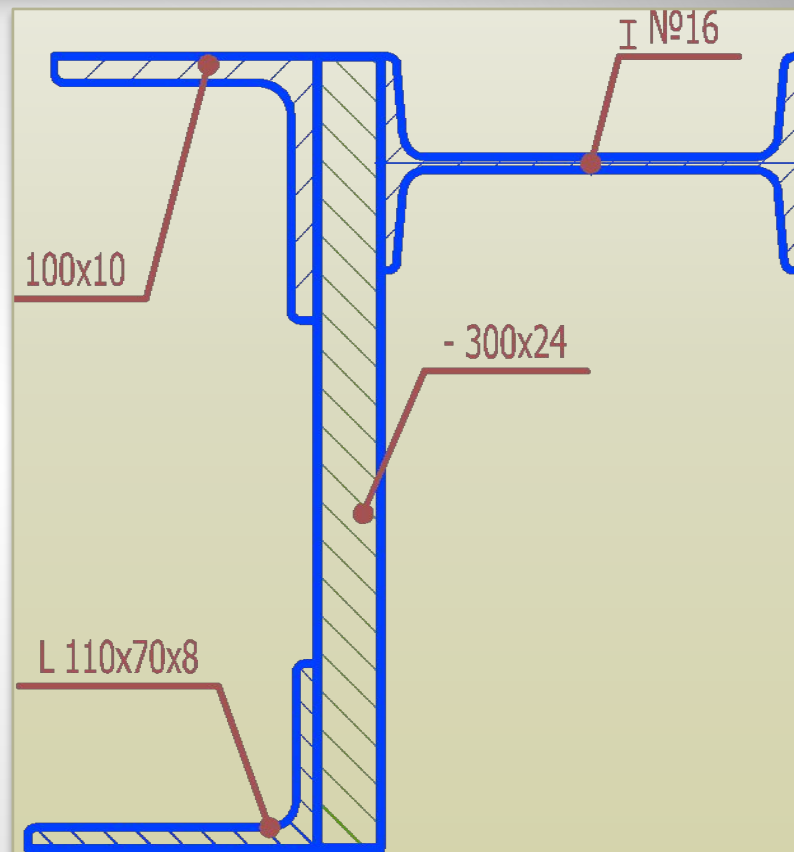


**Тема: Геометрические  
характеристики  
плоских сечений**

Пример выполнения расчетной  
работы

## Пример выполнения расчетной работы

- Для заданного поперечного сечения, состоящего из:
- - вертикального листа 300x24;
- - двутавра №16;
- - неравнополочного уголка 110x70x8;
- - равнополочного уголка 100x100x10



## Требуется:

1. Определить положение центра тяжести;
2. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно случайных центральных осей;
3. Определить главные моменты инерции относительно центральных осей ( $J_1, J_2$ );
4. Определить положение главных центральных осей ( $\alpha_1, \alpha_2$ );
5. Выполнить необходимые проверки;
6. Определить моменты сопротивления;
7. Определить радиусы инерции.

1. Определить положение центра тяжести;  
2. Найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно случайных центральных осей;  
3. Определить главные моменты инерции относительно центральных осей ( $J_1, J_2$ );  
4. Определить положение главных центральных осей ( $\alpha_1, \alpha_2$ );  
5. Выполнить необходимые проверки;  
6. Определить моменты сопротивления;  
7. Определить радиусы инерции.

- 1. Выписываем из сортамента прокатных профилей необходимые характеристики и записываем их в таблицу

№	Размер сечения		F см <sup>2</sup>	центр тяж.		J <sub>x<sub>o</sub></sub> см <sup>4</sup>	J <sub>y<sub>o</sub></sub> см <sup>4</sup>	J <sub>2</sub> <sup>(min)</sup> см <sup>4</sup>	J <sub>1</sub> <sup>(max)</sup> см <sup>4</sup>	b см	tga
				X <sub>o</sub>	Y <sub>o</sub>						
1	300 x	24	72	—	—	5400	34,56	—	—		—
2	L110x70x	8	13,93	3,61	1,64	54,64	171,5	32,31	193,8	11	0,4
3	L100x100x	10	19,24	2,83	2,83	179	178,95	74,08	283,8	10	—
4	Двутавр	16	20,2	—	—	58,6	873	—	—	8,1	—

$$J_{xc2} + J_{yc2} = J_1 + J_2$$

$$J_1 = 54,64 + 171,5 - 32,31 = 193,8 \text{ см}^4$$

- В масштабе вычерчиваем поперечное сечение с указанием основных размеров

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$x_2 = -1,2 - 3,61 = -4,81 \text{ см}$$

