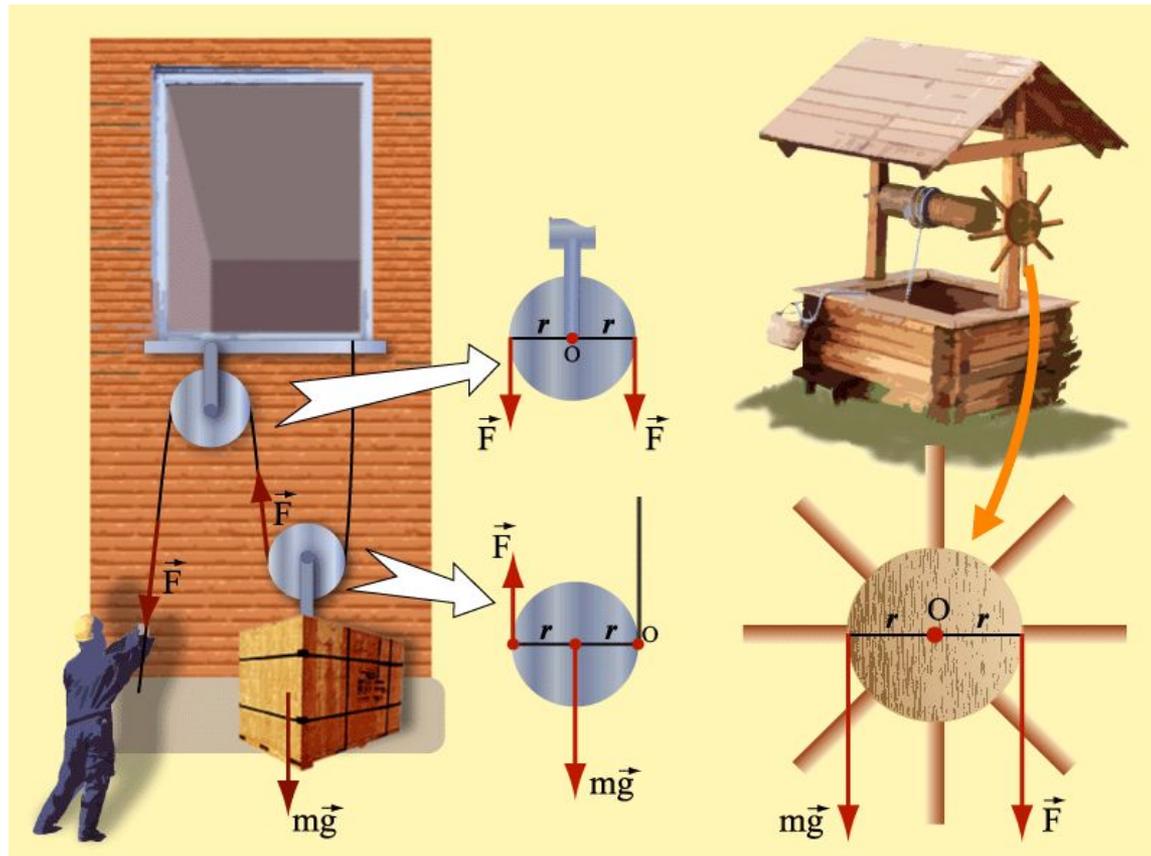


# ТЕМА IV. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## §1. ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЙ



# 1. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

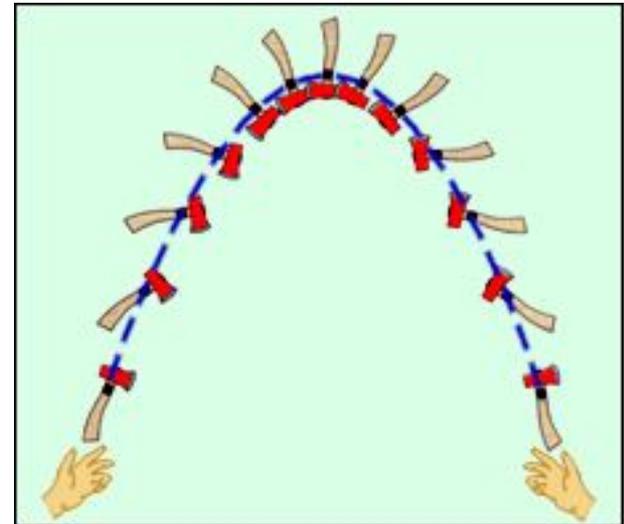
Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу (внешних) сил.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i; \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{r}_c \sum_{i=1}^N m_i = m \vec{r}_c.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = m \dot{\vec{r}}_c \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_i = m \vec{V}_c.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{V}}_i = m \dot{\vec{V}}_c \Rightarrow m \vec{a}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$



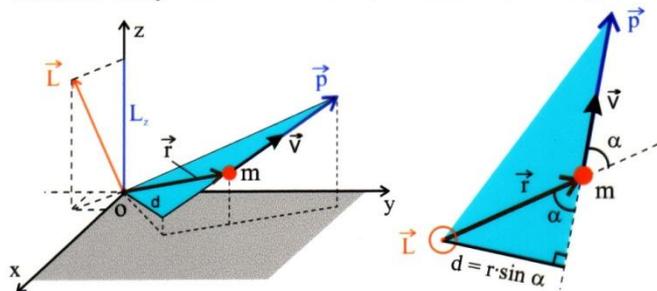
# 2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

## Момент импульса

Момент импульса  $\vec{L}$  материальной точки  $m$  относительно точки  $O$  есть псевдовектор:  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$

$\vec{r}$  - радиус-вектор материальной точки  $m$

Момент импульса есть мера механического движения



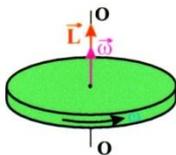
Вектор  $\vec{L}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p} \cdot \sin(\hat{\vec{r}}\hat{\vec{p}}) = \vec{p} \cdot \vec{d} \quad d = r \cdot \sin(\hat{\vec{r}}\hat{\vec{p}}) - \text{плечо импульса}$$

Проекция вектора  $\vec{L}$  на некоторую ось  $Z$  называется моментом импульса  $L_z$  относительно оси

Для системы материальных точек полный момент  $\vec{L}$  относительно точки  $O$ :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

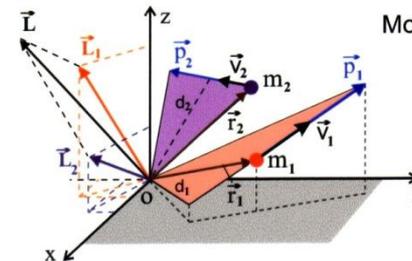


Момент импульса абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  относительно главной оси  $OO'$

$$\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega}$$

$I$  - момент инерции тела относительно оси  $OO'$

## Свойства момента импульса



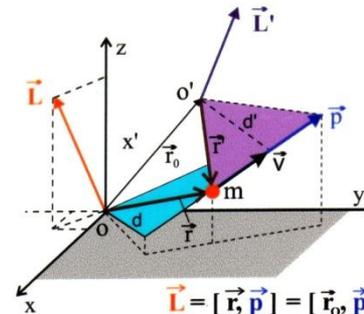
Момент импульса системы  $N$  материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

$\vec{L}$  - величина аддитивная

Момент импульса зависит от выбора точки  $O$  в данной системе отсчета:  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ ,  $\vec{L}' = [\vec{r}', \vec{p}]$

$$\vec{L} \neq \vec{L}'$$



$\vec{L}$  - момент импульса относительно точки  $O$

$\vec{L}'$  - момент импульса относительно точки  $O'$

Преобразование момента импульса при переходе от точки  $O$  к точке  $O'$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}_0, \vec{p}] + [\vec{r}', \vec{p}] = [\vec{r}_0, \vec{p}] + \vec{L}'$$

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{r}_0, \vec{p}]$$

Так как импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$  зависит от выбора системы отсчета, момент импульса тоже зависит от выбора системы отсчета

# 3. МОМЕНТ СИЛЫ

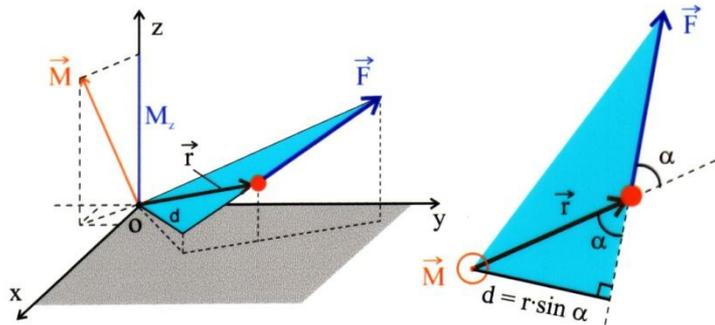
## Момент силы

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки O есть *псевдовектор*:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$\vec{r}$  - радиус-вектор точки приложения силы

