Тема 2.

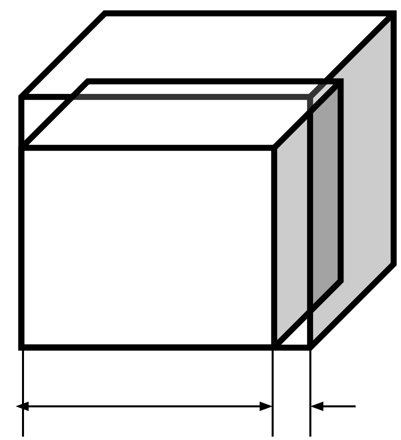
Теория деформаций

Перемещения. Понятие о [illegible]еформациях. Тензорная природа дефор[illegible]анного состояния [illegible]

На прошлой лекции

Деформация в [illegible]личественная мера деформиров[illegible]риала в окрестности точки.

Элементарный [illegible]епипед в окрест[illegible]очки В со сторонами $dx, \quad dy, \quad dz$



В результате деформации длины ребер получат приращения:

$$\Delta dx, \quad \Delta dy, \quad \Delta dz$$

Относительные линейные деформации в точке

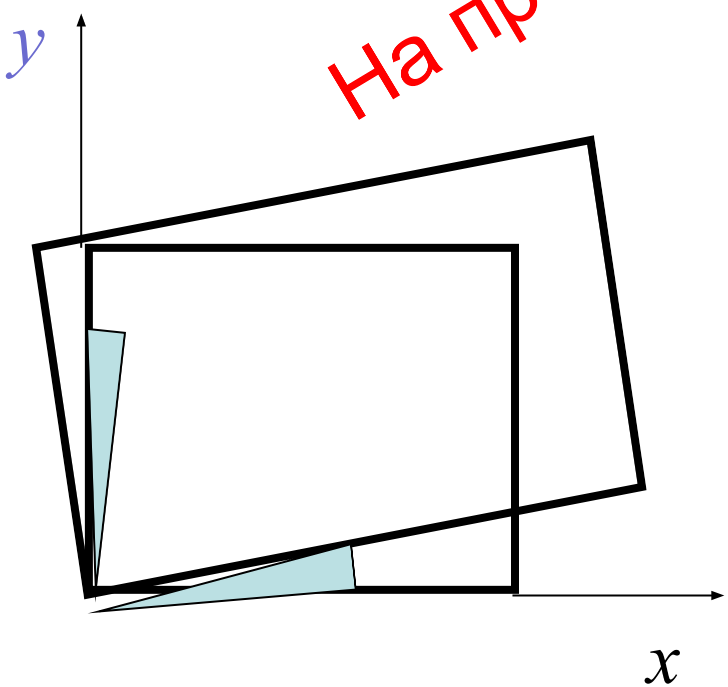
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

– безразмерные величины порядка $10^{-3} \div 10^{-4}$

Перемещения. Понятие о деформациях. Тензорная природа деформ... анного состояния в ...

На прошлой лекции

Первоначально прямые уг... ают малые изменения



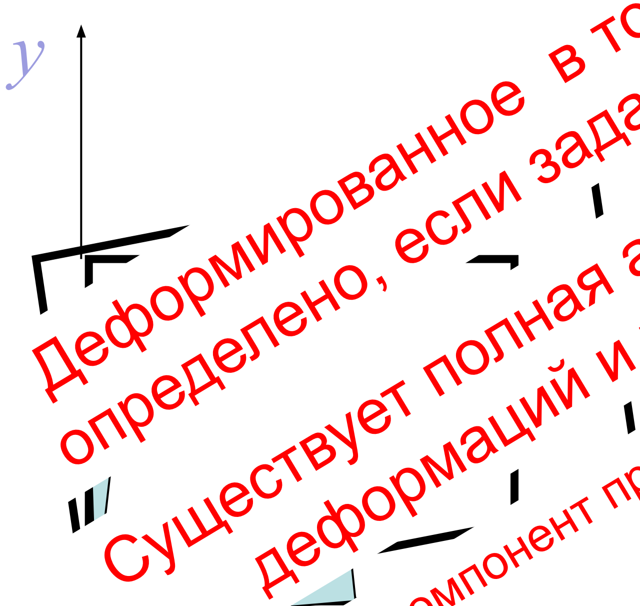
угловые деформации – углы сдвига – сдвиги.

$$\left.\begin{matrix}\gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{matrix}\right\}$$

$$T_{\varepsilon} = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{matrix} \right\|$$

Перемещения. Понятие о деформациях. Тензорная природа деформиров… …го состояния в точк…

Первоначально прямые углы пол… …е из…



…ые

…ации –

…ы сдвига –

сдвиги.

$$\left.\begin{matrix}\gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{matrix}\right\}$$

Деформированное в точке тела полностью определено, если задан тензор деформаций

Существует полная аналогия между теорией деформаций и теорией напряжений:

- Преобразование компонент при повороте осей
- Инварианты тензора
- Главные оси деформации

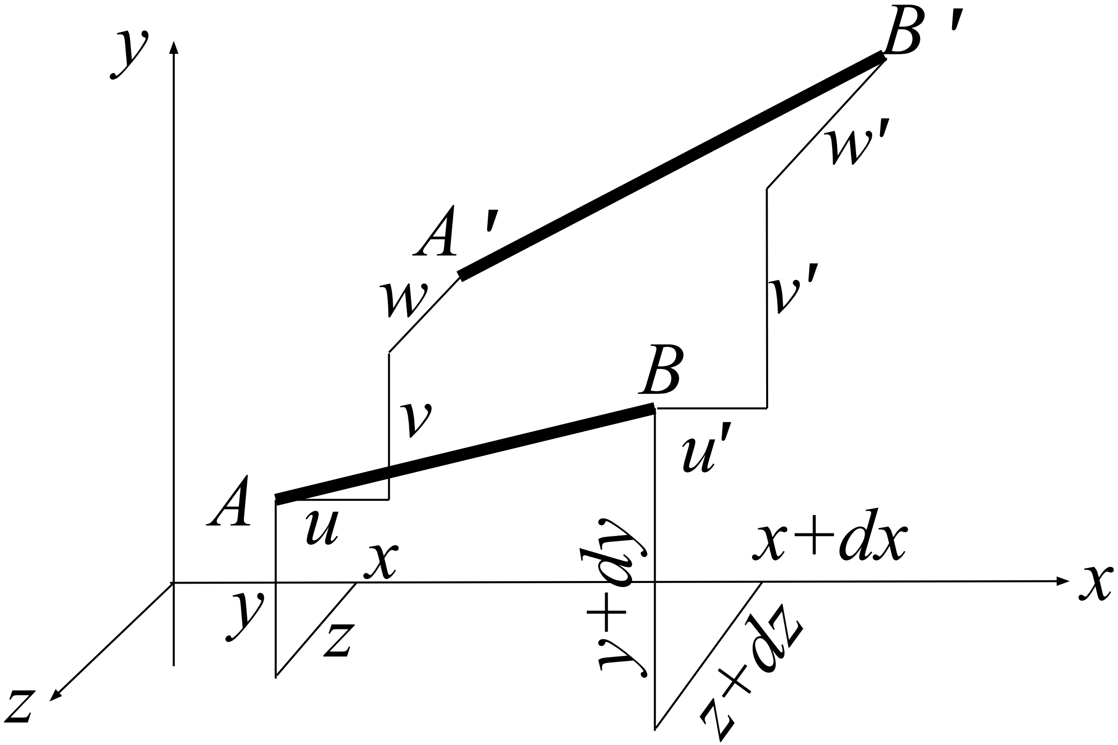
…

$$T_{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}$$

Связь перемещений и деформаций. Формулы Коши

после деформации

Для исследования деформированного состояния в точке рассматриваем бесконечно малый отрезок ***AB***



Координаты

точки ***A***: $x,\ y,\ z$

точки ***B***:

$$x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz$$

Компоненты смещений

точки ***A***: $u,\ v,\ w$

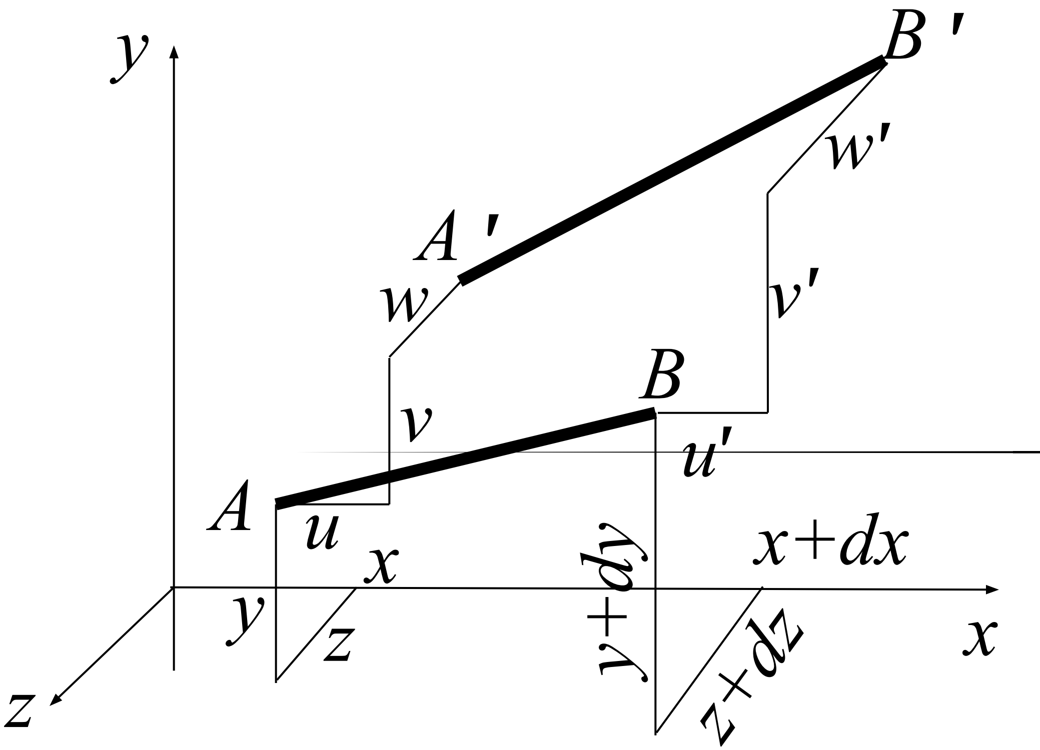
точки ***B***:

$$u', \quad v', \quad w'$$

до деформации

Связь перемещений и деформаций. Формулы Коши

Для исследования деформированного состояния в точке рассматриваем бесконечно малый отрезок ***AB***



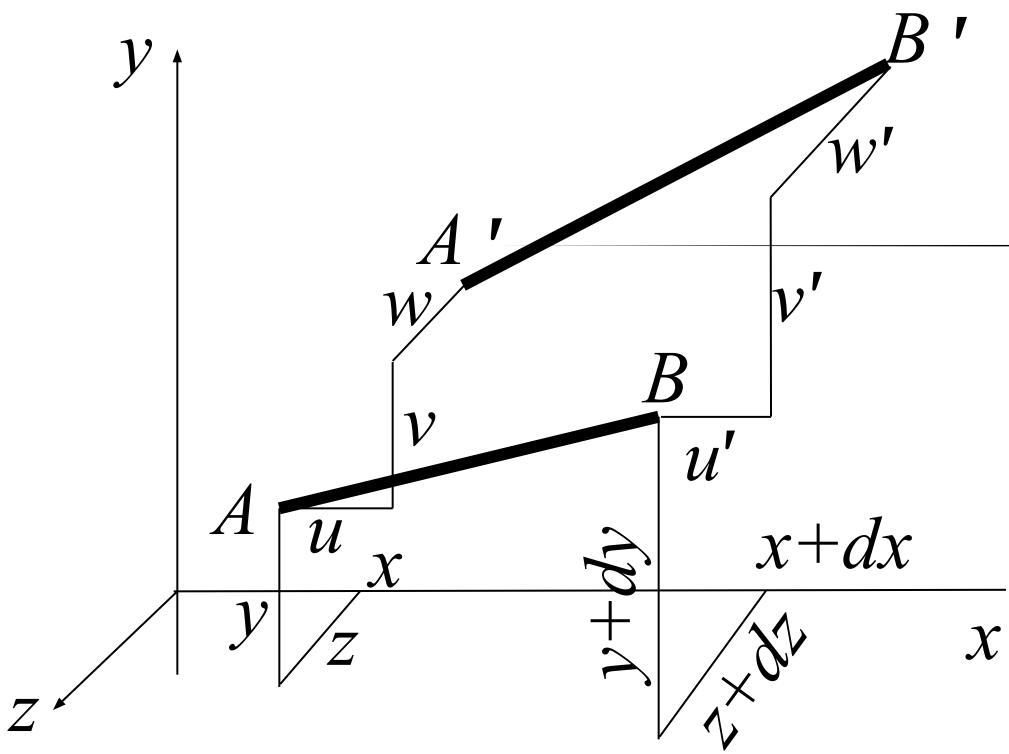
Для малых перемещений можно записать

$$\begin{cases} u' = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz \\ v' = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz \\ w' = w + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases}$$

Напоминание: *функция перемещений предполагается непрерывной, раскладываемой в ряд Тейлора и при малых деформациях члены второго и высших порядков малости отбрасываются.*

Связь перемещений и деформаций. Формулы Коши

Если отрезок ***AB*** параллелен оси ***x***, то ***dx = dy = 0*** и формулы упрощаются ***:***



