Математические модели числа

Множество N_0

- Из истории
- Аксиоматический подход построения теории натуральных чисел
- Теоретико-множественный подход теории натуральных чисел
- Натуральное число как результат измерения величин

Из истории

Понятие «число» является одним из основных понятий в математике.

Числа возникли из жизненной потребности человека и претерпели длительный путь исторического развития.

1 этап

Люди не умели считать, но была необходимость сравнить конечные одновременно обозримые множества.

Например:

членов семьи и кусков еды;

группы охотников и орудий для охоты, и др.

- Чтобы сравнить конечные множества, устанавливали взаимно однозначное соответствие между данными множествами.

Например:

о численности группы из двух предметов говорили: «Столько же, сколько рук у человека»,

о множестве из пяти предметов - «столько же, сколько пальцев на руке».

- Численность предметов воспринималась без их пересчета.

Люди не умели измерять, но была необходимость сравнить между собой различные объекты.

Например:

шкуры животных, емкости, и др.

- Чтобы сравнить различные объекты, устанавливали соответствие между объектами.

Например:

шкуры накладывали одна на другую;

Зерно пересыпали из одной емкости в другую.

- Мера объектов воспринималась без их измерения.

- 2 этап

Для сравнения множеств стали применять множества-посредники: мелкие камешки, раковины, пальцы.

- Множества-посредники есть зачатки понятия натурального числа, хотя еще число не отделяется от сосчитываемых предметов.

Например:

речь шла о пяти камешках, пяти пальцах, а не о числе «пять» вообще.

- Названия множеств-посредников стали использовать для определения численности множеств, которые с ними сравнивались.

Например:

Численность множества, состоящего из пяти элементов, обозначалась словом «рука», а численность множества из 20 предметов - словами «весь человек».

Для сравнения объектов стали применять мерки-посредники: длина ладони, стопы, носа, палочки разной длины, площадь ладони, шкурки животного и др.

- Мерки-посредники также есть зачатки понятия натурального числа, хотя еще число не отделяется от измеряемых объектов.
- Названия мерок-посредников стали использовать для определения меры объектов, которые с ними сравнивались.

Например:

шаг – средняя длина человеческого шага;

пядь – расстояние между концами расставленных пальцев.

- 3 этап

Научившись оперировать множествами-посредниками, мерками-посредниками человек установил то общее, что существует, например, между пятью пальцами и пятью яблоками, пятью пядями.

Произошло отвлечение от природы элементов множеств-посредников или мерок-посредников, возникло представление о натуральном числе.

При счете или измерении проговаривались слова «один», «два» и т.д., а не перечислялись «одно яблоко», «два яблока».

Историки считают, что произошло это в каменном веке, в эпоху первобытнообщинного строя, примерно в 10-5 тысячелетии до н.э.

- Этот этап связан с называнием числа.

- 4 этап

Постепенно люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия.

- Натуральный ряд чисел возник не сразу, история его формирования длительная.

Запас чисел, которые употребляли, ведя счет, увеличивался постепенно.

- Постепенно сложилось и представление о бесконечности множества натуральных чисел.

Например:

В работе «Псаммит» - исчисление песчинок - древнегреческий математик Архимед (III в. до н. э,) показал, что ряд чисел может быть продолжен бесконечно, и описал способ образования и словесного обозначения сколь угодно больших чисел.

5 этап

Чтобы вести счет или производить измерения, нужна последовательность числительных, которая:

- начинается с единицы
- позволяет осуществлять переход от одного числительного к другому, при чем, столько раз, сколько это необходимо.
- Следовательно:

Необходимо обосновать систему натуральных чисел как некую теорию, в которой в первую очередь следует ответить на вопрос, что же представляет собой число как элемент натурального ряда.

С возникновением понятия натурального числа появилась возможность изучать эти числа независимо от тех конкретных задач, в связи с которыми они возникли.

Теоретическая наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название «арифметика».

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии и Египте.

Накопленные в этих странах математические знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции.

В средние века большой вклад в развитие арифметики внесли математики Индии, стран арабского мира и Средней Азии, а начиная с XIII века - европейские ученые.