Момент силы есть величина, характеризующая вращательный эффект силы



Вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{r}$

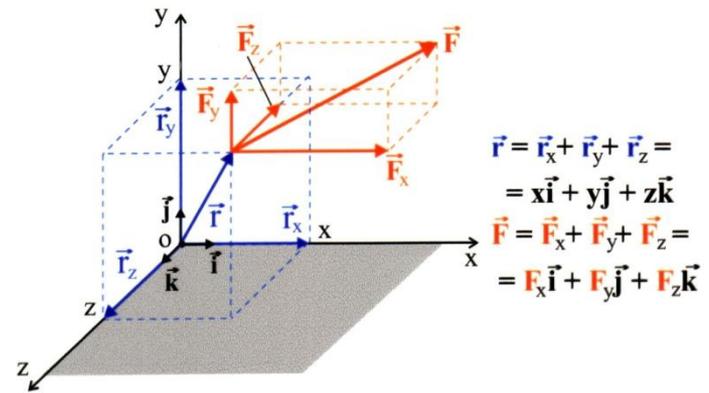
$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F} \cdot \sin(\hat{\vec{r}}\hat{\vec{F}}) = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad \vec{d} = \vec{r} \cdot \sin(\hat{\vec{r}}\hat{\vec{F}}) - \text{плечо силы}$$

Проекция вектора  $\vec{M}$  на некоторую ось Z называется моментом силы  $M_z$  относительно оси

Для системы м.т. полный момент  $\vec{M}_{\text{системы}}$  относительно точки O:

$$\vec{M}_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

## Момент силы относительно оси



$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{F} &= \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = \\ &= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \end{aligned}$$

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки O

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= [(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}), (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})] = \\ &= \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x) \end{aligned}$$

Моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси z называется проекция момента M относительно точки O на эту ось

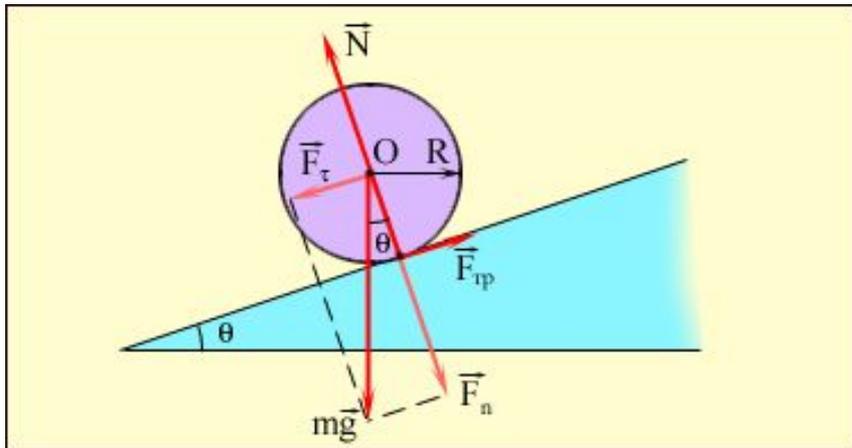
$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$

# 4. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ

$$m_i \dot{V}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N f_{ij} + F_i; \quad [r_i \times m_i \dot{V}_i] = \left[ r_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^N f_{ij} \right] + [r_i \times F_i].$$

$$\frac{d}{dt} [r \times mV] = [r \times m\dot{V}] + [r \times m\dot{V}] = [V \times mV] + [r \times m\dot{V}] = [r \times m\dot{V}] \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{M}_{ij}^* + \vec{M}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i, j=1; i \neq j}^N \vec{M}_{ij}^* + \sum_{i=1}^N \vec{M}_i.$$



$$\vec{M}_{ij}^* + \vec{M}_{ji}^* = 0 \Rightarrow \sum_{i, j=1; i \neq j}^N \vec{M}_{ij}^* = 0 \Rightarrow$$

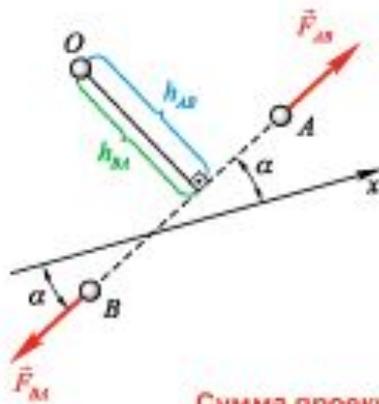
$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

# 5. СУММАРНЫЙ МОМЕНТ ВНУТРЕННИХ СИЛ

1/10

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СТАТИКА. Аксиома действия и противодействия



Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположно направленными по прямой, соединяющей эти точки.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Силы взаимодействия между телами и точками, образующими механическую систему, называются внутренними.

Сумма проекций внутренних сил на любую ось равна нулю.

Сумма моментов внутренних сил равна нулю относительно любого центра.

Для любой внутренней силы найдется другая, парная, такая что:

$$-F_{BA} \cos \alpha = F_{AB} \cos \alpha; \quad -F_{BA} \cdot h_{BA} = F_{AB} \cdot h_{AB};$$

# 6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$$d\vec{L} = \vec{M}dt;$$

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow d\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Момент импульса замкнутой (изолированной) системы есть величина постоянная.

$$\vec{M} \neq 0; \quad M_z = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{L} \neq const;$$

$$L_z = const.$$

**3** Законы сохранения в механике. Механические колебания и волны  
**ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА**

$J_1 < J_2$   
 $\omega_1 > \omega_2$

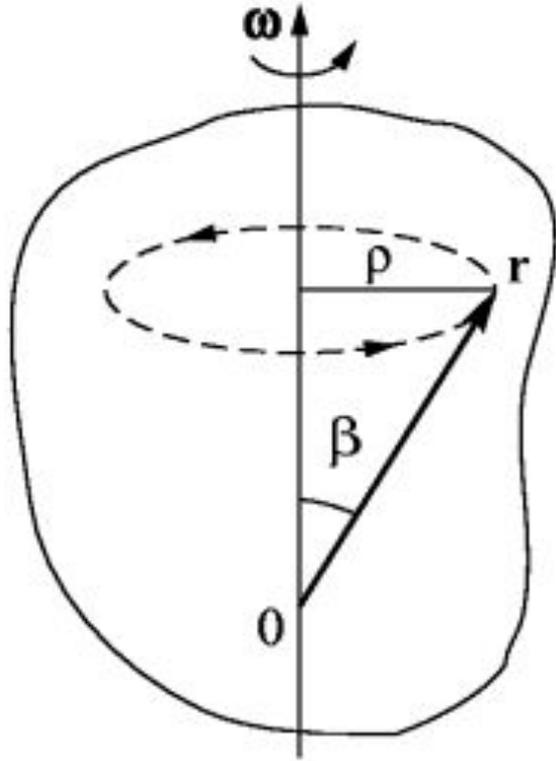
$v_A r_A = r_{II} v_{II}$

$L = J\omega = const$

**ГИРОСКОП**  
**АВТОГОРИЗОНТ**  
**ВЕРТОЛЕТ**  
 $L = m r \sin \varphi = const$

**ФИЗИКА** EDUSTRONG **ИПСО** Департамент Взаимодействие образования и науки Российской Федерации  
 Федеральное образовательное учреждение высшего образования "Университет ИТМО" (ИТМО) (Санкт-Петербург)  
 © 2019. Все права защищены.

# 7. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА



$$\vec{L}_i = \left[ \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i \right] = m_i \left[ \vec{r}_i \times \vec{V}_i \right].$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{V}_i \Rightarrow L_i = m_i r_i V_i; \quad V_i = \omega R_i \Rightarrow$$

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \sin \beta_i;$$

$$r_i \sin \beta_i = R_i \Rightarrow L_{zi} = m_i R_i^2 \omega_z.$$

$$L_z = \sum_{i=1}^N L_{zi} = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_{i=1}^N m_i R_i^2; \quad I \equiv \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \Rightarrow L_z = I \omega_z.$$

# 8. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N L_{zi} = \sum_{i=1}^N M_{zi} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

$$L_z = I\omega_z \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\omega_z) = M_z \Rightarrow I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z.$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_z \Rightarrow I\varepsilon_z = M_z.$$

**12** МЕХАНИКА, КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА  
**ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

**ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ**

$$\varepsilon = \frac{M}{J}$$

$\varepsilon \sim M$        $\varepsilon \sim \frac{M}{J}$

**МОМЕНТ СИЛЫ**

$M = Fr \sin \alpha = F_2 r = Fd$

**МОМЕНТ ИНЕРЦИИ**

$J_0 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$   
 O - центр масс

**ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА**

$J_d = J_0 + md^2$

**ФИЗИКА EDUSTRONG** **КАРПИ** Дополнение к учебнику по физике для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с. ISBN 5-02-011716-8

# 9. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТ ИНЕРЦИИ



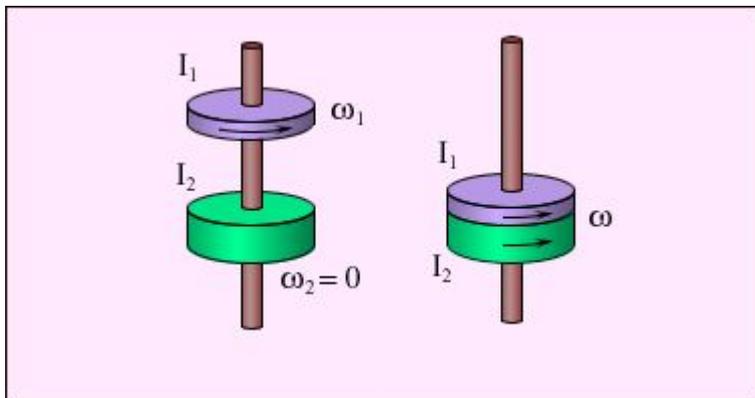
В общем случае  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  не совпадают по направлению. Для однородного тела, симметричного относительно оси вращения  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ .