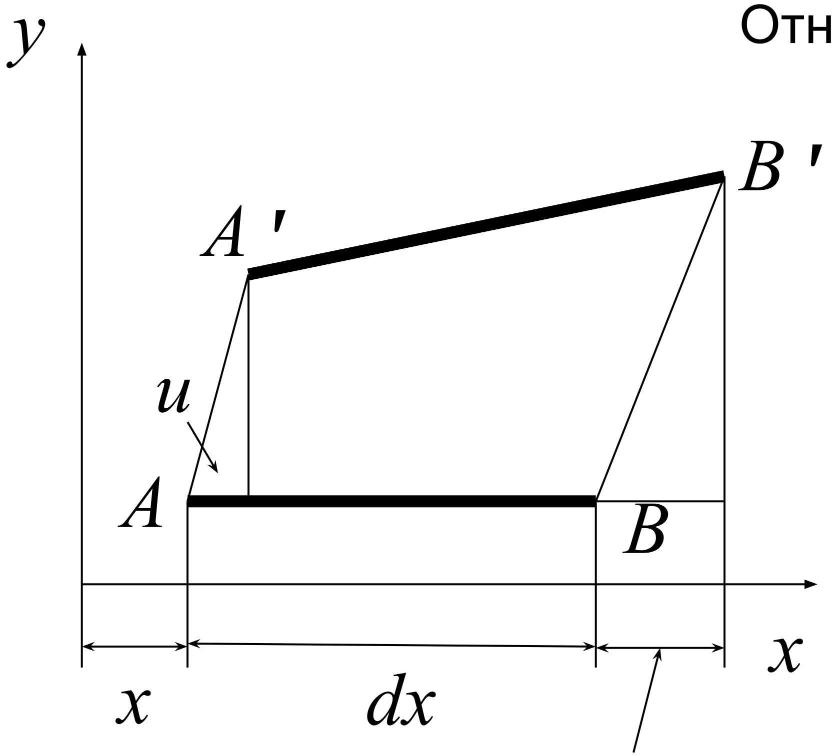
$$
\begin{cases}
u' = u + \dfrac{\partial u}{\partial x} dx \\
v' = v + \dfrac{\partial v}{\partial x} dx \\
w' = w + \dfrac{\partial w}{\partial x} dx
\end{cases}
$$

Для элементарных отрезков, параллельных осям ***y*** и ***z*** получаются подобные выражения заменой ***x***, соответственно, на ***y*** и ***z*.**

Рассмотрим отрезок ***AB*,** параллельный оси x.

Удлинение отрезка ***AB***:

$$\Delta dx = (dx - u + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx$$



$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Относительное удлинение вдоль оси ***x***

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Аналогично - вдоль осей ***y*** и ***z***

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Рассмотрим два ортогональных отрезка: $AB \parallel x, \quad AC \parallel y.$

Для малого угла поворота отрезка AB: $\quad \alpha = tg\alpha = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

Для малого угла поворота отрезка AC: $\quad \beta = tg\beta = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

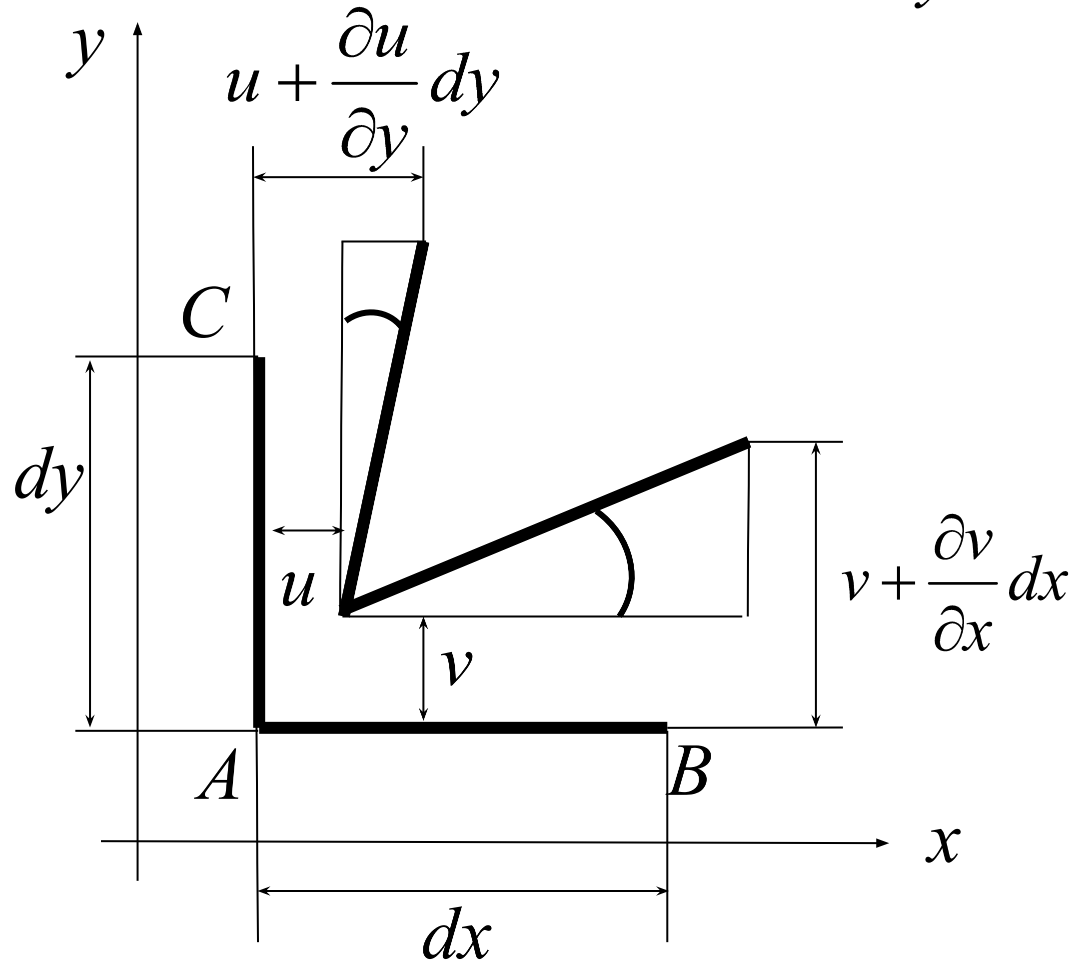
Таким образом искажение прямого угла между x и y