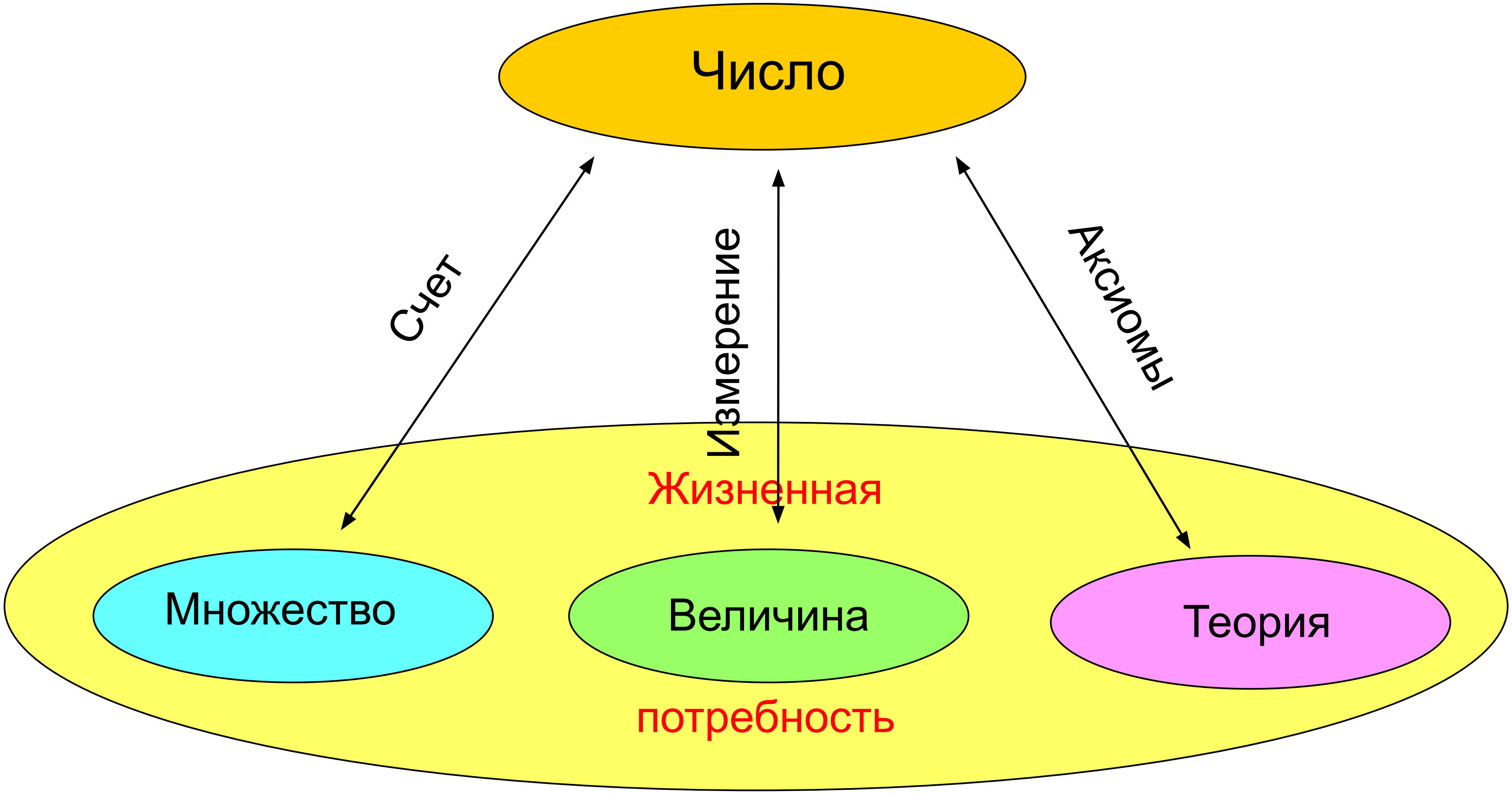
Термин «натуральное число» впервые употребил в У в. римский ученый А. Боэций.

Во второй половине XIX века натуральные числа оказались фундаментом всей математической науки.

Появилась необходимость в строгом логическом обосновании понятия натурального числа, в систематизации того, что с ним связано.

Была разработана аксиоматическая теория натурального числа.

Модель происхождения числа



Аксиоматический подход

Аксиоматическое построение теории натуральных чисел предложили математики - немец Грассман и итальянец Пеано

Они предложили теорию, в которой натуральное число обосновывалось как элемент неограниченно продолжающейся последовательности.

Об аксиоматическом способе построения теории

При аксиоматическом построении какой-либо математической теории соблюдаются определенные правила:

- некоторые понятия теории выбираются в качестве **основных** и принимаются без определения;
- каждому понятию теории, которое не содержится в списке основных, дается **определение,** в нем разъясняется его смысл с помощью основных и предшествующих данному понятий;
- формулируются **аксиомы** - предложения, которые в данной теории принимаются без доказательства; в них раскрываются свойства основных понятий;
- каждое предложение теории, которое не содержится в списке аксиом, должно быть доказано;
- такие предложения называют **теоремами** и доказывают их на основе аксиом и теорем, предшествующих рассматриваемой.

