Дисциплина

Численные методы

Преподаватель

Дмитрий Игоревич Балашов

Дисциплина состоит из 6 модулей:

1. Численное решение нелинейных уравнений.
2. Численное решение СЛАУ.
3. Численное решение СНУ.
4. Численное интегрирование.
5. Интерполяция и аппроксимация функций.
6. Численное решение ОДУ.

Форма отчетности – ЗАЧЕТ

Численное решение

нелинейных уравнений

Общий вид нелинейного уравнения

$$f(x)=0$$

где

x – аргумент,

f(x) – функционал одной переменной

Существуют различные методы решения нелинейных уравнений

Наиболее распространенный:

аналитический метод

Трансцендентные уравнения

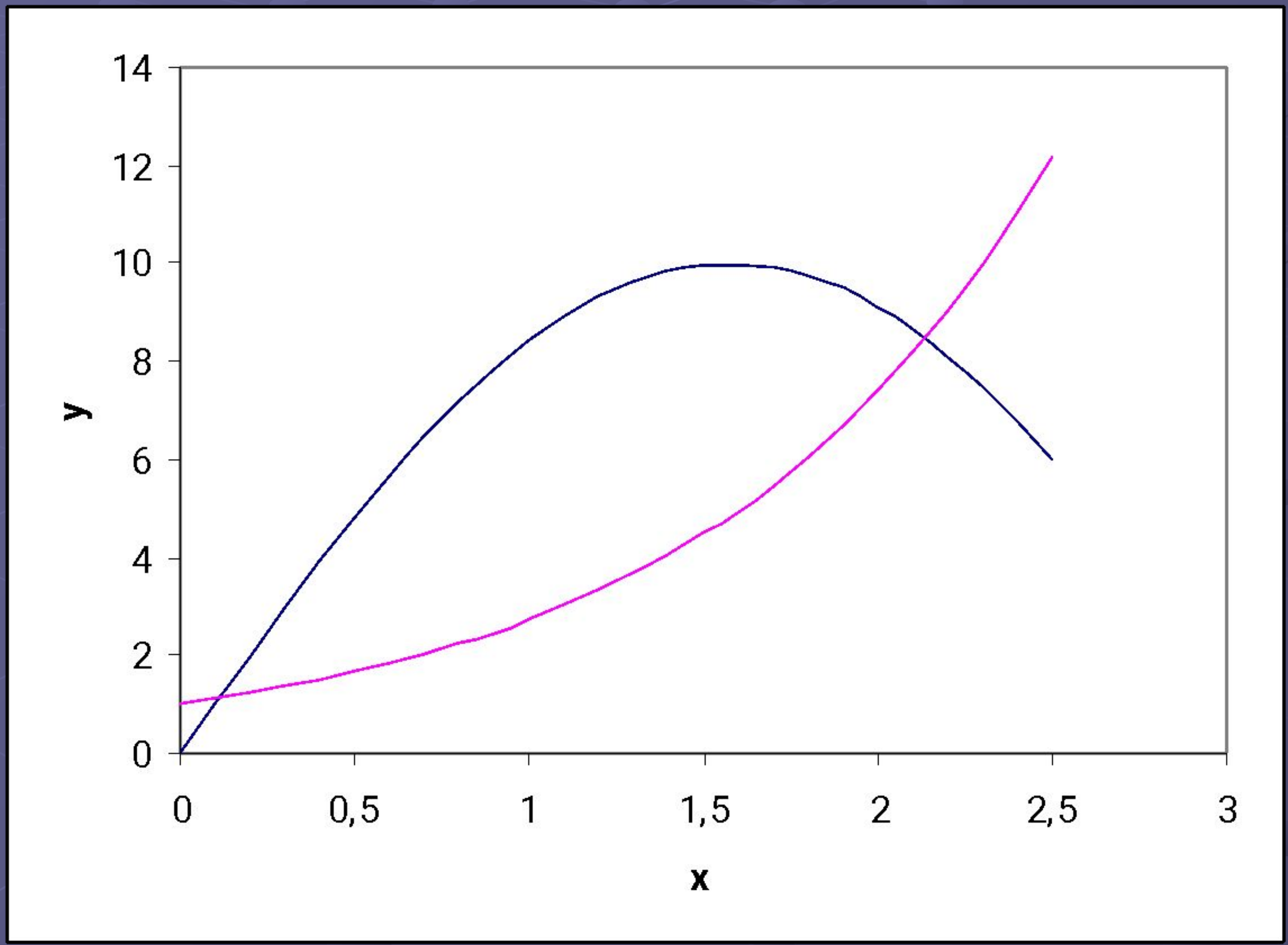
Пример:

$$10\sin(x) - e^{x} = 0$$

Или после преобразования:

$$10\sin(x) = e^{x}$$

Для решения таких уравнений можно использовать графический метод:



Недостаток графического метода:

Низкая точность получаемого результата.