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const.}$$

$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = I\omega_z = \text{const.}$$

$$I_1\omega_{z1} = I_2\omega_{z2} = \text{const.};$$

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega.$$



# 10. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

СТАТИКА

ФИЗИКА

63

## Условие равновесия тел

Материальная точка



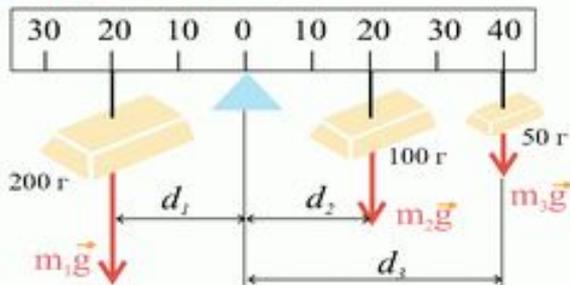
$$\vec{N} + m\vec{g} = 0$$

$$\text{ou) } N - mg = 0$$

$$N = mg$$

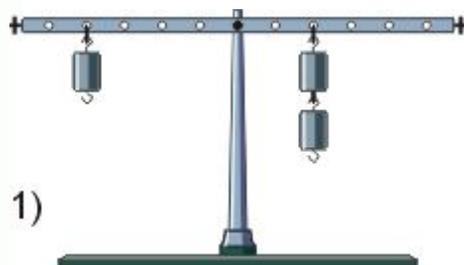
$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Тело с неподвижной осью вращения

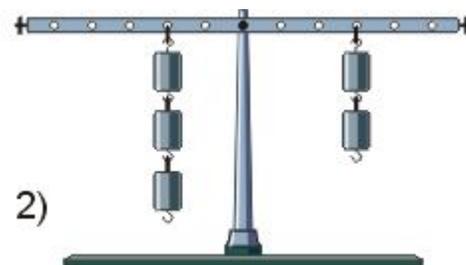


$$m_2 g d_2 + m_3 g d_3 - m_1 g d_1 = 0$$

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \sum M_i = 0$$

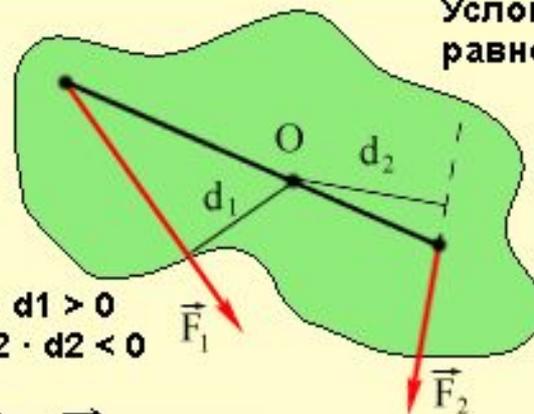


1)



2)

Условия равновесия тел



$$M1 = F1 \cdot d1 > 0$$

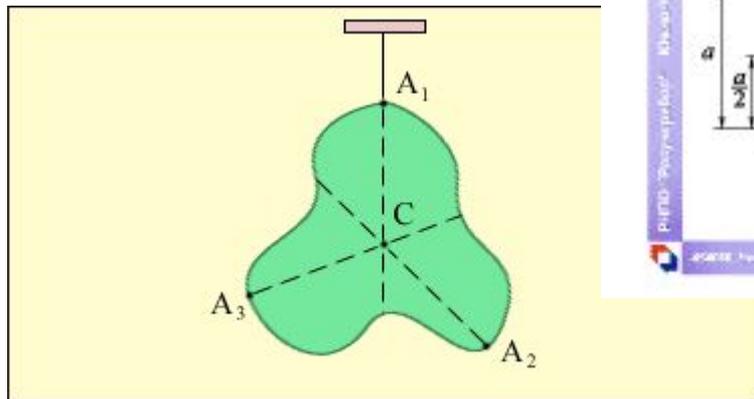
$$M2 = -F2 \cdot d2 < 0$$

$$1) \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0.$$

$$2) M1 + M2 + \dots = 0.$$



# 11. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ



1/20

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

## СТАТИКА. Центр тяжести

**Центр тяжести** — точка твердого тела, при закреплении которой само тело находится в равновесии в **любом** положении.

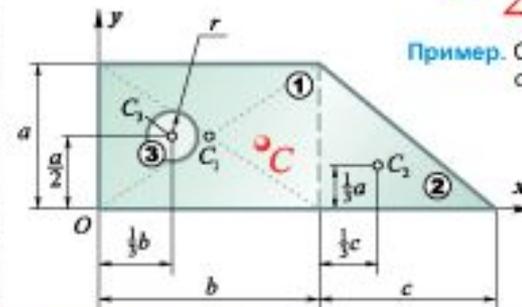
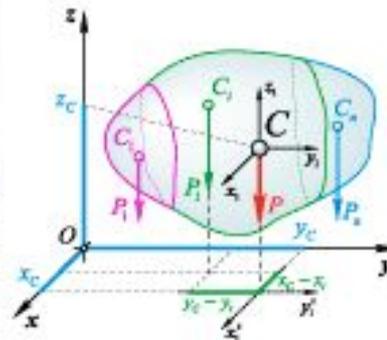
Сумма моментов сил веса частей тела относительно его центра тяжести равна нулю в **любом** положении тела:

$$\sum_i \text{mom}_{x_i} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (x_c - x_i) = 0$$

$$\sum_i \text{mom}_{y_i} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (y_c - y_i) = 0$$

Следовательно, координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \text{по аналогии } z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$



**Пример.** Определить положение центра тяжести однородной пластины с отверстием радиуса  $r$ .

$$x_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} a c \left( b + \frac{c}{3} \right) - \pi r^2 \cdot \frac{b}{3}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2};$$

$$y_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \frac{a}{3} - \pi r^2 \cdot \frac{a}{2}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2}.$$

Площадь круга как отверстия взята со знаком «-».

# 12. РЫЧАГИ

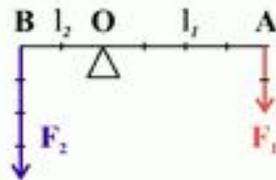
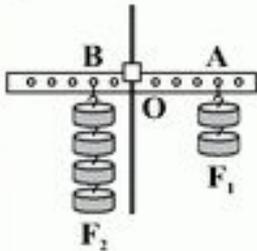
## СТАТИКА

## ФИЗИКА

65

### Рычаг

#### Правило равновесия рычага



$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

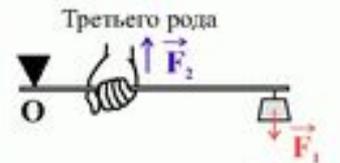
#### Виды рычагов



Первого рода  
точка опоры расположена между точками приложения сил (катели, ножницы)

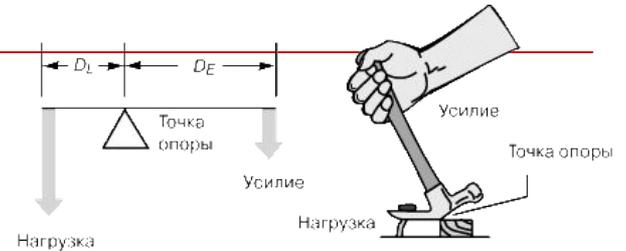


Второго рода  
нагрузка приложена между точкой опоры и точкой приложения силы (тачка, щипцы)

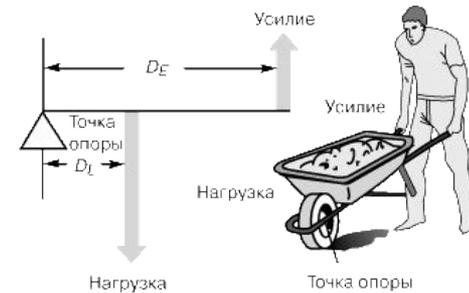


Третьего рода  
усилие приложено между точкой опоры и нагрузкой (предплечье, пинцет)

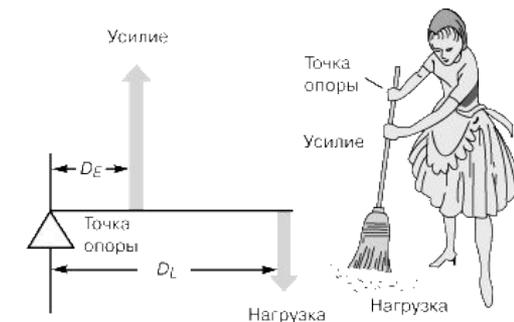
O - точка опоры  $\vec{F}_1$  - нагрузка  $\vec{F}_2$  - усилие



РЫЧАГ I РОДА (точка опоры между усилием и нагрузкой)



РЫЧАГ II РОДА (нагрузка между точкой опоры и усилием)



РЫЧАГ III РОДА (усилие между точкой опоры и нагрузкой)