Основные понятия и аксиомы при определении натурального числа

- Дано непустое множество *N.*

Пусть на этом множестве основным понятием взято отношение «**непосредственно следовать за**».

- Символическое обозначение:

а' - элемент, непосредственно следующий за элементом *а*

Читается: «а-штрих»

- Известными также считаются:

понятие множества,

элемента множества и другие теоретико-множественные понятия,

правила логики.

Аксиомы Пеано

- Суть отношения «непосредственно следовать за» раскрывается в следующих аксиомах.

Аксиома 1. В множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества.

Будем называть его единицей и обозначать символом 1.

Аксиома 2. Для каждого элемента *a* из N существует единственный элемент *a′*, непосредственно следующий за *a*.

Аксиома 3. Для каждого элемента *a* из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует *a*.

Аксиома 4. (аксиома индукции) Всякое подмножество *M* множества N, обладающее свойствами:

1) $1 \in M$;

2) из того, что *a* содержится в *M*, следует, что и *a′* содержится в *M*, совпадает с множеством *N*.

- Определение.

Множество N, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется множеством натуральных чисел, а его элементы - натуральными числами.

- Природа элементов множества *N* может быть какой угодно.

Любое конкретное множество, на котором задано отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, является *моделью данной системы аксиом.*

- В математике доказано:

между всеми такими моделями можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение «непосредственно следовать за»,

все такие модели будут отличаться только природой элементов, их названием и обозначением.

- Стандартной моделью системы аксиом Пеано является возникший в процессе исторического развития общества ряд чисел:

  1, 2, 3, 4, ...

Каждое число этого ряда имеет:

свое **обозначение;**

свое **название**;

они считаются известными.

Натуральный ряд чисел - одна из моделей аксиом 1-4.

Аксиомы описывают процесс образования этого ряда.

Покажем как это происходит при раскрытии в аксиомах свойств отношения «непосредственно следовать за»:

- натуральный ряд начинается с числа 1 (аксиома 1);
- за каждым натуральным числом непосредственно следует единственное натуральное число (аксиома 2);
- каждое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом (аксиома 3);
- начиная от числа 1 и переходя по порядку к непосредственно следующим друг за другом натуральным числам, получаем все множество этих чисел (аксиома 4).

Аксиоматическое построение теории натуральных чисел не рассматривается в ДОУ.

Но свойства отношения «непосредственно следовать за», сформулированные в аксиомах Пеано, являются предметом изучения в курсе математики.

При рассмотрении чисел первого десятка выясняется, как может быть получено каждое число.

При этом используются понятия «следует» и «предшествует».

Каждое новое число выступает как продолжение изученного отрезка натурального ряда чисел.

Дети убеждаются в том, что за каждым числом идет следующее, и притом только одно, что натуральный ряд чисел бесконечен.

Знание аксиоматической теории поможет педагогу методически грамотно организовать усвоение детьми особенностей натурального ряда чисел.

Множество целых неотрицательных чисел

Присоединим к множеству N натуральных чисел еще один элемент

Обозначается 0

Называется нуль

Полученное множество называется **множеством целых неотрицательных чисел**

Обозначается N_0,

$N_0 = N \cup \{0\}$.

Относительно числа 0 условимся:

0 меньше любого натурального числа

$N_0=\{0, 1, 2, \ldots\}$

Обладает теми же свойствами, что и множество N.

Выводы

Натуральными числами (целыми неотрицательными числами) называются элементы непустого множества N, на котором установлено отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам Пеано.

Принято:

обозначать числа знаками 0, 1, 2, 3, …

называть словами нуль, один, два, три, …

располагать по порядку

Сложение

- Сложением во множестве натуральных чисел называется бинарная операция, при которой каждой паре натуральных чисел *x* и *y* ставится в соответствие натуральное число *z*, называемое значением их суммы, и при этом выполняются следующие аксиомы:

1. $$\left(x+1=x'\right)$$
2. $$\left(x+y'=\left(x+y\right)'\right)$$

Терминология

- Выражение *x+y* называется ***суммой*** чисел *x* и *y*.
- Числа *x* и *y* - ***слагаемые***.
- Результат выполненной операции – ***значение суммы***.

