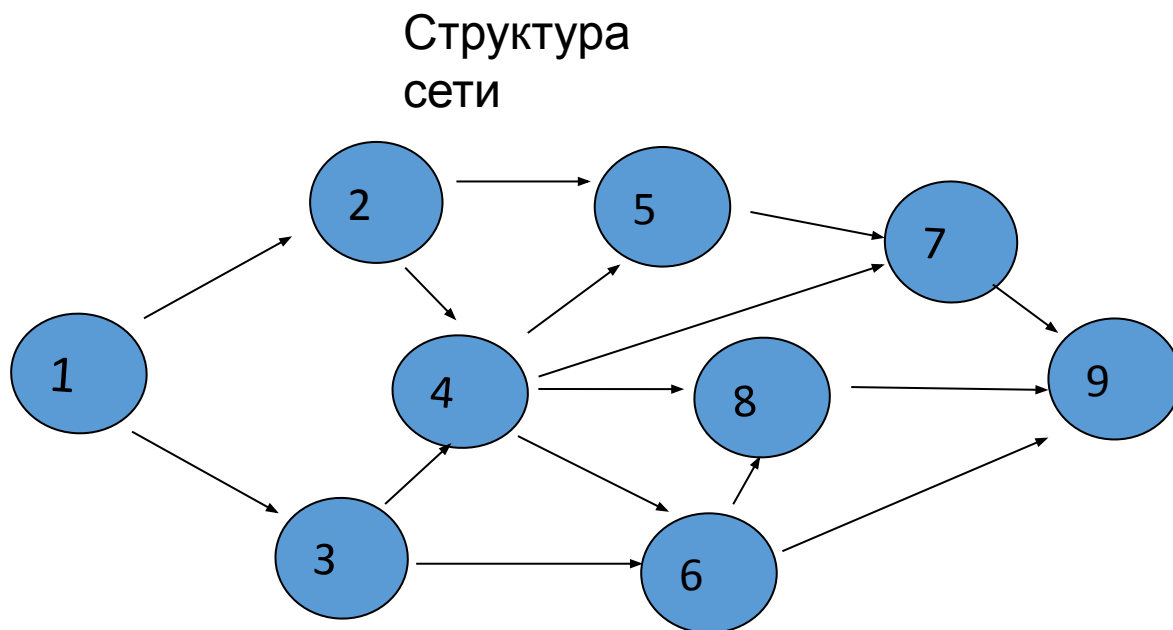
Для поиска самого дорогого (длинного) пути достаточно положить

$T_k = -\infty$ и заменить \min на \max в 2.

Пример решения задачи поиска оптимального пути на ориентированной ациклической сети

Таблица стоимости дуг

i	j	t_{ij}
1	2	1
1	3	2
2	4	6
2	5	12
3	4	3
3	6	4
4	5	4
4	6	2
4	7	15
4	8	7
5	7	7
6	8	7
6	9	15
7	9	3
8	9	10



Результат решения

J (текущ)	T_j	i (пред)
2	1	1
3	2	1
4	5(7)	3(2)
5		
6		
7		
8		
9		

Оптимальный путь восстанавливается по ссылкам при обратном просмотре маршрута из конечной вершины в начальную.

Принцип оптимальности

- Любой отрезок оптимального пути в графе в свою очередь является оптимальным.
- В нашем примере оптимальный путь из 1 в 9 - (1,3,4,5,7,9) следовательно оптимальный путь из 1 в 5 - (1, 3,4,5) , а из 3 в 7- (3,4,5,7)
- **Примечание.** В результате решения для каждого узла сети $\{j=2, 3, \dots, 9\}$ найден оптимальный путь из узла 1.