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Аналогично:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



Полученные соотношения

Уравнения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Если заданы три функции *u, v, w* (как функции координат *x, y, z*) , то уравнения Коши позволяют определить шесть деформаций через первые производные от составляющих перемещения.

Все шесть функций для компонентов деформаций произвольно задать нельзя, т.к. они связаны тремя перемещениями.

Получим зависимости между компонентами деформации в одной плоскости

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \cdot \partial y^2} \\[2ex] + \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^3 v}{\partial y \cdot \partial x^2} \end{array}\right.$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

Если заданы функции двух линейных деформаций, то это определяет и угол сдвига

Получим зависимости между деформациями в разных плоскостях

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\cdot\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\cdot\partial z}$$

$$\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\cdot\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\cdot\partial y}$$

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\cdot\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\cdot\partial y}$$

Если заданы функции деформаций сдвига, то это определяет и удлинениЕ

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right]=2\frac{\partial^3 w}{\partial x\cdot\partial y\cdot\partial z}=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\cdot\partial y}$$

Уравнения совместности деформаций

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}
\qquad
\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \cdot \partial y}
$$

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z}
\qquad
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \cdot \partial y}
$$

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \cdot \partial y}
\qquad
\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \cdot \partial z}
$$

Если заданы функции двух линейных деформаций, то это определяет и угол сдвига в соответствующей плоскости

Если заданы функции деформаций сдвига, то это определяет и удлинениЯ

Уравнения совместности деформаций

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}
\qquad
\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \cdot \partial y}
$$

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \cdot \partial z}
\qquad
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \cdot \partial y}
$$

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \cdot \partial y}
\qquad
\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \cdot \partial z}
$$

Обратите внимание на «игру» координат!

например

***Заметьте**: теория деформаций =*

= геометрические рассмотрения

Обобщенный закон Гука

- **Эксперимент:**
  при растяжении образца в пределах упругости :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

и

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon$$

Закон Гука
при линейном
напряженном состоянии

Относительная
поперечная
продольная
деформация

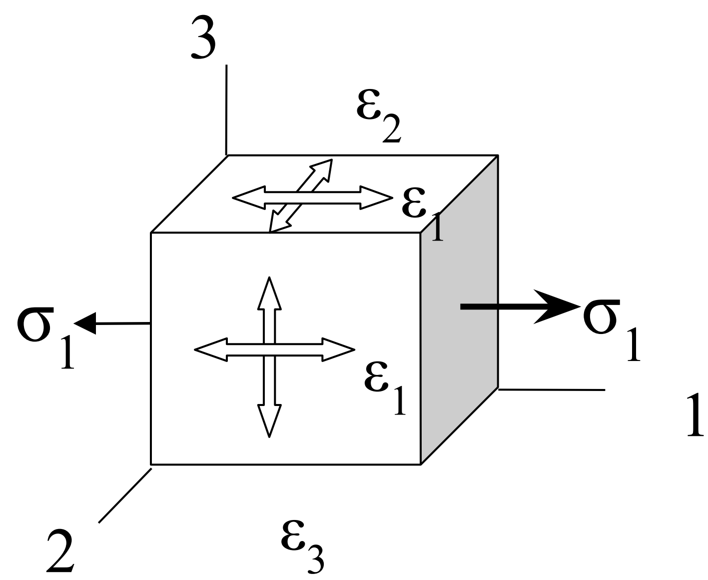
Обобщенный закон Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \text{и} \qquad \varepsilon' = -\nu\varepsilon$$

- Образец из изотропного материала;
- Элементарный объем с гранями, параллельными главным площадкам:

$\sigma_1 \Rightarrow \varepsilon_1$ - продольная деф.