Теорема о существовании и единственности сложения

- Сложение натуральных чисел существует и оно единственно

Свойства сложения

$\forall x, y, z \in N$ верны равенства:

$$1 + x = x'$$

$$x + y = y + x$$ (коммутативность)

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$ (ассоциативность)

$$x = y \Rightarrow x + z = y + z$$ (монотонность)

Умножение

- Умножением во множестве натуральных чисел называется бинарная операция, при которой каждой паре натуральных чисел *x* и *y* ставится в соответствие натуральное число *z*, называемое значением их произведения, и при этом выполняются следующие аксиомы:

1. $(\forall x)(x \times 1 = x)$
2. $(\forall x, y)(x \times y' = (x \times y) + x)$

Терминология

- Выражение $x \times y$ называется ***произведением*** чисел x и y.
- Числа x и y - ***множители***.
- Результат выполненной операции – ***значение произведения***.

Теорема о существовании и единственности умножения

- Если во множестве N существует бинарная операция, удовлетворяющая вышеуказанным аксиомам, то она однозначно определена.

Свойства умножения

$$\forall x, y, z \in N$$ верны равенства:

$$x \times y = y \times x$$ (коммутативность)

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$ (ассоциативность)

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z$$ (дистрибутивность)

$$x = y \Rightarrow x \times z = y \times z$$ (монотонность)

Вычитание
(операция, обратная сложению)

- Вычитанием чисел *a* и *b* называется операция, удовлетворяющая условию:

$a - b = c$, тогда и только тогда, когда $b + c = a$.

Терминология

- Выражение $a-b$ называется ***разностью*** чисел a и b .
- Число a - ***уменьшаемое***.
- Число b - ***вычитаемое***.
- Результат выполненной операции – число c - ***значение разности*.**

Теорема о существовании разности

- Разность чисел a и b существует тогда и только тогда, когда $a > b$.

Теорема о единственности разности

- Если разность чисел a и b существует, то она единственна.

Свойства разности

- Для $\forall a, b, c$ верны равенства:

$$a > c \Rightarrow (a+b)-c = (a-c)+b$$

$$b > c \Rightarrow (a+b)-c = a+(b-c)$$

$$a > (b+c) \left| \begin{array}{l} \Rightarrow a-(b+c) = (a-b)-c \\ \Rightarrow a-(b+c) = (a-c)-b \end{array} \right.$$

Следствия

- Для того, чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного слагаемого суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое.
- Для того, чтобы вычесть из числа сумму, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим.

Свойства разности, связанные с умножением

- Для $\forall a, b, c$ верны равенства:

$$(x - y) \times z = x \times z - y \times z$$

Деление
(операция, обратная умножению)

- Делением чисел *a* и *b*, где *b* ≠0, называется операция, удовлетворяющая условию: *a* : *b* = *c*, тогда и только тогда, когда $b \times c = a$.

Терминология

- Выражение $a:b$ называется ***частное*** чисел a и b .
- Число a - ***делимое***.
- Число b - ***делитель***.
- Результат выполненной операции – число c - ***значение частного***.

Теорема о существовании частного

- Для того чтобы существовало частное чисел *a* и *b*, где *b* ≠0, необходимо , чтобы $b \leq a$.

Теорема о единственности частного

- Если частное чисел *a* и *b*, где *b* ≠0 существует, то оно единственно.

Свойства деления

- Деление на нуль невозможно
- Для любых $a, b, c \in N, c \neq 0$

$$a \vdots c, b \vdots c \Rightarrow (a+b) : c = a : c + b : c$$

$$a \vdots c, b \vdots c, a > b \Rightarrow (a-b) : c = a : c - b : c$$

$$a \vdots c \Rightarrow (a \times b) : c = (a : c) \times b$$

$$a \vdots (b \times c) = (a : b) : c$$

Следствия

- Для того, чтобы сумму разделить на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.
- Для того, чтобы разность разделить на число, достаточно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого частного вычесть второе.
- Для того, чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из множителей и полученный результат умножить на второй множитель.

Задания:
Сложение

- Выполните преобразование выражения, применив ассоциативное свойство сложения:

  $(12+3)+17$ $\qquad$ $27+(13+18)$

- Известно, что $a+b=17$. Чему равно: $a+(b+3)$?

Умножение

- Какие свойства умножения могут быть использованы при нахождении значения выражения:

  $5 \cdot (10 + 4)$ $\quad$ $(8 \cdot 379) \cdot 125$?

- Можно ли не вычисляя сказать, значения каких выражений будут одинаковыми:

  $3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$ $\quad$ $7 \cdot (5 + 3)$ $\quad$ $(7 + 5) \cdot 3$?