# §2. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

---



# 1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕЛА

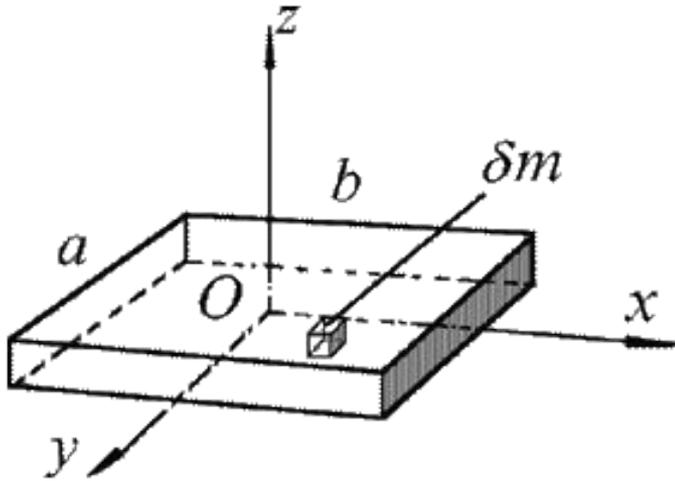


Рис. 30. Представление пластинки в виде набора малых элементов

$$I = \sum_{i=1}^N \delta m_i R_i^2; \quad [k\mathcal{L}] = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}^2.$$

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad [\rho] = 1 \frac{k\mathcal{L}}{\mathcal{M}^3}.$$

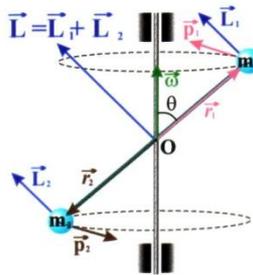
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

$$\delta m_i = \rho_i \Delta V_i \Rightarrow I = \sum_{i=1}^N \rho_i R_i^2 \Delta V_i; \quad \rho_i = \rho = const \Rightarrow I = \rho \sum_{i=1}^N R_i^2 \Delta V_i.$$

$$I = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV. \quad \rho = const \Rightarrow I = \rho \int_V R^2 dV.$$

# 2. ГЛАВНЫЕ ОСИ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

## Главные оси инерции



Два маленьких шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 = m_2$ ), закрепленных на концах невесомого стержня, составляющего угол  $\theta$  с осью вращения, вращаются с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Их моменты импульса относительно центра масс

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1, \quad \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

и суммарный момент импульса

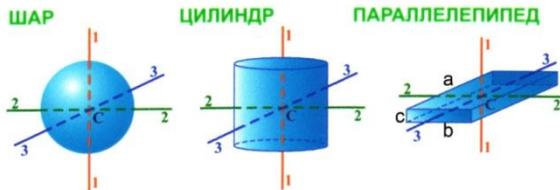
$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

не совпадает с направлением вектора  $\vec{\omega}$

В общем случае момент импульса твердого тела относительно центра масс не совпадает по направлению с осью вращения

Ось вращения, проходящая через центр масс твердого тела, относительно которой момент импульса параллелен оси, называется главной осью инерции

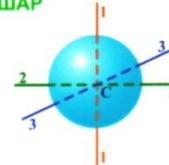
Для произвольного твердого тела существует не менее трех главных осей, перпендикулярных друг другу



## Главные моменты инерции

Момент инерции тела относительно главной оси инерции называется главным моментом инерции

ШАР

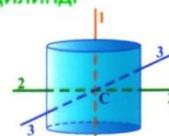


Если тело обладает центральной симметрией - все три главных момента инерции одинаковы

$$I_1 = I_2 = I_3$$

(любая ось, проходящая через центр инерции  $C$  является главной)

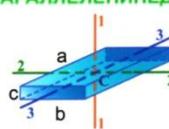
ЦИЛИНДР



Для тел с осевой симметрией два главных момента инерции имеют одинаковую величину

$$I_1 \neq I_2 = I_3$$

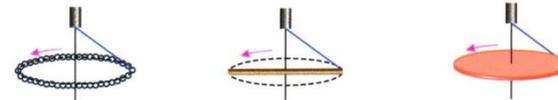
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



В общем случае главные моменты инерции различны ( $a > b > c$ )

$$I_1 > I_2 > I_3$$

Устойчивое вращение тел возможно только вокруг главных осей инерции, соответствующих максимальному и минимальному моментам инерции

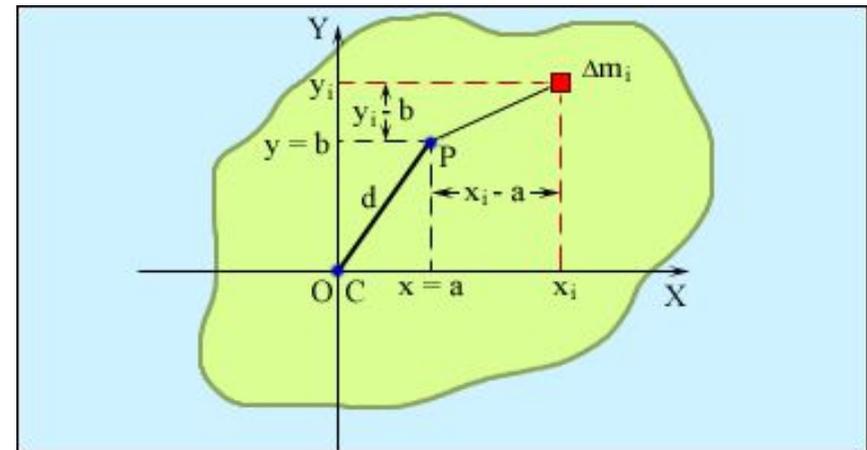
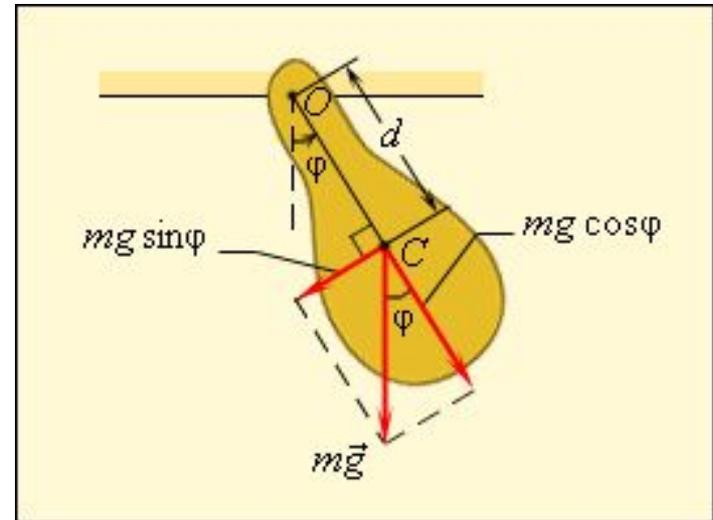


# 3. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА (I)



Якоб Штейнер  
1796 – 1863

швейцарский математик



# 4. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА (II)

Момент инерции  $I$  относительно произвольной оси (ось  $O'$ ) равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси, параллельной данной

и проходящей через центр масс тела (ось  $O$ ), и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$I = I_c + ma^2.$$

$$r_i = a + r_i \Rightarrow r_i'^2 = (a + r_i)^2 = a^2 + 2ar_i + r_i^2.$$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i'^2 = a^2 \sum_{i=1}^N m_i + 2a \sum_{i=1}^N m_i r_i + \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i r_i = m r_c = 0 \Rightarrow I = ma^2 + I_c.$$

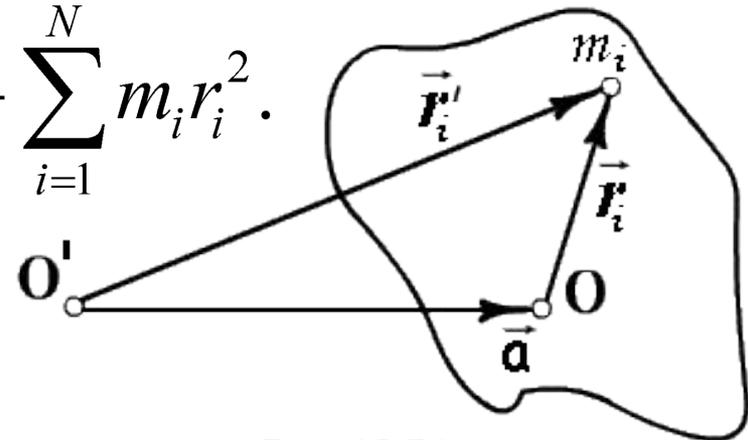


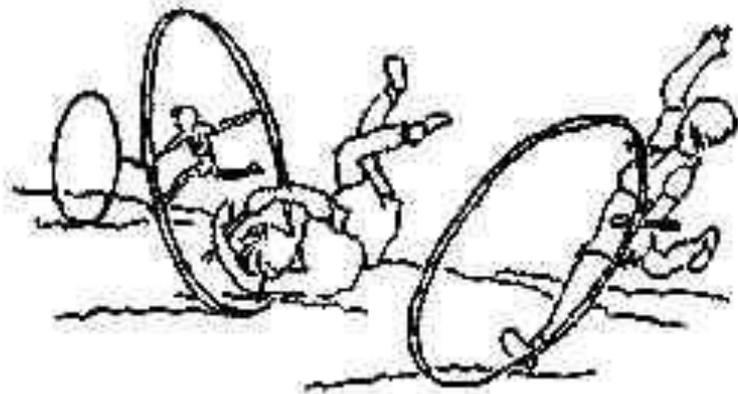
Рис. 13.7'