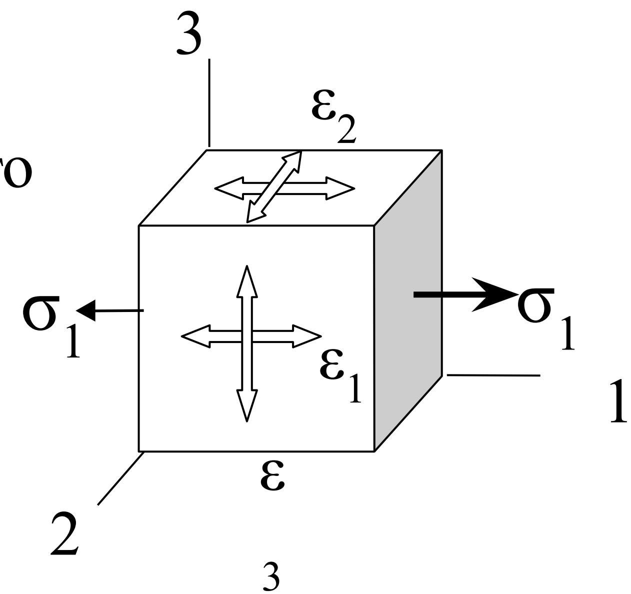
- поперечные деф. $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 \end{array} \right.$



Обобщенный закон Гука

- В случае трехосного напряженного состояния следует учесть действие всех трех главных напряжений.
- Малые упругие деформации →
 → независимость действия сил →

Линейная деформация в направлении главной оси 1 = сумме вкладов каждого из главных напряжений



$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \underbrace{\varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3)}$$

Направление 1 является поперечным для направлений 2 и 3 , потому

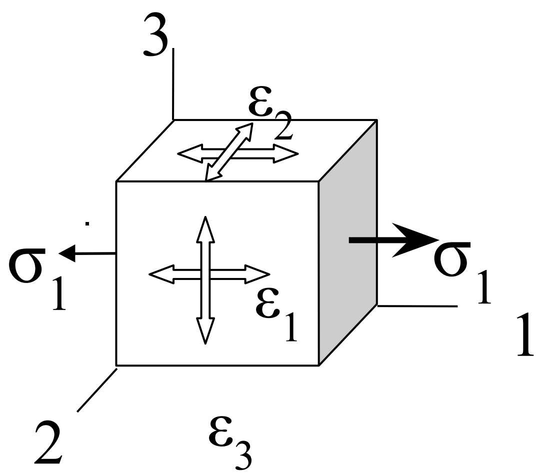
$$\varepsilon_1(\sigma_2) = -\nu \frac{\sigma_2}{E} \qquad \varepsilon_1(\sigma_3) = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$$

1.16 Обобщенный закон Гука

- В случае трехосного напряженного состояния следует учесть действие всех трех главных напряжений.
- Малые упругие деформации →
- независимость действия сил →
- линейная деформация в направлении главной оси 1 = сумме вкладов каждого из главных напряжений

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \underbrace{\varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3)}$$

$$\boxed{\varepsilon_1(\sigma_2) = -\nu\frac{\sigma_2}{E}} \qquad \boxed{\varepsilon_1(\sigma_3) = -\nu\frac{\sigma_3}{E}}$$



Таким образом

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]}$$

1.16 Обобщенный закон Гука

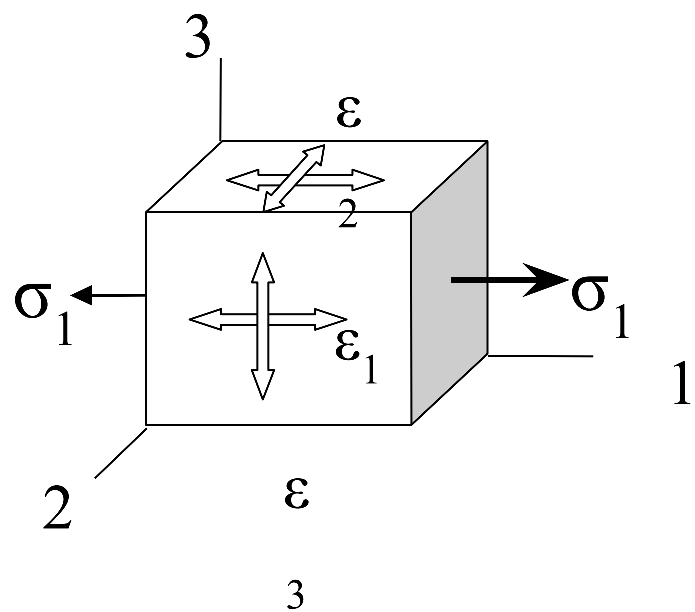
$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]}$$

•Аналогично для двух других направлений:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]$$