Вычитание

- Какие свойства вычитания являются теоретической основой вычислительных приемов:

$$48-30=(40+8)-30=10+8=18$$

$$48-3=(40+8)-3=40+5=45$$

- Определите значение выражения, не выполняя письменных вычислений. Обоснуйте ответ.

$$7865\cdot 6-7865\cdot 5$$

$$957\cdot 11-957$$

$$12\cdot 36-7\cdot 36$$

Деление

- Можно ли утверждать, что все данные равенства верны:

$$48 : (2 \cdot 4) = 48 : 2 : 4$$
$$56 : (2 \cdot 7) = 56 : 7 : 2$$
$$850 : 170 = 850 : 10 : 17$$

- Найдите значения выражений рациональным способом. Ответ обоснуйте.

$$(7 \cdot 63) : 7 \qquad (12 \cdot 21) : 14$$

- Найдите рациональный способ устного вычисления:

$$495 : 15 \qquad 425 : 85$$

- Какие остатки могут получиться при делении на 4? Какой вид будут иметь числа, при делении которых на 4 в остатке получается 1? 3?

Количественные натуральные числа. Счет

Аксиоматика раскрывает порядковый смысл натурального числа.

Выясним количественный смысл натурального числа и связь между двумя смыслами натурального числа

Определение. ***Отрезком N_a натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа а.***

Символическая запись $N_a = \{x \mid x \in N \text{ и } x < a\}$.

Например,

Отрезок N_7 - это множество натуральных чисел, не превосходящих числа 7, т.е. $N_7 = \{1, 2, 3,4, 5, 6, 7\}$.

Определение.

Установление взаимно однозначного соответствия между элементами непустого конечного множества А и отрезком натурального ряда называется счетом элементов множества А.

- Так как всякое непустое конечное множество равномощно только одному отрезку натурального ряда, то число элементов, т.е. результат счета не зависит от того, в каком порядке будут пересчитываться элементы множества.

Можно какому-либо элементу множества *A* поставить в соответствие число 1 и больше этот элемент не рассматривать.

Затем какому-либо из оставшихся элементов сопоставить число 2 и больше его не рассматривать.

Продолжая это построение, последнему оставшемуся элементу мы поставим в соответствие число *a.*

В процессе счета мы не только найдем число элементов множества *A,* но и упорядочим его:

- элемент, которому соответствует число 1, - первый;
- элемент, которому сопоставлено число 2, - второй, и т. д.

Таким образом, всякое натуральное число *a* можно рассматривать как характеристику численности некоторого конечного множества *A.*

Натуральное число *a* имеет при этом количественный смысл.

Теоретико-множественный подход теории натуральных чисел

- Данный подход был обоснован в 19 в. Георгом Кантором.
- В основе подхода – понятия конечного множества и взаимно-однозначного соответствия
- Определение: **Два конечных множества A и B называются равночисленными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие**
- Отношение равночисленности обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности
- Это отношение эквивалентности.
- Символически A~B

Отношение равносильности конечных множеств разбивает множество множеств на классы эквивалентности

В одном классе будут содержаться все одноэлементные множества, в другом - двухэлементные и т.д.

Множества одного класса различны по своей природе, но все они содержат одинаковое число элементов.

Общим свойством класса является одинаковое число элементов.

Определение: **натуральное число - это общее свойство класса конечных равномощных множеств**

Каждый класс равночисленных множеств определяется любым своим представителем

Число, определенное множеством М обозначают n(М) и называют мощностью множества М.

Символически: n(М)=а

- Натуральное число получается при пересчете элементов множества
- Например, о натуральном числе «три» можно сказать, что это общее свойство класса множеств, равномощных, например, множеству сторон треугольника
- Число «нуль» с теоретико-множественных позиций рассматривается как число элементов пустого множества: $0 = n(\varnothing)$.
- Добавляя к любому конечному множеству один элемент, не содержащийся в нем, получаем новое множество, неэквивалентное данному.
- Продолжив последовательно данный процесс получим последовательность неэквивалентных множеств и определенный ею ряд натуральных чисел, изображенный символами: 1, 2, 3, …, n, …

Свойства множества N

- На множестве N задано отношение «меньше»

Если $a < b$, то отрезок натурального ряда N_a является подмножеством отрезка N_b,

т.е. $N_a \subset N_b$ и $N_a \neq N_b$.

Справедливо обратное утверждение:

если $N_a \subset N_b$, то $a < b$.