# 5. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО ОБРУЧА

$$I = \sum_{i=1}^N \delta m_i r_i^2; \quad r_i = R \Rightarrow$$

$$I = R^2 \sum_{i=1}^N \delta m_i;$$

$$\sum_{i=1}^N \delta m_i = m \Rightarrow I = mR^2.$$



# 6. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

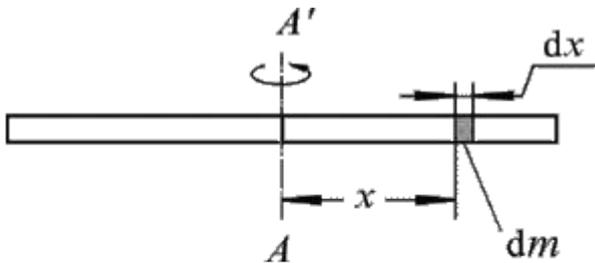


Рис.27. Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину в виде совокупности малых элементов  $dx$

$$I = \int x^2 dm; \quad dm = \lambda dx; \quad \lambda = \frac{m}{l} \Rightarrow$$

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \lambda dx = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{m}{l} \left( \frac{x^3}{3} \right)_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{l} \left( \frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) = \frac{ml^2}{12}.$$

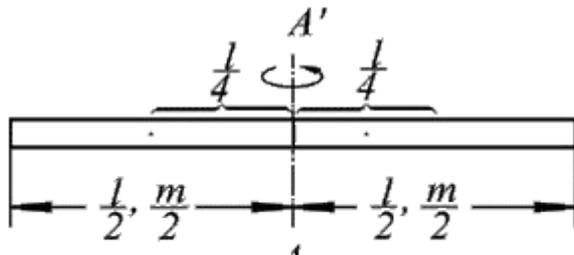


Рис.28. К определению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину с помощью метода подобия

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} + m \frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

# 7. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОГО ДИСКА

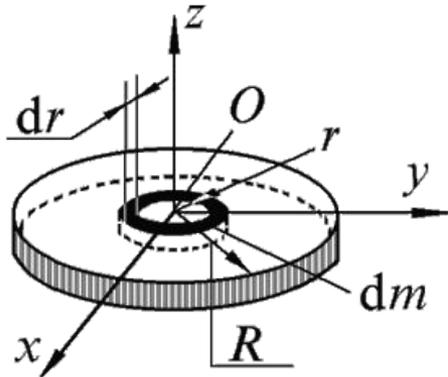


Рис.32. Выбор системы координат  
и представление диска в виде  
набора тонких колец

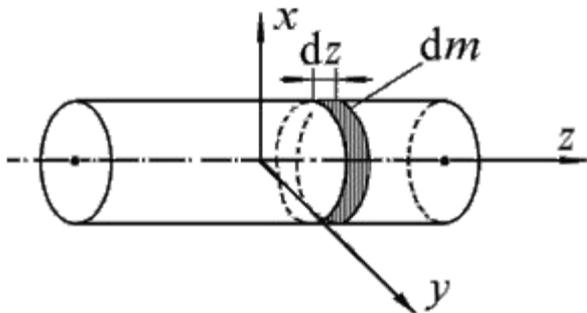


Рис.33. Выбор системы координат  
и представление цилиндра в виде  
набора тонких дисков

$$I = \int r^2 dm; \quad dm = \sigma dS;$$

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}; \quad dS = 2\pi r dr \Rightarrow$$

$$I = \int_0^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr \Rightarrow$$

$$I = \frac{2m}{R^2} \left( \frac{r^4}{4} \right)_0^R = \frac{2m}{R^2} \left( \frac{R^4}{4} \right) = \frac{mR^2}{2}.$$

# 8. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО ДИСКА ОТНОСИТЕЛЬНО ДИАМЕТРА

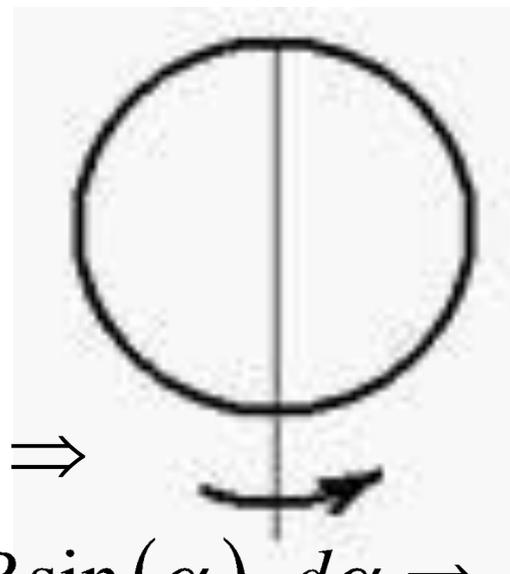
$$I = \int x^2 dm; \quad dm = \sigma dS; \quad \sigma = \frac{m}{\pi R^2}; \quad dS = 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \Rightarrow$$

$$I = 2 \int_0^R x^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \Rightarrow$$

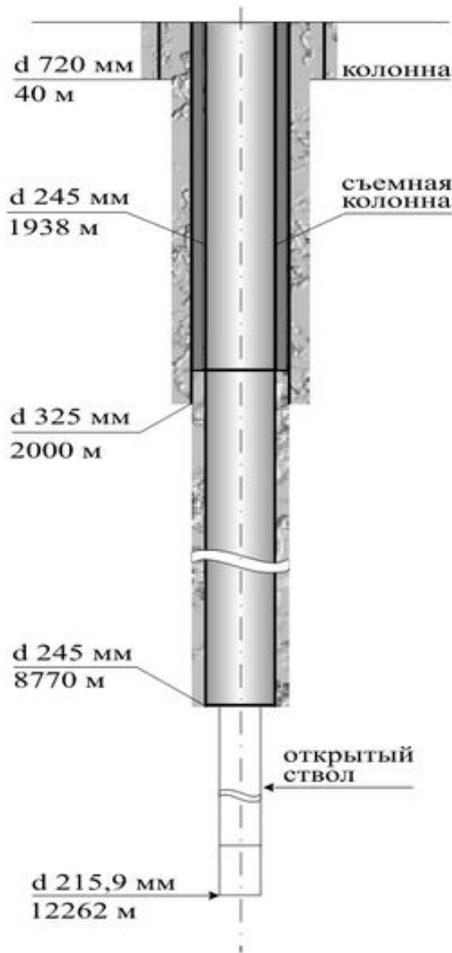
$$I = \frac{4m}{\pi R^2} \int_0^R x^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx. \quad x = R \cos \alpha \Rightarrow$$

$$I = \frac{4m}{\pi R^2} \int_{\pi/2}^0 R^2 \cos^2(\alpha) \cdot R \sin(\alpha) \cdot (-1) R \sin(\alpha) \cdot d\alpha \Rightarrow$$

$$I = \frac{4}{\pi} m R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) d\alpha = \frac{m R^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(2\alpha) d(2\alpha) = \frac{m R^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{m R^2}{4}.$$



# 9. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОЙ ТРУБКИ



$$I = \int r^2 dm; \quad dm = \sigma dS;$$

$$dS = 2\pi r dr;$$

$$\sigma = \frac{m}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} \Rightarrow$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{m 2\pi r dr}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} = \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \Rightarrow$$

$$I = \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{r^4}{4} \right)_{R_1}^{R_2} = \frac{m}{2} (R_2^2 + R_1^2).$$

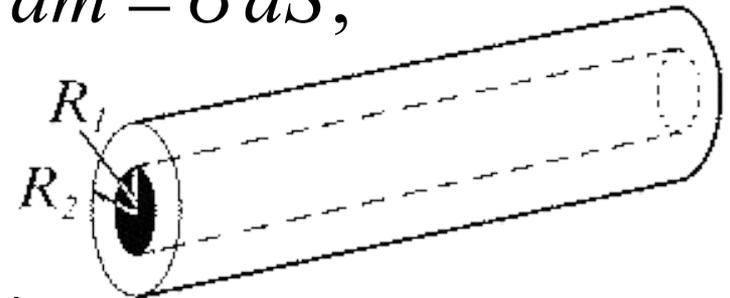
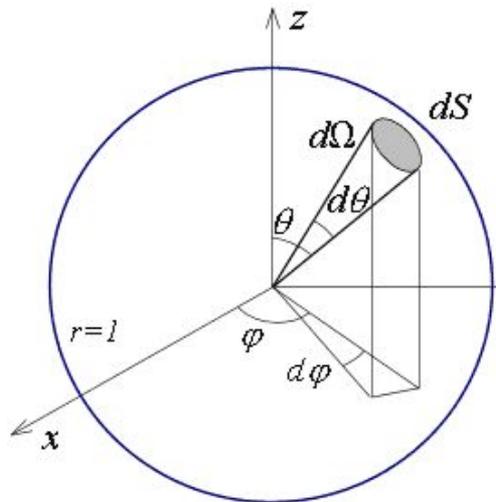


