Срез знаний

1 вариант

1) Какая случайная величина называется дискретной?
2) Как определяется сумма случайных величин?
3) Вероятность сдачи экзамена первым студентом равна 0,6, а вторым – 0,9. Составить ряд распределения с.в. Х – числа студентов, успешно сдавших экзамен в случае, когда:

а) экзамены пересдавать нельзя;
б) экзамен можно один раз пересдать.

2 вариант

1) Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
2) Как определяется произведение случайной величины на число?
3) Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,8. Найти и построить функцию распределения с.в. Х – числа попаданий в мишень.

3 вариант

1) Основное свойство закона распределения.
2) Что называется многоугольником распределения?
3) Монета бросается 4 раза. Построить многоугольник распределения с.в. Х – числа выпадений герба.

4 вариант

1) Как определяется произведение случайных величин?
2) Приведите пример дискретной случайной величины.
3) Убедиться, что функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Является функцией распределения некоторой случайной величины. Найти $P\{0 \le x < 1\}$ и построить график F(x).

17.3. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Непрерывные случайные величины имеют бесконечное число возможных значений. Поэтому ввести для них ряд распределения нельзя.

Вместо вероятности того, что случайная величина X примет значение, равное x, т.е. $p(X=x)$, рассматривают вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем x, т.е. $P(X<x)$, то есть для непрерывной СВ можно задать функцию распределения.

Если СВ Х непрерывна, то вероятность того, что она примет конкретное значение, равное С, равна нулю: Р(Х=С)=0

Из того, что событие Х=С имеет нулевую вероятность еще не следует, что это событие невозможно.

Частота появления события в большой серии опытов не равна, а только приближается к вероятности данного события.

Поэтому если вероятность события равна 0, то при неограниченном повторении опыта это событие будет появляться сколь угодно редко.

Рассмотрим непрерывную случайную величину *X* с функцией распределения *F(x)*.

Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на промежуток

$$[x; x+\Delta x)$$

$$p\{x \le X < x+\Delta x\} = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Отношение

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

представляет собой среднюю вероятность, которая приходится на единицу длины участка $[x; x+\Delta x)$ т.е. среднюю плотность распределения вероятности.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

По определению производной этот предел равен производной функции *F(x)* :

$\Rightarrow$ $$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Функция f(x), равная производной от функции распределения, называется плотностью вероятности случайной величины X или плотностью распределения.

Кривая, изображающая плотность вероятности, называется <u>кривой распределения</u>.

Плотность вероятности является характеристикой только непрерывных случайных величин.

Из того, что

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le X < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