- Имеем теоретико-множественное истолкование отношения «меньше»:

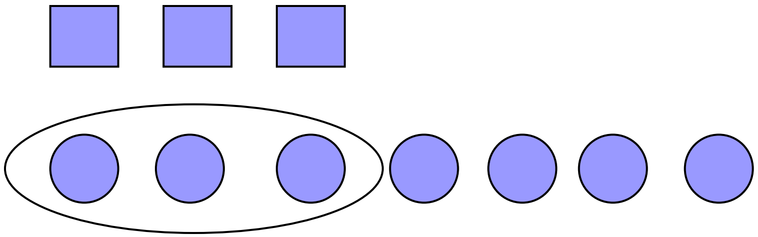
$a < b$ в том и только в том случае, когда отрезок натурального ряда N_a является подмножеством отрезка N_b

$a < b \Leftrightarrow N_a \subset N_b$ и $N_a \neq N_b$

Теоретико-множественная трактовка отношения «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду.
На дошкольном языке:
Число *a* меньше числа *b* тогда и только тогда, когда при счете число *a* называют раньше числа *b.*

3 - число квадратов

7 - число кружков



3 < 7, т.к. во втором множестве можно выделить подмножество, равномощное множеству квадратов.

Этот способ установления отношения между числами 3 и 7 вытекает из теоретико-множественной трактовки отношения «меньше»

Действия в теоретико-множественном подходе

- Пусть даны конечные множества:

$$A \Rightarrow n(A) = a$$

$$B \Rightarrow n(B) = b$$

$$a, b \in N$$

Сложение

- Значением суммы чисел $a, b \in N$ называется число $c \in N$, являющееся численностью объединения множеств

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow n(A) = a \\ B \Rightarrow n(B) = b \\ A \overline{\cap} B \end{array}\right| \Rightarrow c = n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b$$

$$a + b = c$$

Теорема
о существовании и единственности суммы

- Каковы бы ни были $a, b \in N$ всегда существует *c*, такое что

$$c = a + b$$

Свойства сложения

- Коммутативность

$$\left(\forall a,b \in N\right)a+b=b+a$$

- Ассоциативность

$$\left(\forall a,b,c \in N\right)a+b+c=\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)$$

- Монотонность

$$\left(\forall a,b \in N\right)a\langle b \Rightarrow c+a\langle c+b$$

Коммутативность $(\forall a, b \in N) a + b = b + a$

- Доказательство:

Пусть

$$a = n(A), b = n(B), A \cap B = \varnothing$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b$$

$$n(B \cup A) = n(B) + n(A) = b + a$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(B \cup A)$$

$$\Rightarrow a + b = b + a$$

- Обоснование:

По определению сложения

По коммутативности объединения

Вычитание

Значением разности чисел $a, b \in N$ называется число $c \in N$,

являющееся численностью $\overline{B}_A = A \setminus B$

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow n(A) = a \\ B \Rightarrow n(B) = b \\ B \subset A \end{array}\right| \Rightarrow c = n(A \setminus B) = n(A) - n(B) = a - b$$

$$c = a - b$$

Теорема

Пусть:

A - конечное множество;

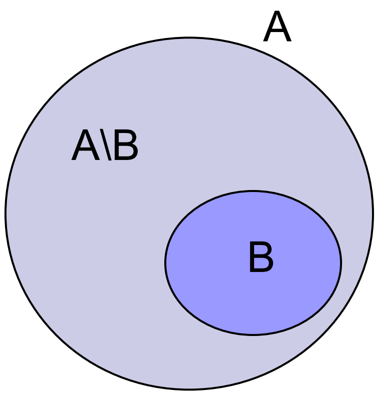
$B \subset A$ - собственное подмножество.

Тогда $A \setminus B$ тоже конечное множество, причем

выполняется равенство: $n\left(A \setminus B\right) = n\left(A\right) - n\left(B\right)$

Доказательство:

Изобразим данные множества в виде кругов Эйлера-Венна согласно условия.



$$\left.\begin{array}{l} B\cap(A\setminus B)=\varnothing \\ B\cup(A\setminus B)=A \end{array}\right| \Rightarrow n(A)=n(B)+n(A\setminus B)$$

Вычитание – операция, обратная сложению согласно определения.

Отсюда: $n(A\setminus B)=n(A)-n(B)$

Данное равенство является обоснованием справедливости определения вычитания.