Рис.34. Схематическое представление цилиндра с центральным отверстием

# 10. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОЙ СФЕРЫ



$$\delta I_z = r^2 \sin^2(\theta) \delta m;$$

$$\delta m = \frac{dm}{4\pi} d\Omega; \quad d\Omega = \frac{dS}{r^2};$$

$$dS = 2 \cdot 2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta \Rightarrow$$

$$d\Omega = 4\pi \sin \theta d\theta \Rightarrow \delta m = dm \sin \theta d\theta \Rightarrow$$

$$\delta I_z = r^2 dm \sin^3(\theta) d\theta = -r^2 dm \sin^2(\theta) d(\cos \theta) \Rightarrow$$

$$dI_z = -r^2 dm \int_1^0 (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \Rightarrow$$

$$dI_z = r^2 dm \left[ (\cos \theta)_0^1 - \frac{1}{3} (\cos^3 \theta)_0^1 \right] \Rightarrow I = \frac{2}{3} mr^2.$$

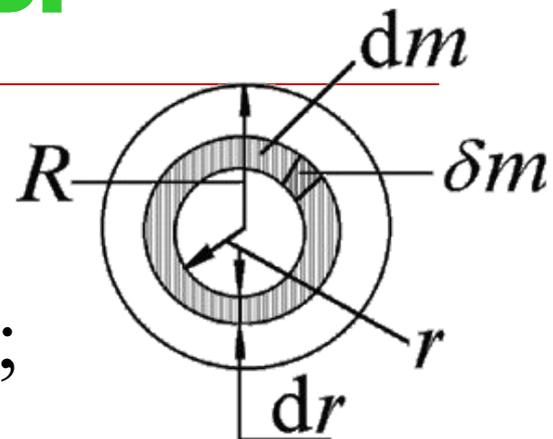
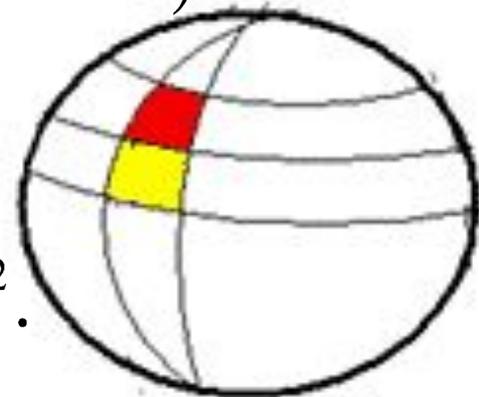
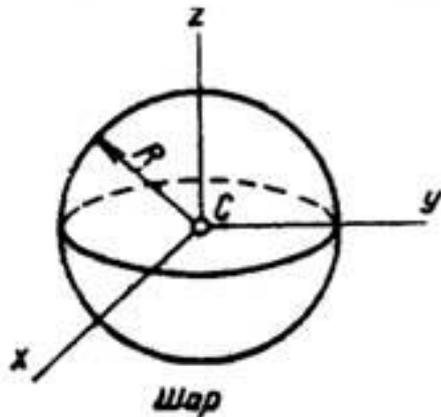


Рис.35. Схематическое представление шара как совокупности сферических слоев



# 11. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОГО ШАРА

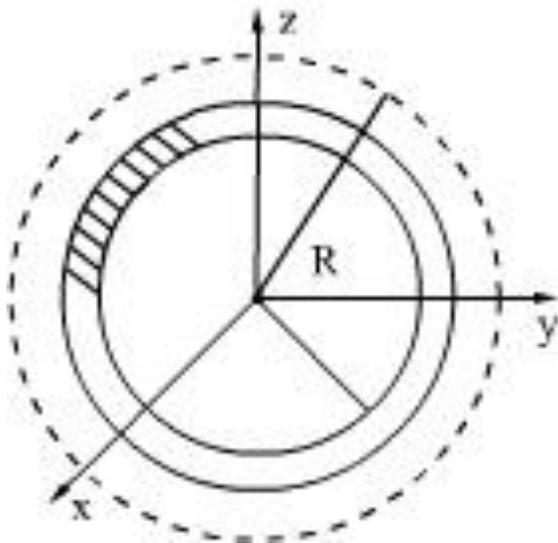


$$dI(r, dr) = \frac{2}{3} r^2 dm; \quad dm = \frac{m}{V} dV;$$

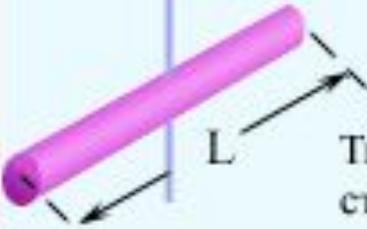
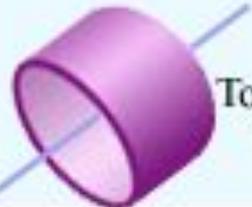
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad dV = 4\pi r^2 dr \Rightarrow$$

$$dI = \frac{2}{3} r^2 \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2m}{R^3} r^4 dr \Rightarrow$$

$$I = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2m}{R^3} \left( \frac{r^5}{5} \right)_0^R = \frac{2}{5} mR^2.$$



# 12. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПРСТЫХ ТЕЛ

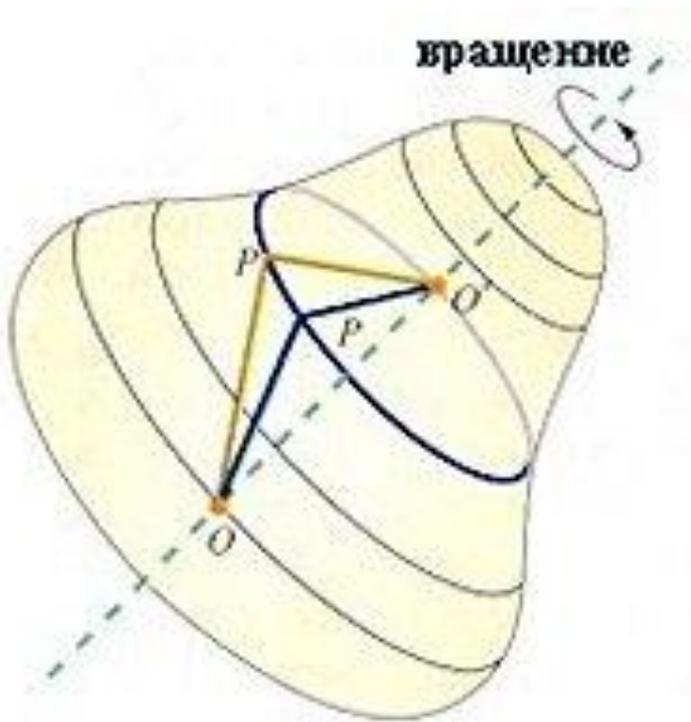
$I_c = \frac{1}{12} ML^2$  <p>Твердый стержень</p>	$I_c = \frac{2}{5} MR^2$  <p>Шар</p>	$I_c = \frac{2}{3} MR^2$  <p>Тонкостенная сферическая оболочка</p>
$I_c = MR^2$  <p>Тонкостенный цилиндр</p>	$I_c = \frac{1}{2} MR^2$  <p>Диск</p>	$I_c = \frac{1}{4} MR^2$  <p>Диск</p>

# §3. ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

---



# 1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА



$$K_i = \frac{m_i V_i^2}{2}; \quad V_i = \omega R_i \Rightarrow$$

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i R_i^2.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = I \Rightarrow K = \frac{I \omega^2}{2}.$$

$$L = I \omega \Rightarrow K = \frac{I^2 \omega^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}.$$

# 2. РАБОТА МОМЕНТА СИЛ

$$dA_i = \vec{f}_i d\vec{r}_i + \vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{f}_i \vec{V}_i dt + \vec{F}_i \vec{V}_i dt.$$

$$\vec{V}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \Rightarrow dA_i = \vec{f}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt + \vec{F}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] dt.$$

$$\vec{f}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] = \vec{\omega} [\vec{r}_i \times \vec{f}_i] = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i^*;$$

$$\vec{F}_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] = \vec{\omega} [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i \Rightarrow$$

$$dA = \sum_{i=1}^N dA_i = \sum_{i=1}^N \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i^* dt + \sum_{i=1}^N \vec{\omega} \cdot \vec{M}_i dt.$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i^* = 0; \quad \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \vec{M} \Rightarrow dA = \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt;$$

$$\vec{\omega} dt = d\varphi \Rightarrow dA = \vec{M} \cdot d\varphi = M_z d\varphi; \quad A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi.$$