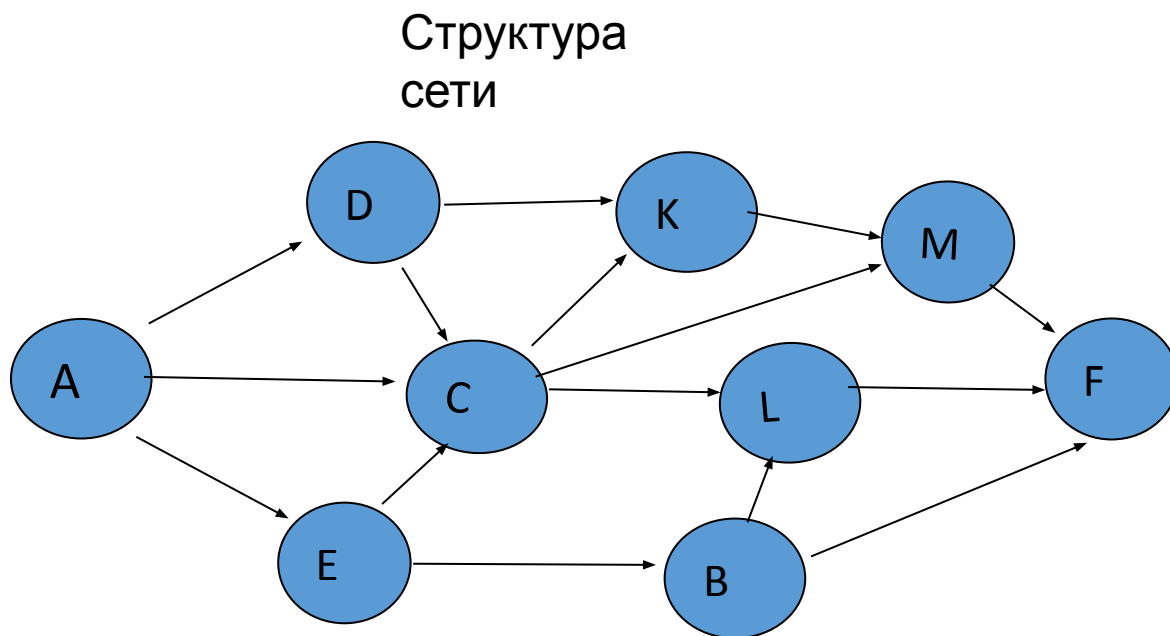
Алгоритмы поиска на ориентированном графе с произвольной идентификацией узлов

1. Поместить исходную вершину маршрута i в список ОТКРЫТ (пометить -); $T_i = 0$.
 2. Если ОТКРЫТ пуст, то решения нет.
 3. Выбрать вершину с минимальным значением T_i из ОТКРЫТ и поместить ее в ЗАКРЫТ (пометить +).
 4. Если i целевая вершина, то на Конец.
 5. Раскрыть вершину i и вычислить для всех ее потомков $\{j^*\}$ оценочную функцию $T_j = T_i + t_{ij}$. Поместить всех ее потомков, которых нет ни в ОТКРЫТ ни в ЗАКРЫТ, в список ОТКРЫТ. Поставит указатель на i в эти вершины.
 6. Для тех j^* , которые уже содержится в ОТКРЫТ или ЗАКРЫТ, сравнить значения оценочных функций T_j и выбрать ту, значение которой меньше, т.е. $T_j = \min(T_j \text{ старое}; T_j \text{ новое})$
 7. Поместить все измененные вершины из ЗАКРЫТ в список ОТКРЫТ (поменять + на -)
- Перейти к шагу 2.
- Конец. Успешное решение. Восстановить цепочку указателей, дающую решение .

Пример ориентированной ациклической сети с произвольной идентификацией узлов

Таблица стоимости дуг

i	j	t_{ij}
A	D	3
A	E	2
A	C	5
D	C	1
D	K	4
E	C	2
E	B	7
C	K	2
C	M	10
C	L	5
B	L	2
B	F	8
K	M	4
L	F	6
M	F	3



Шаг 1

Признак к 0/3 (-/+)	Узел	T_j	Предыдущий узел
-	A	0	
	B		
	C		
	D		
	E		
	F		
	K		
	L		
	M		

Продолжение примера

Шаг 3

О/З (-/+)	Узел	T_j	Пред. узел
+	A	0	
-	D	3	A
-	E	2	A
-	C	5	A

Шаг 5

О/З (-/+)	Узел	T_j	Пред. узел
+	A	0	
-	D	3	A
+	E	2	A
-	C	5	A
-	C	4	E
-	B	9	E

Шаг 6

О/З (-/+)	Узел	T_j	Пред. узел
+	A	0	
-	D	3	A
+	E	2	A
-	C	4	E
-	B	9	E

Задание 2.2. Основное.

- Сформулировать задачу поиска кратчайшего пути для сети состоящей не менее чем из 10 узлов.
- Построить таблицу длин дуг.
- Найти кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 используя алгоритм поиска на ориентированном графе с произвольной идентификацией узлов.
- Оформить результаты решения задачи в виде индивидуального практического задания.