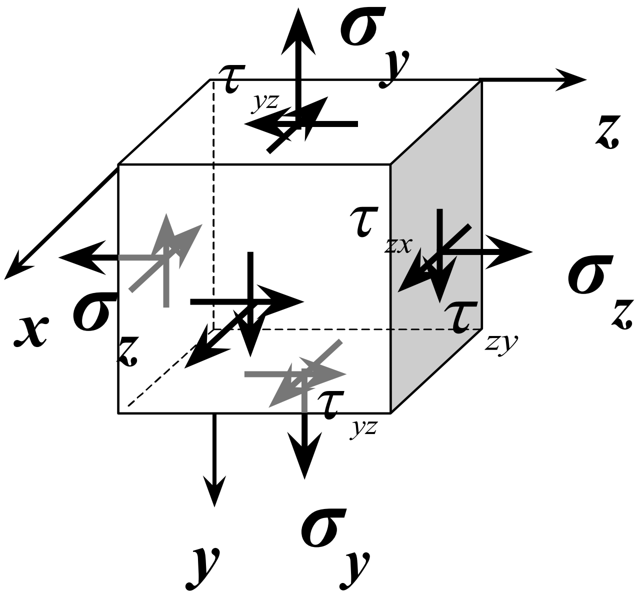
- **Закон Гука**
для линейных деформаций
в главных осях.



Обобщенный закон Гука

- При наличии касательных напряжений на гранях:
- **Обобщенный закон Гука в произвольных осях:**

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \end{cases}$$



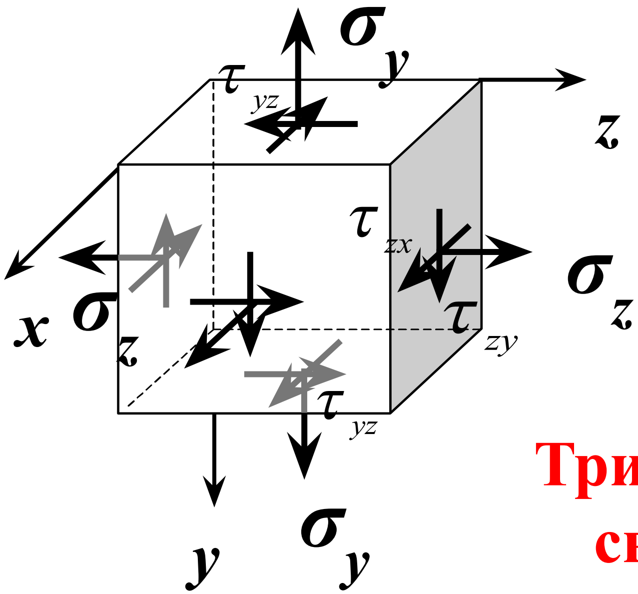
При малых деформациях
изменение углов (сдвиг)
не влияет на изменение длин отрезков

Обобщенный закон Гука

- **Обобщенный закон Гука в произвольных осях:**

При малых деформациях изменение углов (сдвиг) не влияет на изменение длин отрезков

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \end{cases}$$



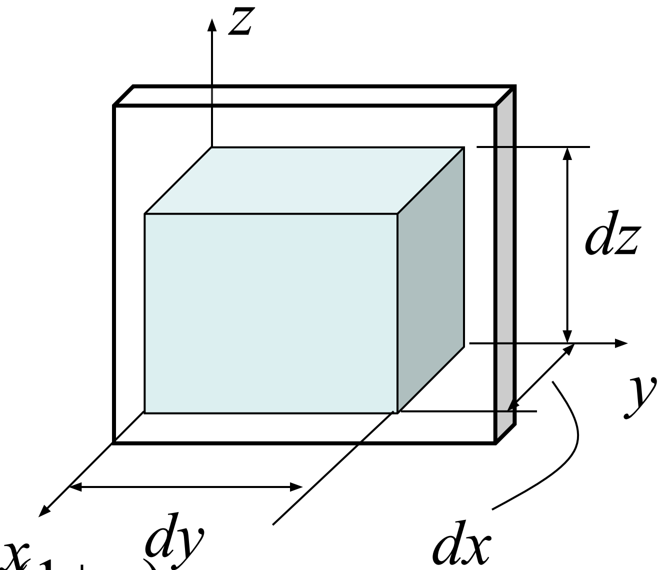
Три упругие постоянные связаны между собой зависимостью:

$$\boxed{G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}}$$

Объемная деформация

1.16.1 **Относительное изменение объема в точке**

$$V = dx \cdot dy \cdot dz$$



В результате деформации

- Размеры граней: $dx \cdot (1+\varepsilon_x)$;

  $dy \cdot (1+\varepsilon_y)$;

  $dz \cdot (1+\varepsilon_z)$;

- Объем: $V+dV = dx \cdot (1+\varepsilon_x) \cdot dy \cdot (1+\varepsilon_y) \cdot dz \cdot (1+\varepsilon_z)$;

- Изменение объема:

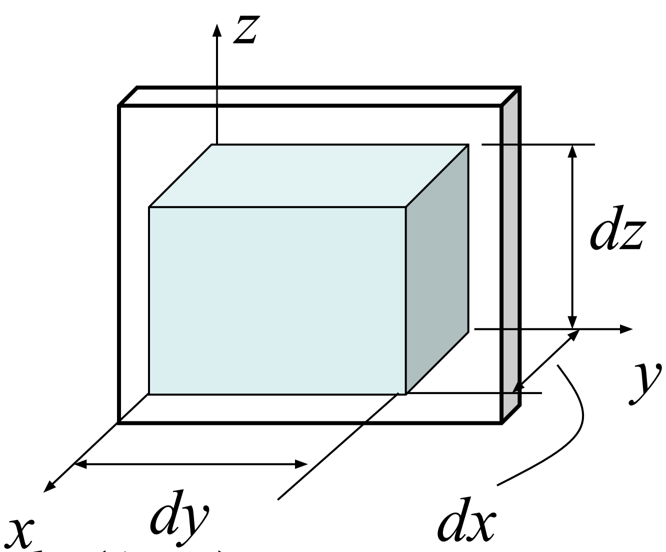
$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1+\varepsilon_x) \cdot (1+\varepsilon_y) \cdot (1+\varepsilon_z) - dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$= dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_Z)$$

Объемная деформация

1.16.1 **Относительное изменение объема в точке**

$$V = dx \cdot dy \cdot dz$$



В результате деформации

- Размеры граней: $dx \cdot (1+\varepsilon_x)$;

  $dy \cdot (1+\varepsilon_y)$;

  $dz \cdot (1+\varepsilon_z)$;

- Объем: $V+dV= dx \cdot (1+\varepsilon_x) \cdot dy \cdot (1+\varepsilon_y) \cdot dz \cdot (1+\varepsilon_z)$;

- Изменение объема:

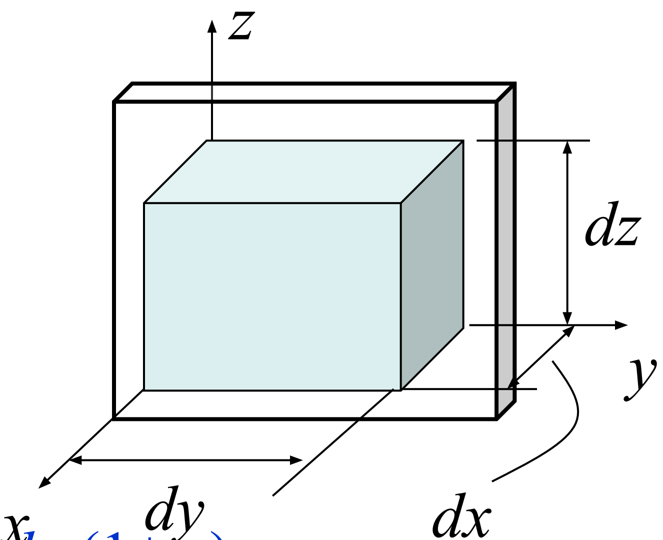
$$dV =$$

$$= dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \underbrace{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_Z}_{\text{Более высокий порядок малости}})$$

Объемная деформация

Относительное изменение объема в точке

$$V = dx \cdot dy \cdot dz$$



В результате деформации

- Размеры граней: $dx \cdot (1+\varepsilon_x)$;

  $dy \cdot (1+\varepsilon_y)$;

  $dz \cdot (1+\varepsilon_z)$;

- Объем: $V + dV = dx \cdot (1+\varepsilon_x) \cdot dy \cdot (1+\varepsilon_y) \cdot dz \cdot (1+\varepsilon_z)$;

- Изменение объема:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

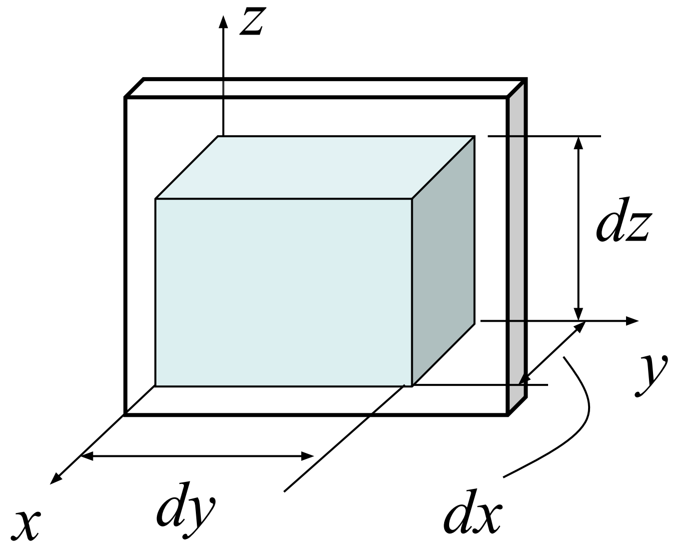
Относительное изменение объема

$$\boxed{\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

Объемная деформация

Закон Гука для объемной деформации

Относительное изменение объема



$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\theta =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\boxed{\theta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \left[\sigma_y + \sigma_x + \sigma_z\right]}$$

Закон Гука для объемной деформации