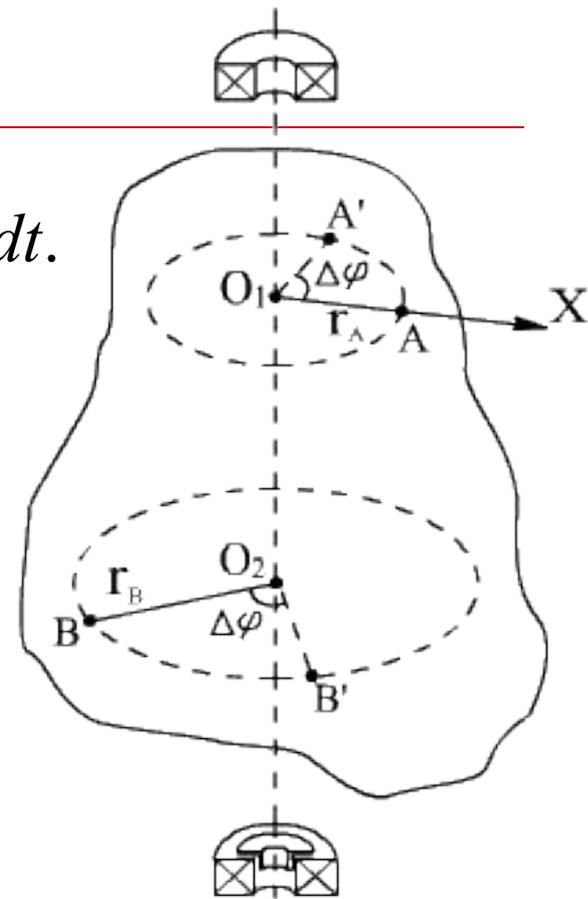
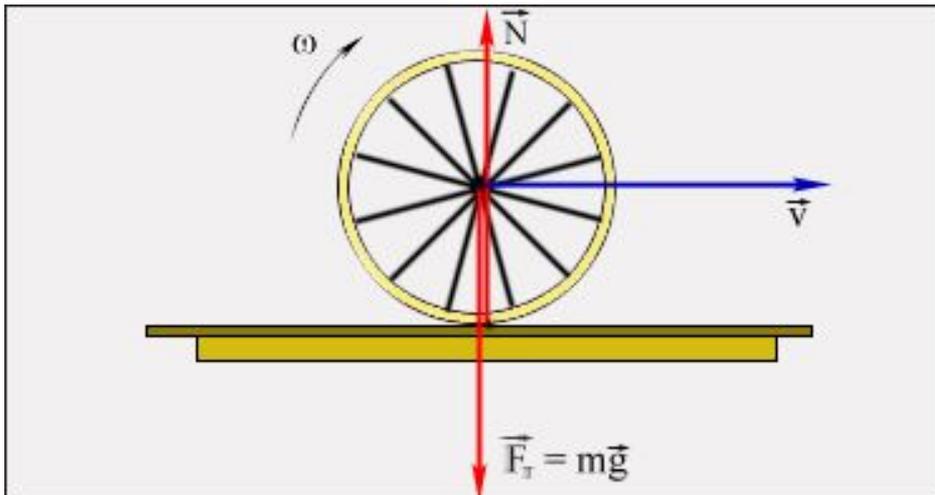
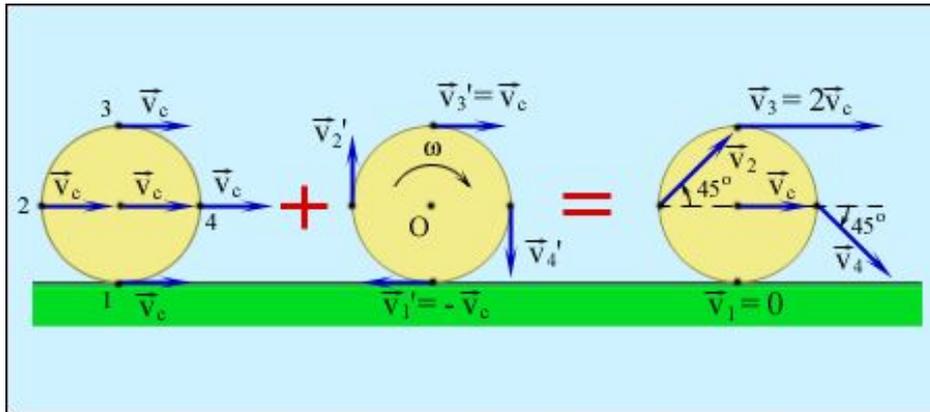


Рис. 13.4

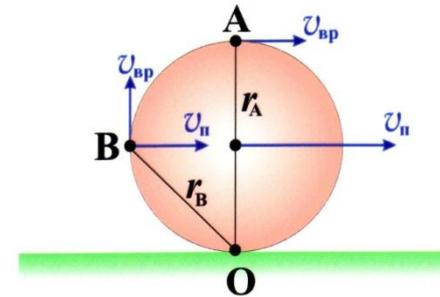
# 3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ



## Плоское движение

Движение тела, при котором траектории точек тела лежат в параллельных плоскостях, называются **плоским**

Это движение можно представить двумя способами



как сумму поступательного движения тела, например центра масс со скоростью  $\vec{v}$  и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс  $\vec{v}_{вр}$

$$\vec{v} = \vec{v}_н + \vec{v}_{вр}$$

$$v_A = v_н + v_{вр} = 2 v_н$$

$$v_O = v_н - v_{вр} = 0$$

$$v_B = \sqrt{v_н^2 + v_{вр}^2} = v_н \sqrt{2}$$

только вращательного движения вокруг мгновенной оси  $O$ , положение которой непрерывно меняется

$$\omega_{мгн} = \frac{v}{r}$$

$$v = \omega_{мгн} \cdot r$$

$$v_A = \frac{v_н}{2} \cdot r_A = 2 v_н$$

$$v_O = 0$$

$$v_B = \frac{v_н}{2} \cdot r_B = v_н \sqrt{2}$$

# 4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

$$\vec{V}_i = \vec{V}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]; \quad K_i = \frac{m_i V_i^2}{2} \Rightarrow \quad K_i = \frac{m_i}{2} \left\{ V_0^2 + 2V_0 [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]^2 \right\} \Rightarrow$$

$$K_i = \frac{m_i}{2} \left\{ V_0^2 + 2V_0 [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + \omega^2 R_i^2 \right\}. \quad |[\vec{\omega} \times \vec{r}_i]| = \omega r_i \sin \beta = \omega R_i \Rightarrow$$

$$K_i = \frac{m_i}{2} \left\{ V_0^2 + 2[V_0 \times \vec{\omega}] \cdot \vec{r}_i + \omega^2 R_i^2 \right\}. \quad K = \sum_{i=1}^N K_i \Rightarrow$$

$$K = \frac{V_0^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i + [V_0 \times \vec{\omega}] \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i R_i^2.$$

$$\sum_{i=1}^N m_i = m; \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_c; \quad \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = I_0 \Rightarrow$$

$$K = \frac{m V_0^2}{2} + m \vec{r}_c [V_0 \times \vec{\omega}] + \frac{I_0 \omega^2}{2}.$$

$$\vec{r}_c = 0 \Rightarrow K = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}.$$

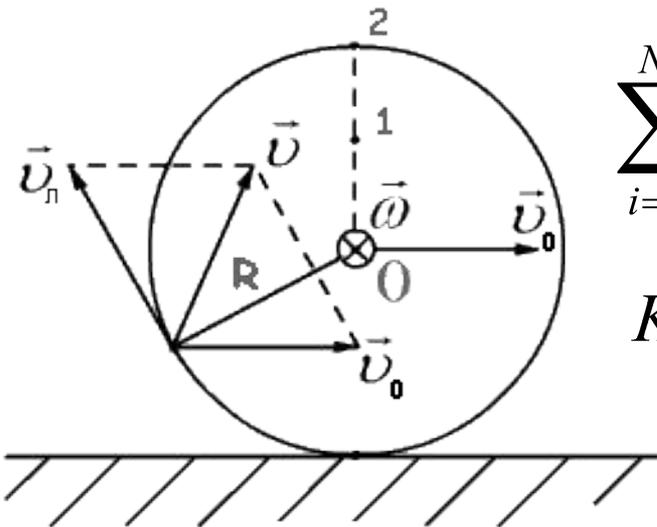


Рис. 13.5

# §4. ГИРОСКОПЫ

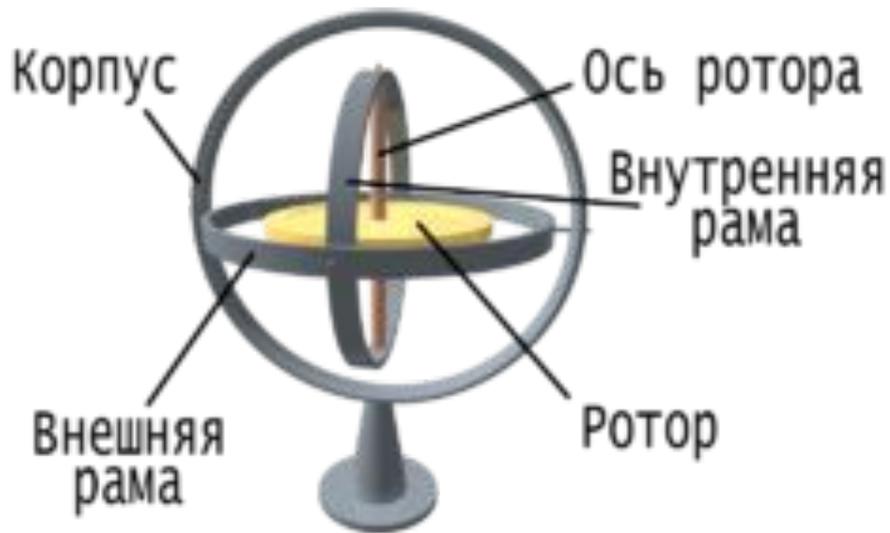
---



Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии (оси гироскопа).