Также для решения подобного рода уравнений можно использовать

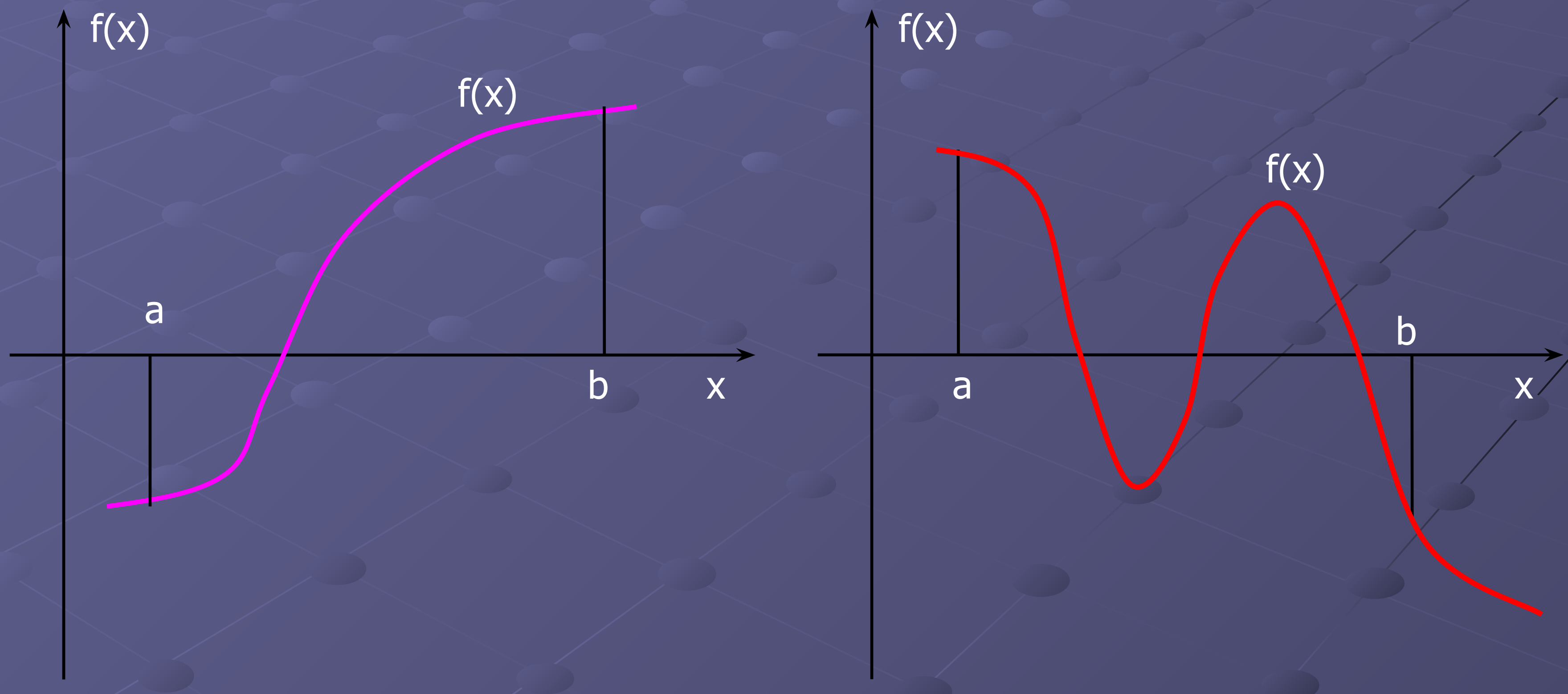
численные методы

Теорема

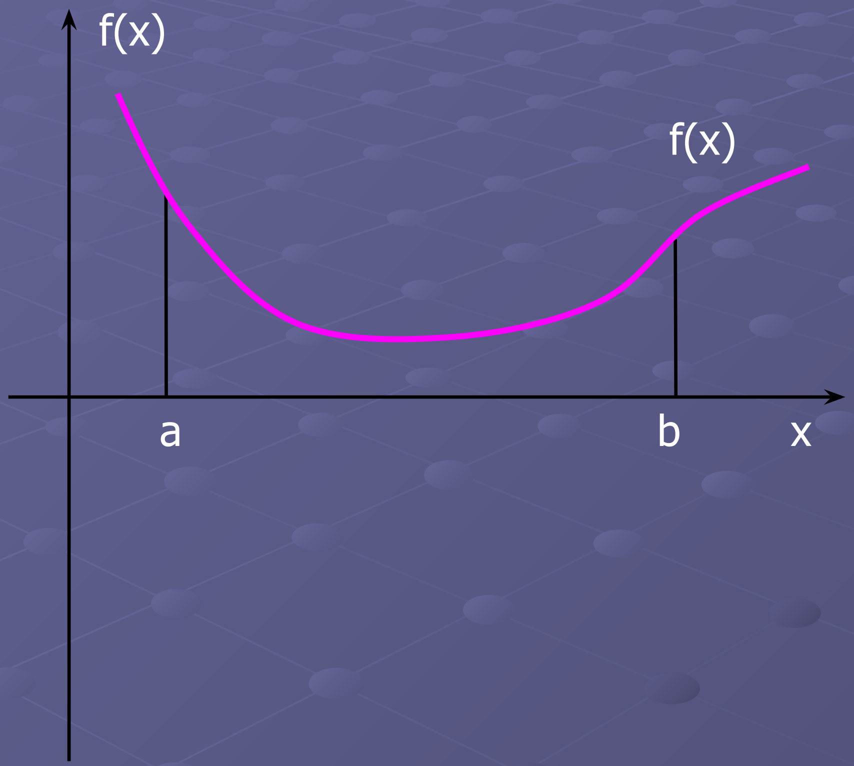
о существовании корней уравнения f(x)=0