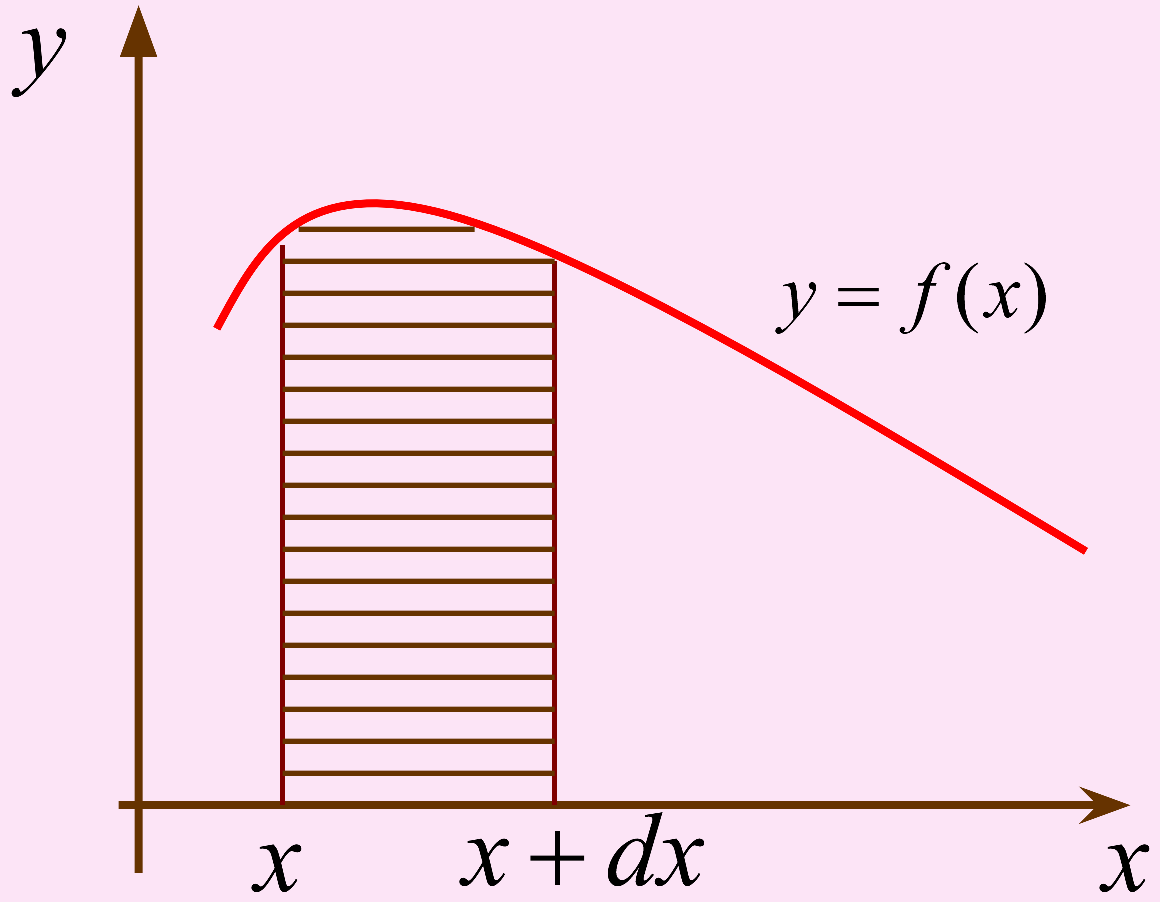
следует, что

$$p\{x \le X < x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x.$$

Рассмотрим вероятность попадания случайной величины *X* на элементарный участок *dx*: *f(x)dx*.

$$p\{x \le X < x + dx\} \approx f(x) \cdot dx.$$

Эта величина называется элементом вероятности и геометрически означает площадь элементарного прямоугольника со сторонами *f(x)* и *dx:*



y
$y = f(x)$
x
$x + dx$
x

Выразим вероятность попадания на участок *α* до *β* через *f(x)*. Она равна сумме элементов вероятности на этом участке, т.е. интегралу:

$$p(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Отсюда можно выразить функцию распределения через плотность вероятности:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

1

Плотность вероятности является неотрицательной функцией (т.к. функция распределения является неубывающей функцией):

$$f(x) = F'(x) \geq 0.$$

Это означает, что график плотности f(x), называемый *кривой распределения*, не ниже оси абсцисс.

Плотность может принимать сколько угодно большие значения.

2

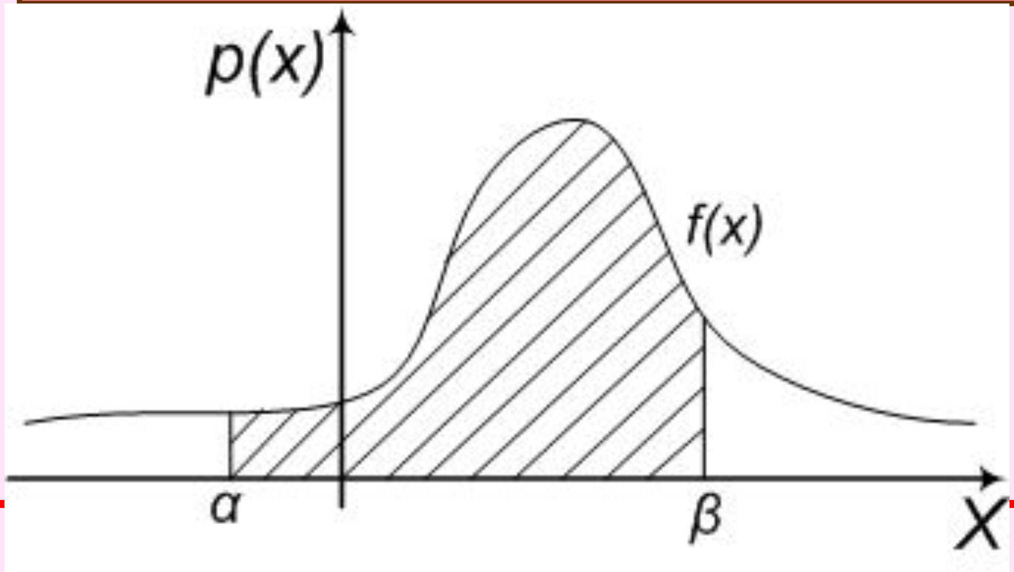
Плотность распределения (геометрический смысл)

Выразим вероятность попадания СВ X на отрезок от α до β

через плотность распределения. Очевидно, она равна сумме

элементов вероятности на всем участке, то есть интегралу:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$