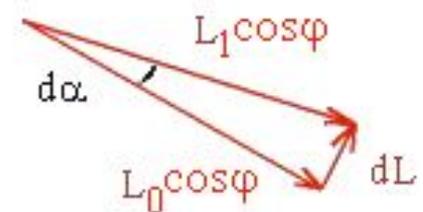
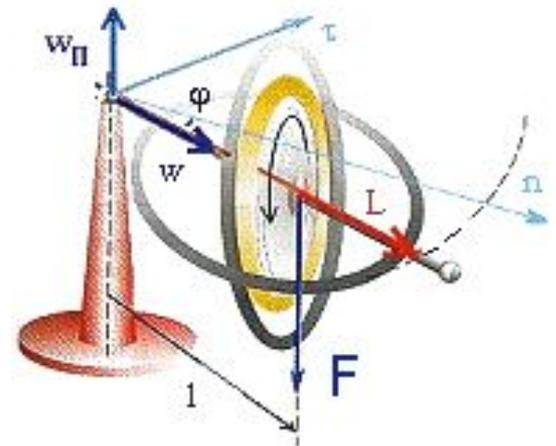
# 1. УСТРОЙСТВО ГИРОСКОПА

---



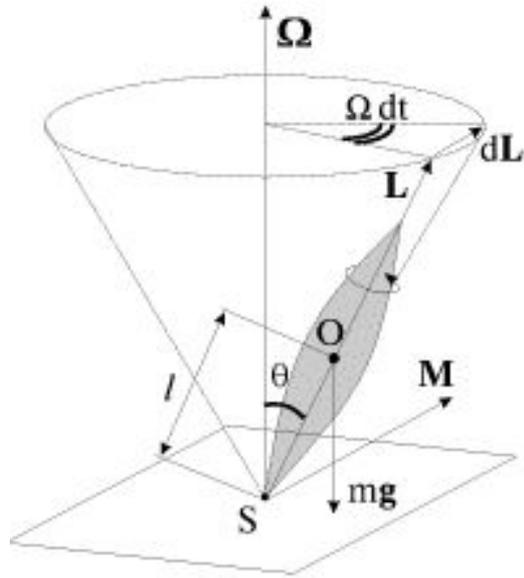
# 2. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Гироскопический эффект состоит в том, что под действием внешней силы, перпендикулярной моменту импульса, ось гироскопа поворачивается в плоскости, содержащей момент импульса гироскопа и момент внешней силы ( перпендикулярной моменту импульса и силе).



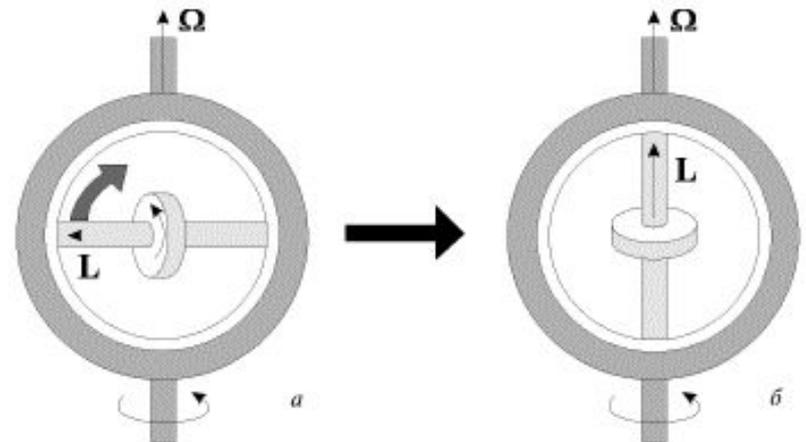
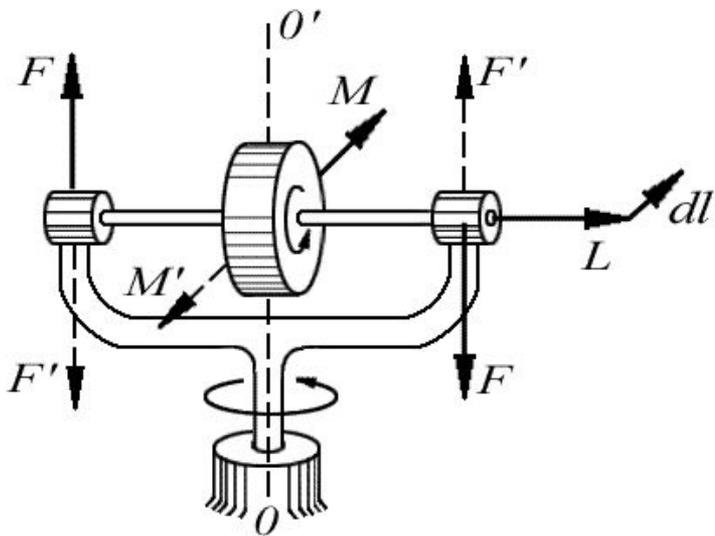
вид сверху

# 4. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ СИЛЫ



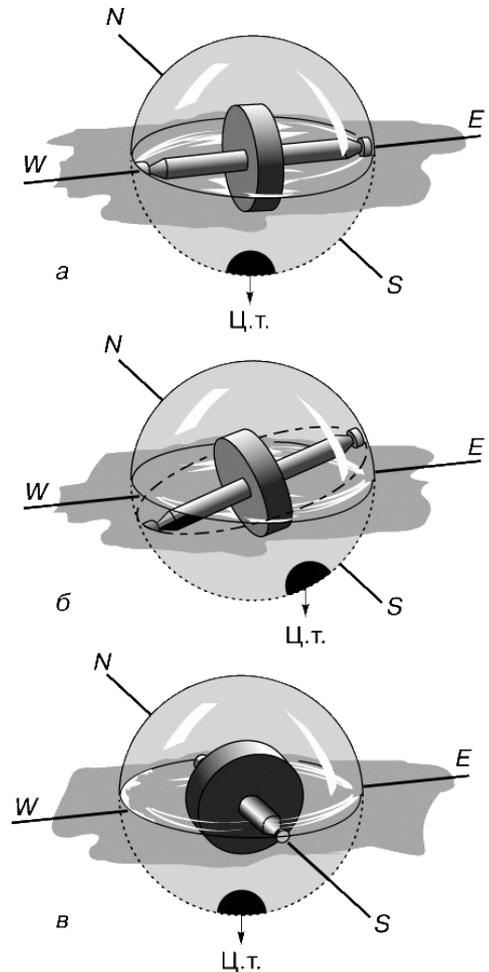
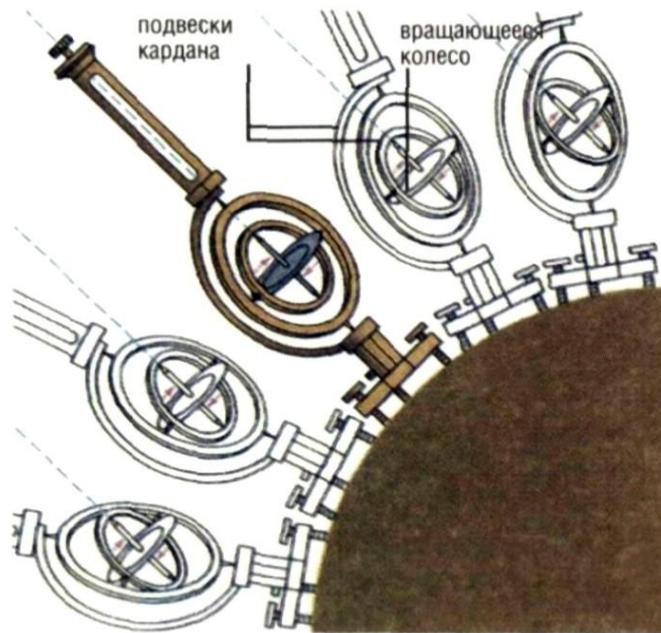
$$\Omega dt = \frac{|dL|}{L} = \frac{M dt}{L} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{M}{L} \Rightarrow \vec{M} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}]; \quad \vec{M}' = [\vec{L} \times \vec{\Omega}].$$

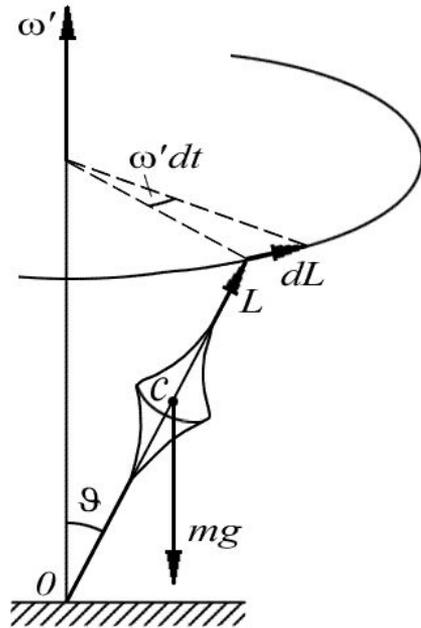


# 5. ГИРОКОМПАС

Гирскопическим компасом (гироскопом) называется гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости под влиянием суточного Вращения Земли.



# 6. ПРЕЦЕССИЯ ВОЛЧКА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ



$$M = mgl \sin \theta; \quad d\vec{L} = \vec{M} dt;$$

$$\theta = const; \quad d\vec{L} \perp \vec{L} \Rightarrow L = const.$$

$$\omega' dt = \frac{|d\vec{L}|}{L \sin \theta} = \frac{M dt}{L \sin \theta} \Rightarrow$$

$$\omega' = \frac{mgl \sin \theta}{L \sin \theta} \Rightarrow$$

$$\omega' = \frac{mgl}{L}.$$