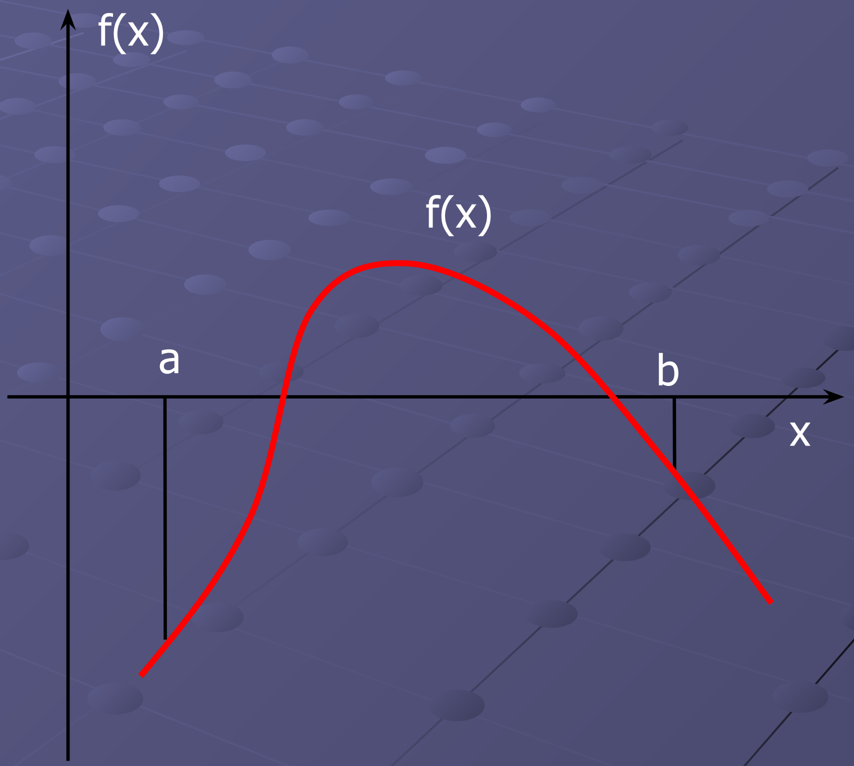
Если на концах интервала [a, b] функция f(x) имеет разные знаки, то это значит, что в интервале [a, b] уравнение f(x)=0 имеет хотя бы один корень.