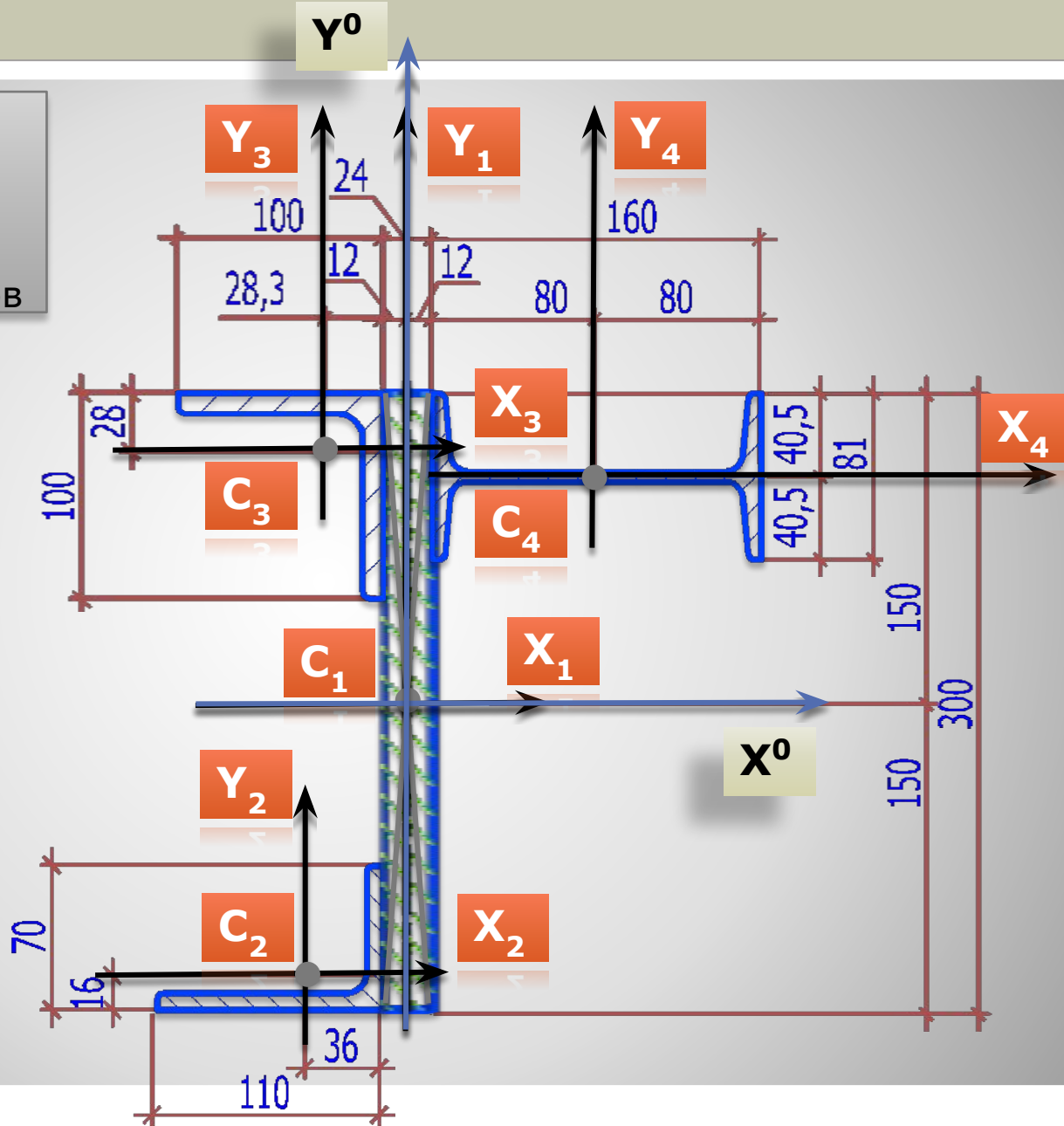
$$y_2 = -15 + 1,64 = -13,36 \text{ см}$$