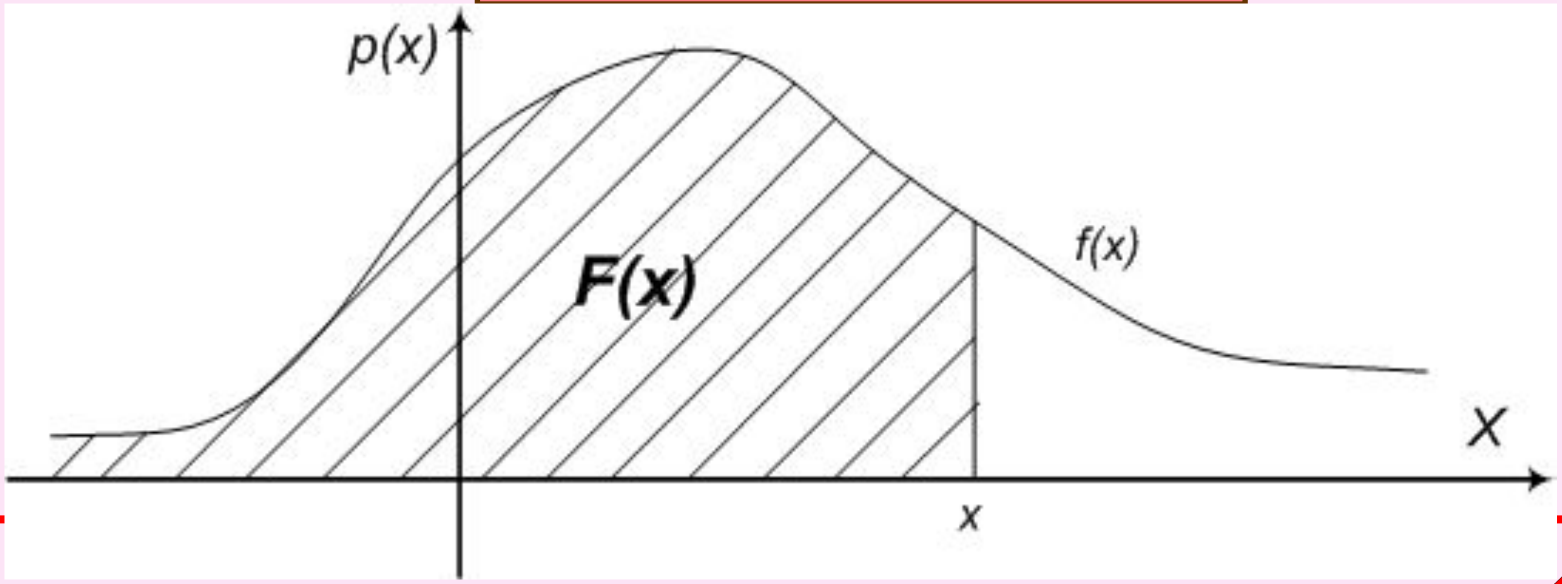
Функция распределения (геометрический смысл)

Выразим функцию распределения через плотность.

Согласно определению $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$.

Учитывая, что $P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$ получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$



4

Интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Это означает, что площадь фигуры под кривой распределения на бесконечных промежутках интегрирования равна 1.

Можно дать такое определение случайной величины:

Случайная величина X называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция *f(x)* такая, что при любом *x* функцию распределения можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

А затем получить $F'(x) = f(x).$

Отсюда следует, что $F(x)$ и $f(x)$ **являются эквивалентными обобщающими характеристиками с. в. X.**

Докажем, что вероятность события {X=c}, где c – число, для н.с.в., равна нулю.

Действительно,

$$P\{X=c\}=p\{c\le X\le c\}=\int_c^c f(x)dx=0.$$

Отсюда следует, что

$$P\{a\le X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a<X<b\}.$$

ПРИМЕР

Плотность распределения с.в. X задана функцией

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

Найти значение параметра *a*.

РЕШЕНИЕ

Согласно свойству 4° плотности, имеем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = 1,$

т.е. $a \lim\limits_{\substack{d\to+\infty \\ c\to-\infty}} \int\limits_c^d \frac{dx}{1+x^2} = 1,$ **т.е.** $a \lim\limits_{\substack{d\to+\infty \\ c\to-\infty}} arctgx\Big|_c^d = 1$

или $a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=1$ **и, наконец, получаем** $a\cdot\pi = 1,$

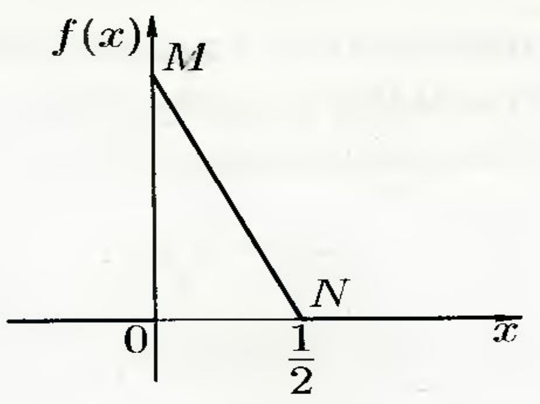
т.е.

$$\boxed{a = \frac{1}{\pi}.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -1,\\ a(x+1)^2, & \text{при} \quad -1<x\le 2,\\ 1, & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$



Найти значение *a*, построить графики *F(x)* и *f(x)*.

2. Кривая распределения н.с.в. X имеет вид, указанный на рисунке.

Найти выражение для $f_X(x)$, функцию распределения $F_X(x)$, вероятность события $\left\{X\in\left(\frac{1}{4};1\right)\right\}$.

3. Является ли плотностью распределения некоторой с. в. каждая из следующих функций:

а) $f(x)=\dfrac{x}{\pi(1+x^2)}$ при $x\in(-\infty;+\infty)$;

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{при } x\in(-1;1],\\ 0, & \text{при } x\notin(-1;1];\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0 \text{ и } x>2,\\ ax^2, & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

https://www.youtube.com/watch?v=mjhk2GhGy7s

videoplayback.mp4