Графическая интерпретация теоремы о существовании корней



Обратная теорема не верна





Большинство численных методов основаны на этой теореме

- В дальнейшем примем допущение о том, что на интервале [a, b] имеется только один корень уравнения $f(x)=0$

Метод половинного деления (метод дихотомии, метод бисекции)

Исходные данные для реализации метода:

1. f(x)=0
2. [a, b]
3. E

Алгоритм метода:

1. Отрезок ab делится пополам точкой c.
2. Рассчитываются значения функции f(x) в точках a, b и c.
3. Один из отрезков ac или cb, на концах которого функция f(x) имеет одинаковые знаки, отбрасывают и далее продолжают работать с оставшимся отрезком.

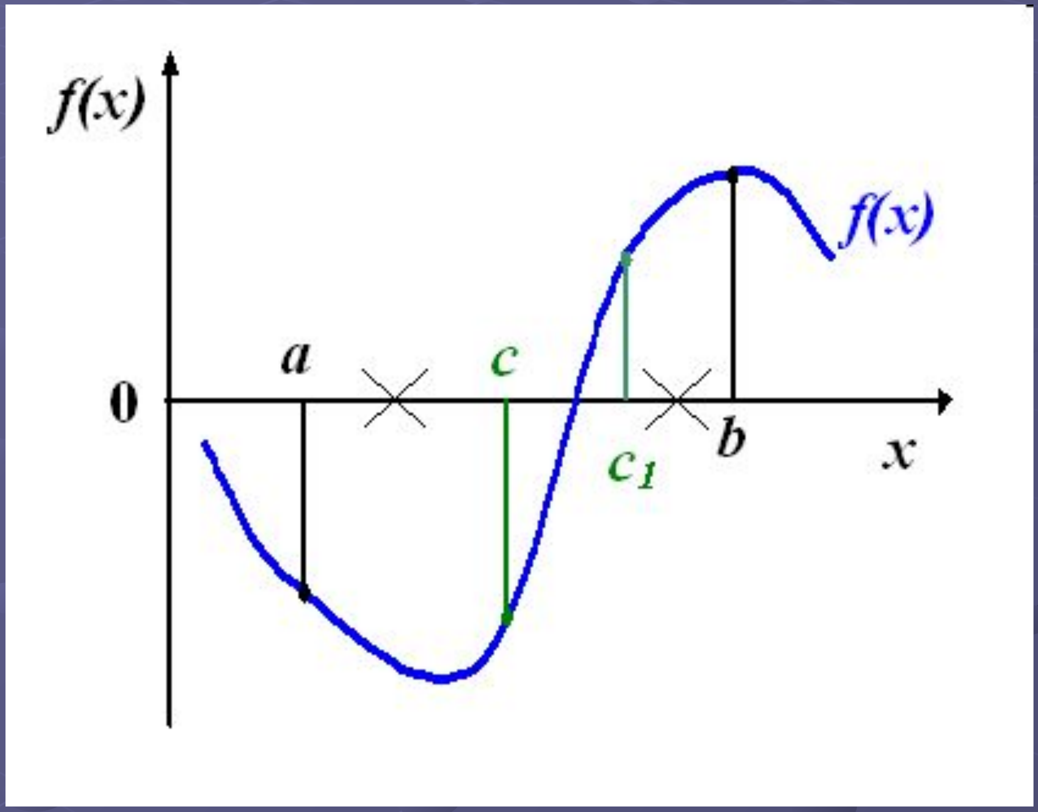
Процесс повторяется до тех пор, пока длина оставшегося отрезка не станет меньше величины точности E.