$$x_3 = -1,2 - 2,83 = -4,03 \text{ см}$$

$$y_3 = 15 - 2,83 = 12,17 \text{ см}$$

$$x_4 = 1,2 + 8 = 9,2 \text{ см}$$

$$y_4 = 15 - 4,05 = 10,95 \text{ см}$$



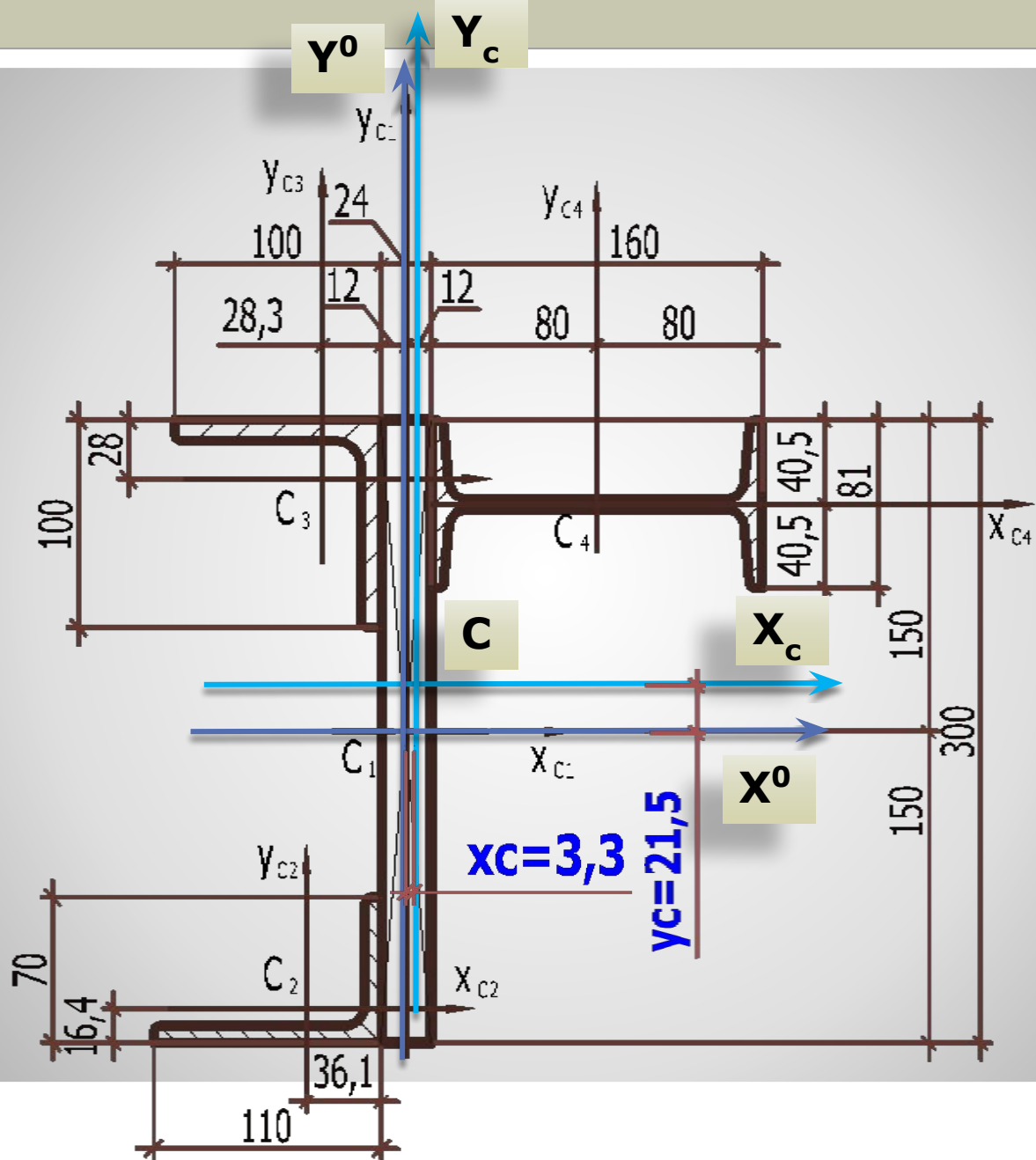
Таблица№2. Расчеты.