Свойства вычитания:

$$\forall a, b, c \in N$$

$$b > c \Rightarrow (a+b) - c = a + (b-c)$$

$$a > (b+c) \left| \begin{array}{l} \Rightarrow a - (b+c) = (a-b) - c \\ \Rightarrow a - (b+c) = (a-c) - b \end{array} \right.$$

Следствия из определений разности и взаимосвязи действий вычитания и сложения

- Чтобы найти неизвестное слагаемое, достаточно из значения суммы вычесть известное слагаемое.
- Чтобы найти уменьшаемое, достаточно к значению разности прибавить вычитаемое.
- Чтобы найти вычитаемое, достаточно из уменьшаемого вычесть значение разности.

Умножение

Определение 1.

Значением произведения $a \in N, b \in N$ называется $c \in N \middle| c = a \cdot b$, которое находится по следующим правилам:

1. $a \in N, b \in N, b\rangle 1 \Rightarrow a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b}$

2. $a \in N, b = 1 \Rightarrow a \cdot 1 = a$

Определение 2.

Значением произведения чисел $a, b \in N$ называется число $c \in N$, являющееся численностью объединения равночисленных непересекающихся множеств $A_1 \overline{\cap} A_2 \overline{\cap} A_3 \overline{\cap} \ldots \overline{\cap} A_b$

$$n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b) = a$$

$$c = a \cdot b = n\underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)}_{b} = \underbrace{n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_b)}_{b}$$

Определение 3.

Значением произведения чисел $a, b \in N$ называется число $c \in N$, являющееся численностью декартова произведения множеств

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow n(A) = a \\ B \Rightarrow n(B) = b \end{array}\right| \Rightarrow c = n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = a \cdot b$$

Коммутативность умножения

$$\forall a, b \in N \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Пусть $a = n(A), b = n(B)$

$A \times B \neq B \times A$

$n(A \times B) = n(B \times A)$ на основании свойств декартова произведения множеств

$$\left. \begin{array}{l} n(A \times B) = n(A) \times n(B) = a \cdot b \\ n(B \times A) = n(B) \times n(A) = b \cdot a \end{array} \right| \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

$$\forall a,b,c \in N \quad a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Ассоциативность умножения

$$\forall a,b,c \in N \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Дистрибутивность умножения

Деление

Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b$

$A_1 \overline{\cap} A_2 \overline{\cap} A_3 \overline{\cap} \ldots \overline{\cap} A_b$

$a = n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b)$

Если *b* – численность подмножества, т.е.

$b = n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \ldots = n(A_b)$

$\Rightarrow a : b = c$ - число подмножеств (деление по содержанию)

Если *b* – число подмножеств, то $a : b = c$

- число элементов в подмножестве (деление на равные части)

Свойства деления

$$\forall a, b, c \in N, c \neq 0$$

$$a \vdots c, b \vdots c \Rightarrow (a+b) : c = a : c + b : c$$

$$a \vdots c, b \vdots c \Rightarrow (a-b) : c = a : c - b : c$$

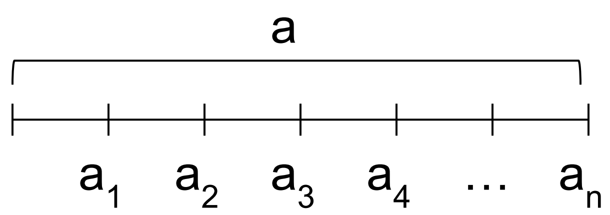
$$a \vdots c, b \vdots c \Rightarrow (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$

$$a \vdots c, b \vdots c \Rightarrow a : (b \cdot c) = (a : c) : b = (a : b) : c$$

Натуральное число как результат измерения величины

Для выяснения смысла натурального числа как меры величины рассмотрим рассуждения на примере одной величины «длина».

Дан отрезок ***a***



Говорят, что отрезок ***a*** разбит на отрезки $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_n$, если он является их объединением и никакие два из них не имеют общей внутренней точки, хотя могут иметь общие концы.

Тогда отрезок ***a*** называется значением суммы данных отрезков.

$a=a_1+a_2+\ldots+a_n$

- Пусть е – **единичный отрезок** или **единица измерения** длины или **мерка**.

Если отрезок **а** разбит на **n** отрезков, каждый из которых равен **е**, то говорят, что отрезок **а** кратен отрезку **е**.

Тогда **n** называется **значением длины** или **мерой** отрезка **а** при единичном отрезке **е**.

- Символическая запись $m_e(a)=n$
- Определение: **натуральное число как результат измерения величины показывает, из скольких единиц состоит измеряемая величина.**

При выбранной единице величины *Е* это число единственное.

Возможность измерять позволяет:

свести сравнение величин к сравнению соответствующих им чисел;

операции с величинами к соответствующим операциям над числами.