$$|a-b|<E$$

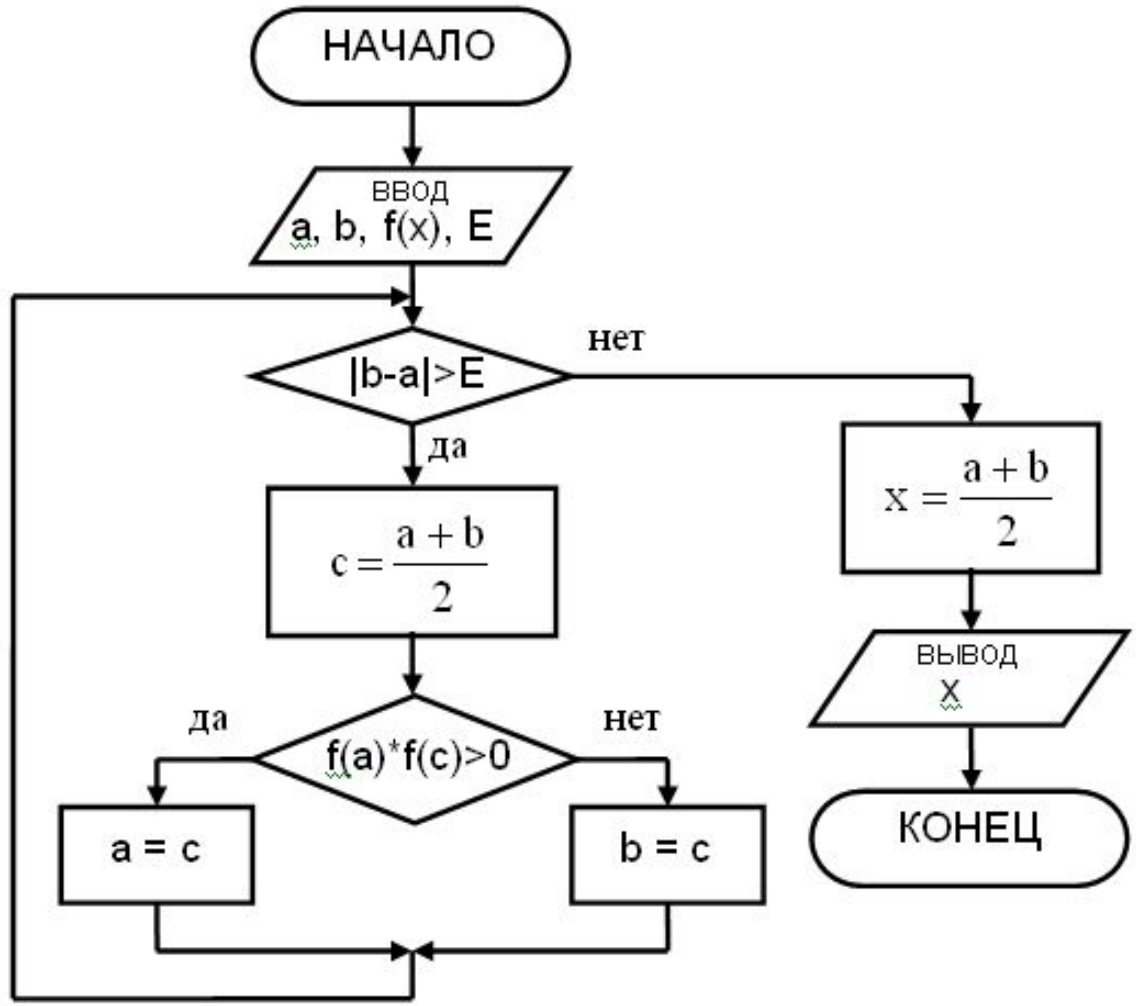
В этом случае за корень уравнения можно принять середину полученного отрезка

$$x=(a+b)/2$$

Графическая интерпретация метода:



Блок-схема метода половинного деления



ДОСТОИНСТВА метода

1. Простота метода
2. Устойчивость метода

НЕДОСТАТОК метода

1. Низкая скорость сходимости

Метод хорд

Исходные данные для реализации метода:

1. f(x)=0
2. [a, b]
3. E

Алгоритм метода:

1. Отрезок ab делится на 2 отрезка точкой c. Точка c является точкой пересечения оси абсцисс OX с хордой, соединяющей точки f(a) и f(b).
2. Рассчитываются значения функции f(x) в точках a, b и c.
3. Один из отрезков ac или cb, на концах которого функция f(x) имеет одинаковые знаки, отбрасывается и далее продолжают работать с оставшимся отрезком.