№	F <sub>i</sub> , см <sup>2</sup>	Y <sub>i</sub> , см	X <sub>i</sub> , см	S <sub>x<sub>i</sub></sub> , см <sup>3</sup>	S <sub>y<sub>i</sub></sub> , см <sup>3</sup>	a <sub>i</sub> , см	b <sub>i</sub> , см	Проверка	
								S <sub>xc</sub> = a <sub>i</sub> F <sub>i</sub>	S <sub>yc</sub> = b <sub>i</sub> F <sub>i</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	72	0	0	0	0	-2,15	-0,33	-154,62	-23,72
2	13,93	-13,36	-4,81	-186,1	-67	-15,51	-5,14	-216,02	-71,59
3	19,24	12,17	-4,03	234,151	-77,54	10,02	-4,36	192,83	-83,88
4	20,2	10,95	9,2	221,19	185,84	8,80	8,87	177,81	179,19
<b>Σ</b>	<b>125,37</b>			<b>269,236</b>	<b>41,3</b>			<b>0</b>	<b>0</b>

Центр тяжести поперечного сечения

$$x_c = \frac{\sum S_{y_i^0}}{\sum F_i} = \frac{41,3}{125,37} = 0,33 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_i^0}}{\sum F_i} = \frac{269,236}{125,37} = 2,15 \text{ см}$$



## 2. Вычисляем моменты инерции всего сечения относительно центральных осей $x_c, y_c$

### Осевые моменты инерции

$$J_{xc} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 \cdot F_i)$$

$$J_{yc} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 \cdot F_i)$$

$$\begin{aligned} J_{xc} &= (J_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1) + (J_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2) + (J_{x_3} + a_3^2 \cdot F_3) + (J_{x_4} + a_4^2 \cdot F_4) = \\ &= (5400 + (-2,15)^2 \cdot 72) + (54,64 + (-15,51)^2 \cdot 13,03) + \\ &+ (178,95 + (10,02)^2 \cdot 19,24) + (58,6 + (8,80)^2 \cdot 20,2) = 12872 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

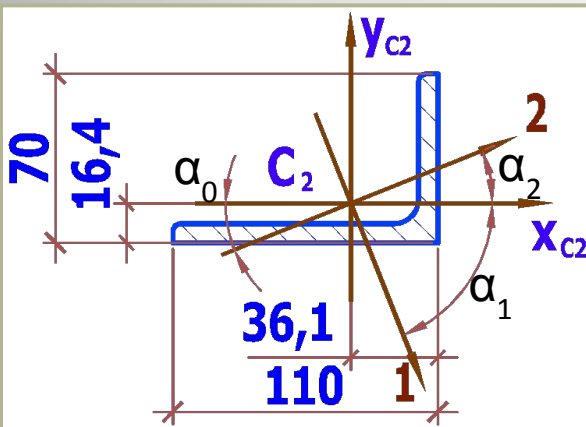
$$\begin{aligned} J_{yc} &= (J_{y_1} + b_1^2 \cdot F_1) + (J_{y_2} + b_2^2 \cdot F_2) + (J_{y_3} + b_3^2 \cdot F_3) + (J_{y_4} + b_4^2 \cdot F_4) = \\ &= (34,56 + (-0,33)^2 \cdot 72) + (171,5 + (-5,14)^2 \cdot 13,03) + \\ &+ (178,95 + (-4,36)^2 \cdot 19,24) + (873 + (8,87)^2 \cdot 20,2) = 3588,89 \text{ см}^4 \end{aligned}$$



## Центробежный момент инерции

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{xy_i} + a_i \cdot b_i \cdot F_i)$$

## Центробежный момент инерции неравнобокого уголка



$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{1,2}}$$

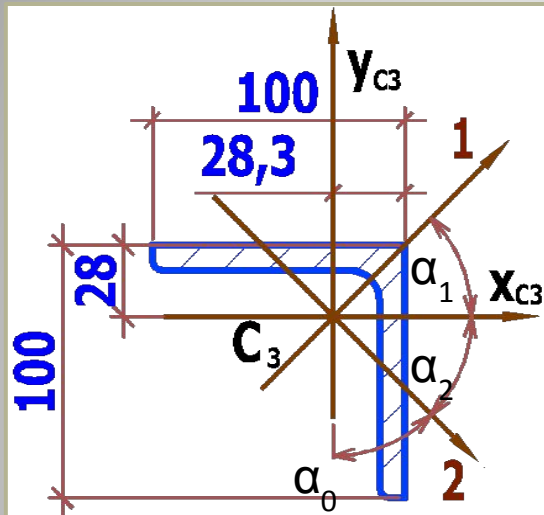
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_0 = 0,4$$