Если величины *a* и *b* измерены при помощи единицы величины *e*, то отношения между величинами *a* и *b* будут такими же, как и отношения между их численными значениями и наоборот.

$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b),$

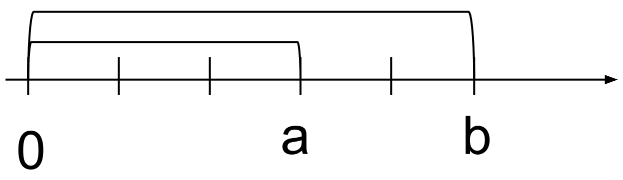
$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$

$a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b).$

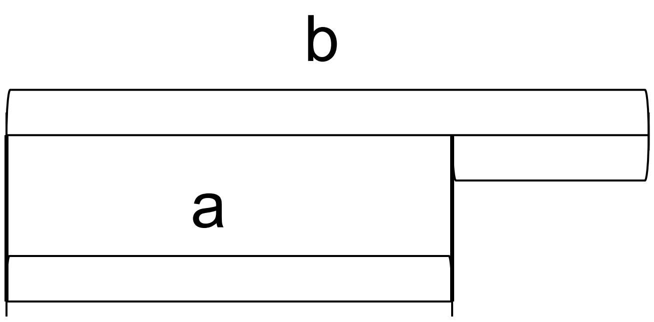
Свойства множества N

- Отношение «меньше»

$a<b \Leftrightarrow m_e(a)<m_e(b)$



1.



2.

- Свойства отношения «меньше» для натуральных чисел имеют истолкование:

транзитивность и антисимметричность этого отношения вытекают из транзитивности и антисимметричности отношения «быть частью величины».

Операции

как результат измерения величин

Однородные величины можно складывать и вычитать.

Величину можно умножать на положительное число, получая величину того же рода.

Величину одного рода можно делить, получая в результате число.

Операции над величинами

Суммой однородных величин A и B называется величина того же рода C, которая определяется как $C=A+B$, при этом $m(A+B)=m(A)+m(B)$.

Разностью однородных величин A и B называется величина того же рода $C=A-B$, такая что $A=B+C$, при этом $m(A-B)=m(A)-m(B)$.

Произведением величины A на число x называется величина $B=x\cdot A$, при этом $m(B)=x\cdot m(A)$.

Частным величин A и B называется положительное действительное число $x=A:B$, такое, что $A=x\cdot B$, при этом $x=m(A):m(B)$.

Смысл суммы и разности чисел как меры величин

Теорема 1 (на примере величины длина):

Если отрезок *x* состоит из отрезков *y* и *z* и их длины выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка *x* равна сумме длин его частей.

Теорема 2

Если отрезок *x* состоит из отрезков *y* и *z* и их длины выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка *z* равна разности длин отрезков *x* и *y*.

Определения суммы и разности

1. Сумму натуральных чисел *a* и *b* можно рассматривать как меру величины *x*, состоящей из величин *y* и *z*, мерами которых являются числа *a* и *b*.

$$a+b=m_E(Y)+m_E(Z)=m_E(Y+Z)$$

2. Разность натуральных чисел *a* и *b* можно рассматривать как меру величины *z=x-y*, что *z+y=x*, если мера величины *x* равна *a*, мера величины *y* равна *b*.

$$a-b=m_E(X)-m_E(Y)=m_E(X-Y)$$

Смысл произведения и частного чисел как меры величин

Теорема 3 (на примере величины длина):

Если отрезок x состоит из a отрезков длины E, а отрезок длины E состоит из b отрезков длины K, то мера длины отрезка x при единице длины K равна $a \cdot b$.

Теорема 4:

Если отрезок x состоит из a отрезков длины E, а отрезок длины K состоит из b отрезков длины E, то мера длины отрезка x при единице длины K равна $a:b$.

Определения произведения и частного

1. Если натуральное число *a* – мера величины *x* при единице измерения *E*, натуральное число *b* – мера единицы измерения *E* при единице измерения *K*, то произведение *a*·*b* – мера величины *x* при единице измерения *K*.

$$a \cdot b = m_E(X) \cdot m_K(E) = m_K(X)$$

2. Если натуральное число *a* – мера величины *x* при единице измерения *E*, натуральное число *b* – мера новой единицы измерения *K* при единице измерения *E*, то частное *a*:*b* – мера величины *x* при единице измерения *K*.

$$a : b = m_E(X) : m_E(K) = m_K(X)$$