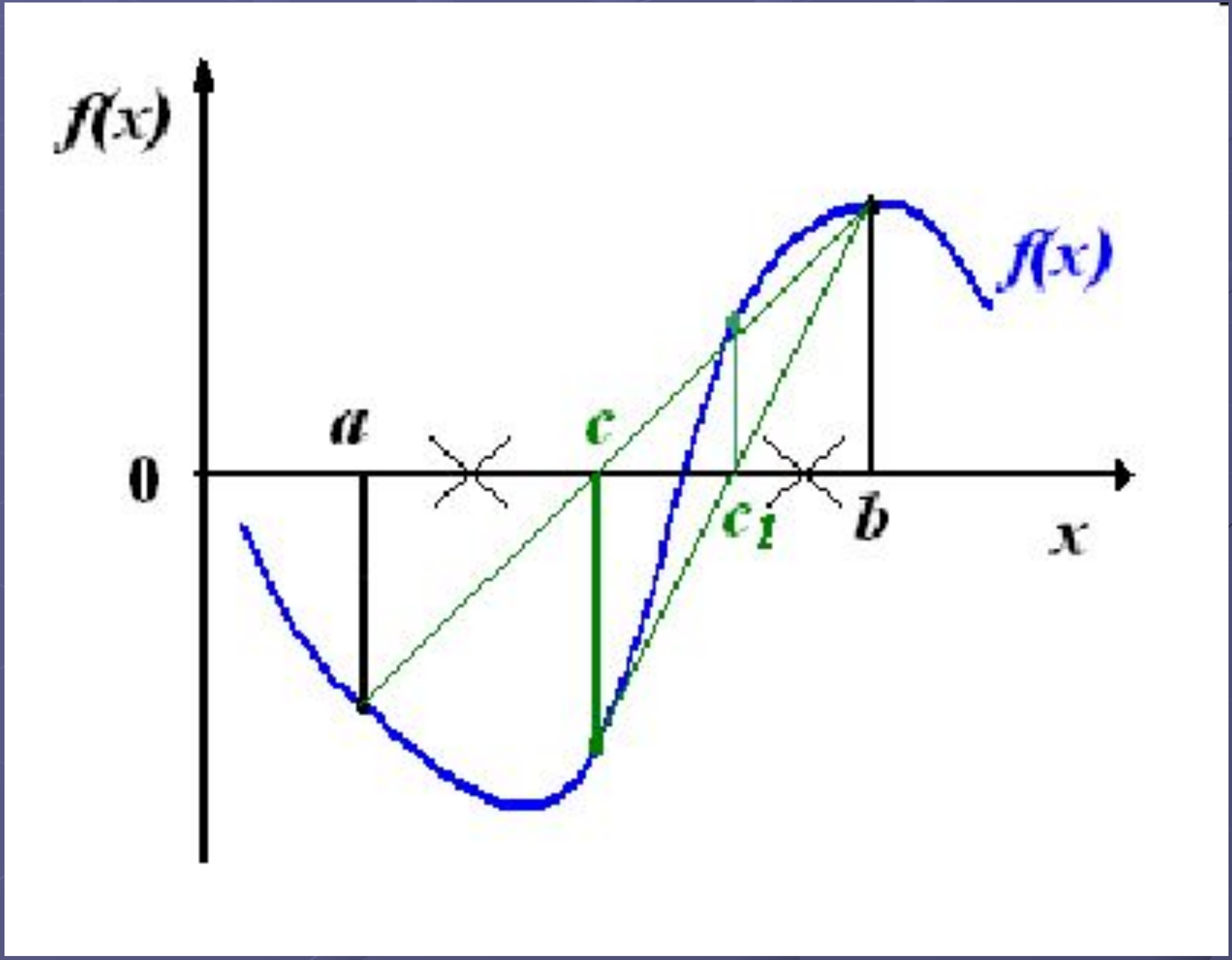
Процесс повторяется до тех пор, пока длина оставшегося отрезка не станет меньше величины точности E.