$$-\operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{tg}(90 - \alpha_0) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} = -\frac{1}{0,4} = -2,5$$

$$J_{x_c y_c} = \operatorname{tg} \alpha_2 (J_{y_c} - J_2) = 0,4 (171,5 - 32,31) = 55,8 \text{ см}^4$$

$$J_{x_c y_c} = \operatorname{tg} \alpha_1 (J_{y_c} - J_1) = -2,5 (171,5 - 193,8) = 55,8 \text{ см}^4$$

## Центробежный момент инерции равнобокого уголка



$$-tg\alpha_2 = -tg\alpha_0 = -1$$

$$tg\alpha_1 = tg(90 - \alpha_0) = \frac{1}{tg\alpha_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$J_{x_c y_c} = tg\alpha_1 (J_{y_c} - J_1) = 1(178,95 - 283,8) = -104,9 \text{ см}^4$$

$$J_{x_c y_c} = tg\alpha_2 (J_{y_c} - J_2) = -1(178,95 - 74,08) = -104,9 \text{ см}^4$$

$$\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= (J_{xy_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1) + (J_{xy_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2) + \\ &+ (J_{xy_3} + a_3 \cdot b_3 \cdot F_3) + (J_{xy_4} + a_4 \cdot b_4 \cdot F_4) = \\ &= (0 + (-2,15) \cdot (-0,33) \cdot 72) + (55,8 + (-15,51) \cdot (-5,14) \cdot 13,93) + \\ &+ (-104,9 + 10,02 \cdot (-4,36) \cdot 19,24) + (0 + 8,8 \cdot 8,87 \cdot 20,2) = 1848,67 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

### 3. Определяем главные моменты инерции относительно центральных осей ( $J_1, J_2$ )

$$J_{1,2} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{x_c}}{2}\right)^2 + (J_{x_c y_c})^2}$$

$$J_{1,2} = \frac{12872 + 3588,89}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3588,89 - 12872}{2}\right)^2 + (1848,67)^2} =$$
$$= 8230,45 \pm 4960,16$$

$$J_1 = 8230,45 + 4960,16 = 13226,61 \text{ см}^4$$

$$J_2 = 8230,45 - 4960,16 = 3234,29 \text{ см}^4$$

#### 4. Определяем положение главных центральных осей ( $\alpha_1, \alpha_2$ )

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{1,2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_1} = \frac{1848,67}{3588,89 - 13226,61} = -0,1918$$

$$\operatorname{arctg}\alpha_1 = \operatorname{arctg}(-0,1918) = -10,86^\circ$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_2} = \frac{1848,67}{3588,89 - 3234,29} = 5,2133$$

$$\operatorname{arctg}\alpha_2 = \operatorname{arctg}(5,2133) = 79,14^\circ$$

## 5. Выполним необходимые проверки

### 5.1. Инвариантность моментов инерции

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_1 + J_2$$

$$12872 + 3588,89 = 13226,61 + 3234,29$$

$$16460,9 = 16460,9$$

### 5.2. Экстремальность моментов инерции

$$J_1 > J_{x_c} > J_{y_c} > J_2$$

$$13226,61 >$$

$$12872 >$$

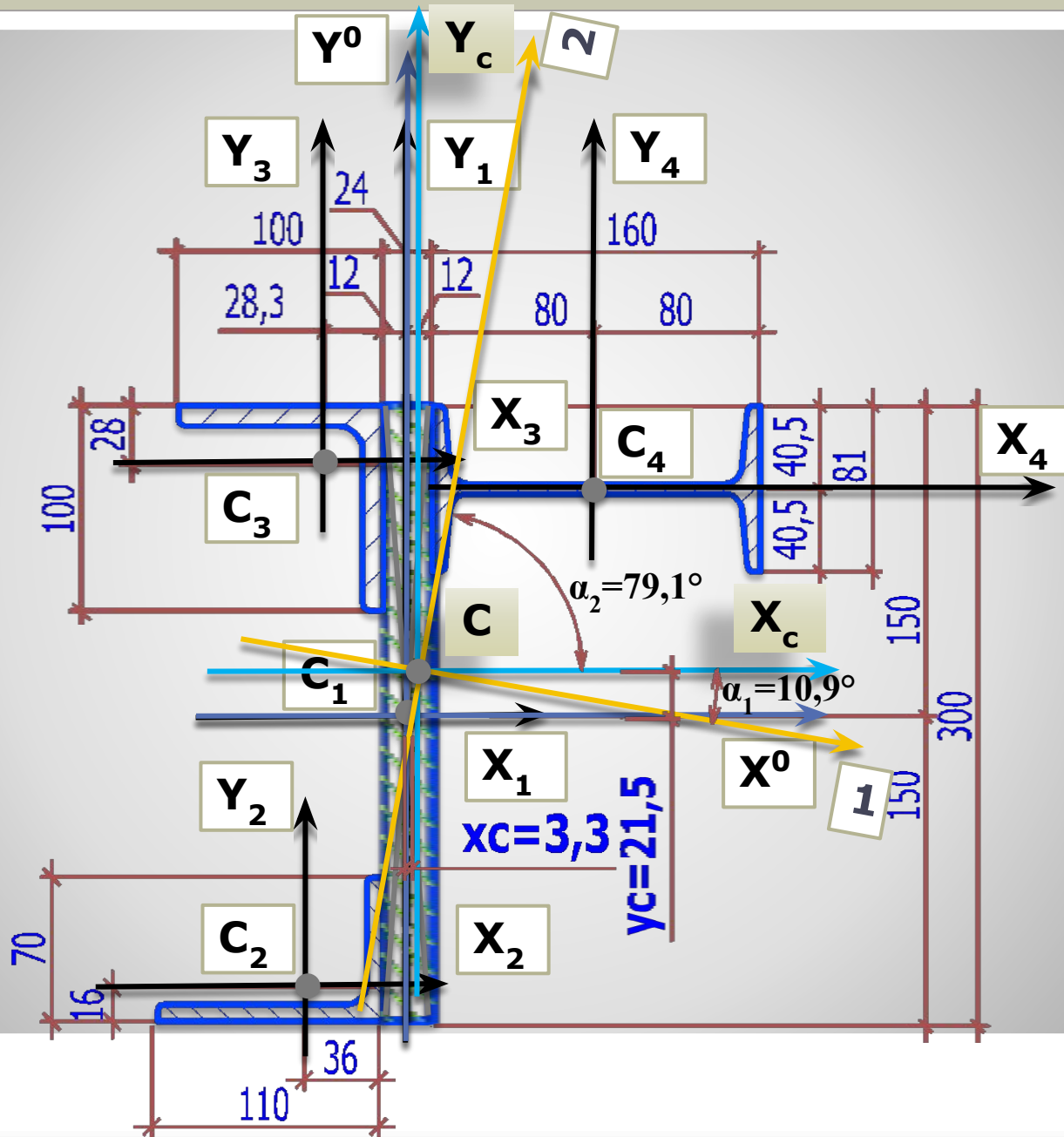
$$3588,89 >$$

$$3234,29$$

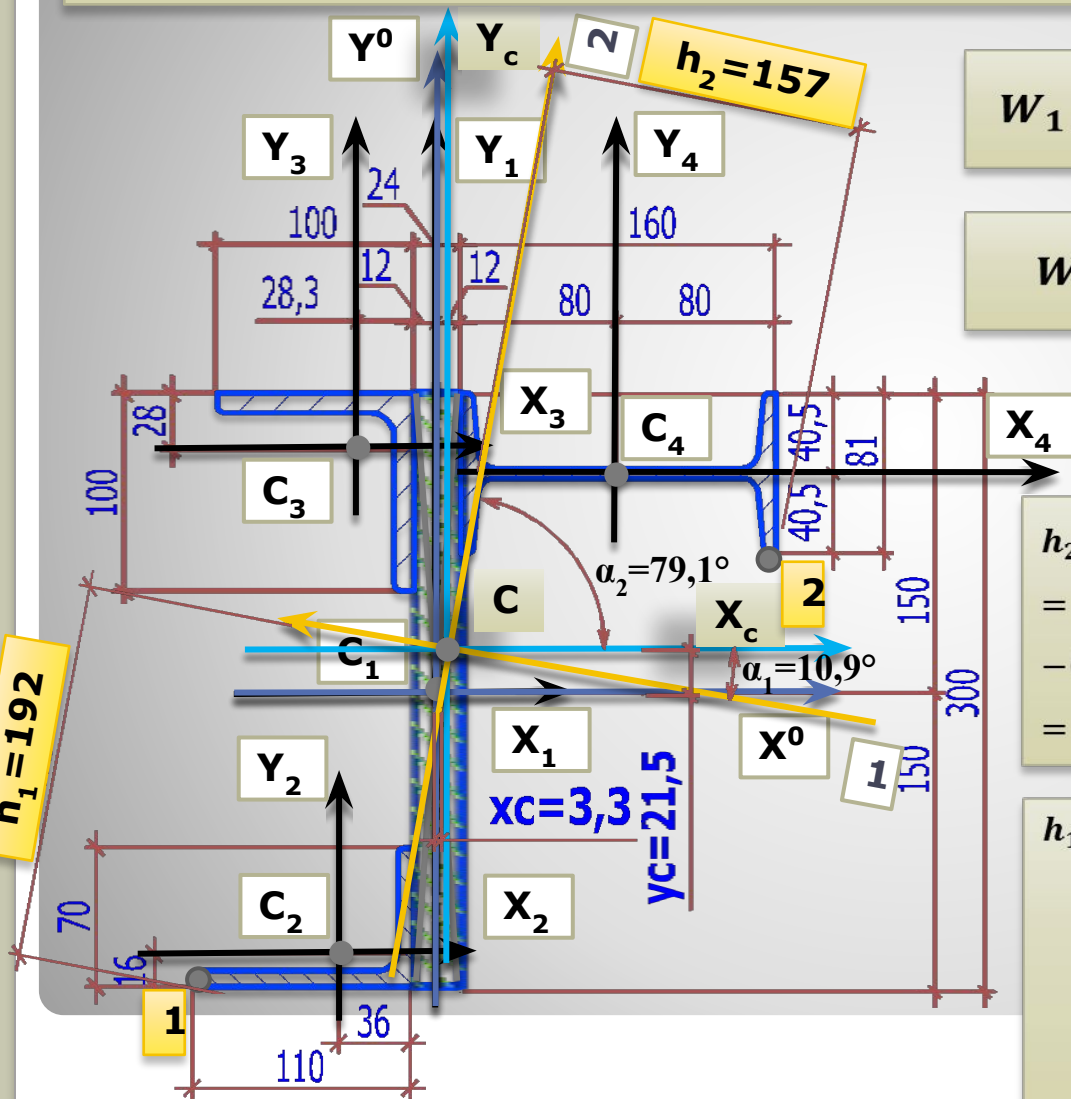
### 5.3. Перпендикулярность главных осей

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = \pi/2$$

$$10,86^\circ + 79,14^\circ = 90^\circ$$



## 6. Определим моменты сопротивления относительно главных центральных осей (1,2)



$$W_1 = \frac{J_1}{h_1} = \frac{13226,61}{19,2} = 688,9 \text{ см}^3$$

$$W_2 = \frac{J_2}{h_2} = \frac{3234,29}{15,7} = 206 \text{ см}^3$$

$$\begin{aligned} h_2 &= y_2 \cdot \cos \alpha_2 - x_2 \cdot \sin \alpha_2 = \\ &= (15 - 8,1 - 2,15) \cdot \cos(79,1^\circ) - \\ &- (1,2 + 16 - 0,33) \cdot \sin(79,1^\circ) = \\ &= 4,75 \cdot 0,189 - 16,87 \cdot 0,982 = 15,7 \text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= y_1 \cdot \sin \alpha_2 + x_1 \cdot \cos \alpha_2 = \\ &= (-15 - 2,15) \cdot \sin(79,1^\circ) + \\ &+ (-1,2 - 11 - 0,33) \cdot \cos(79,1^\circ) = \\ &= -17,15 \cdot 0,982 - 12,53 \cdot 0,189 = \\ &= -19,2 \text{ см} \end{aligned}$$

**7. Определим радиусы инерции относительно главных центральных осей (1,2)**

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = \sqrt{\frac{13226,61}{125,37}} = 10,27\text{см}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = \sqrt{\frac{3234,29}{125,37}} = 5,08\text{см}$$