$$|a-b|<E$$

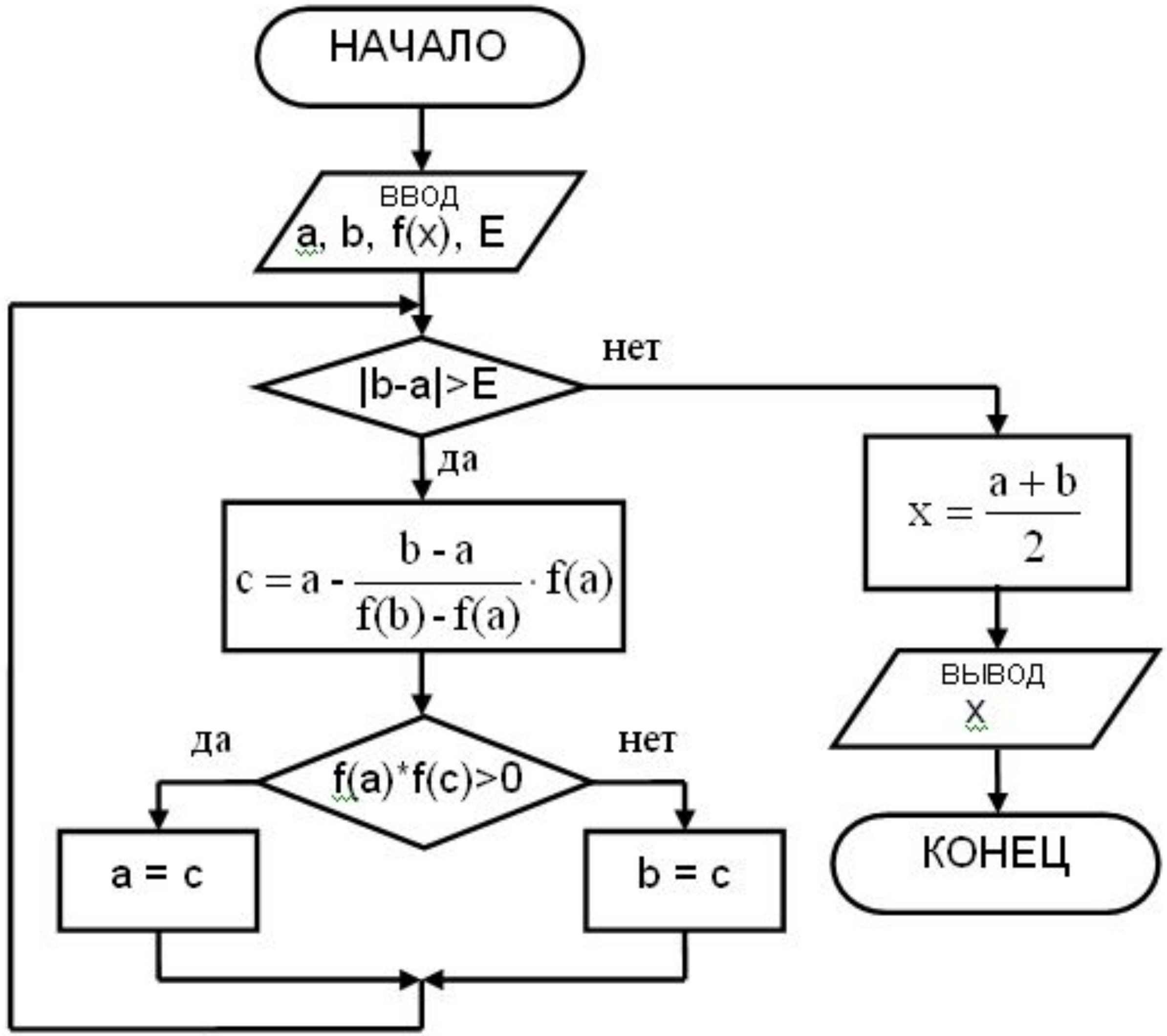
В этом случае за корень уравнения можно принять середину полученного отрезка

$$x=(a+b)/2$$

Графическая интерпретация метода:



Блок-схема метода хорд



ДОСТОИНСТВА метода

1. Простота метода
2. Устойчивость метода
3. Более высокая скорость сходимости

НЕДОСТАТОК метода

1. Для некоторых частных случаев метод не применим

Метод касательных (метод Ньютона)

Исходные данные для реализации метода:

1. $f(x)=0$
2. $f'(x)$
3. x_0
4. E

Алгоритм метода:

1. В точке x_0 к графику функции $f(x)$ проводится касательная.
2. Находится более точное значение x – это точка пересечения касательной с осью абсцисс OX.

Таким образом каждая последующая точка будет лежать ближе к истинному решению, чем предыдущая.

Последующая точка рассчитывается через предыдущую по формуле

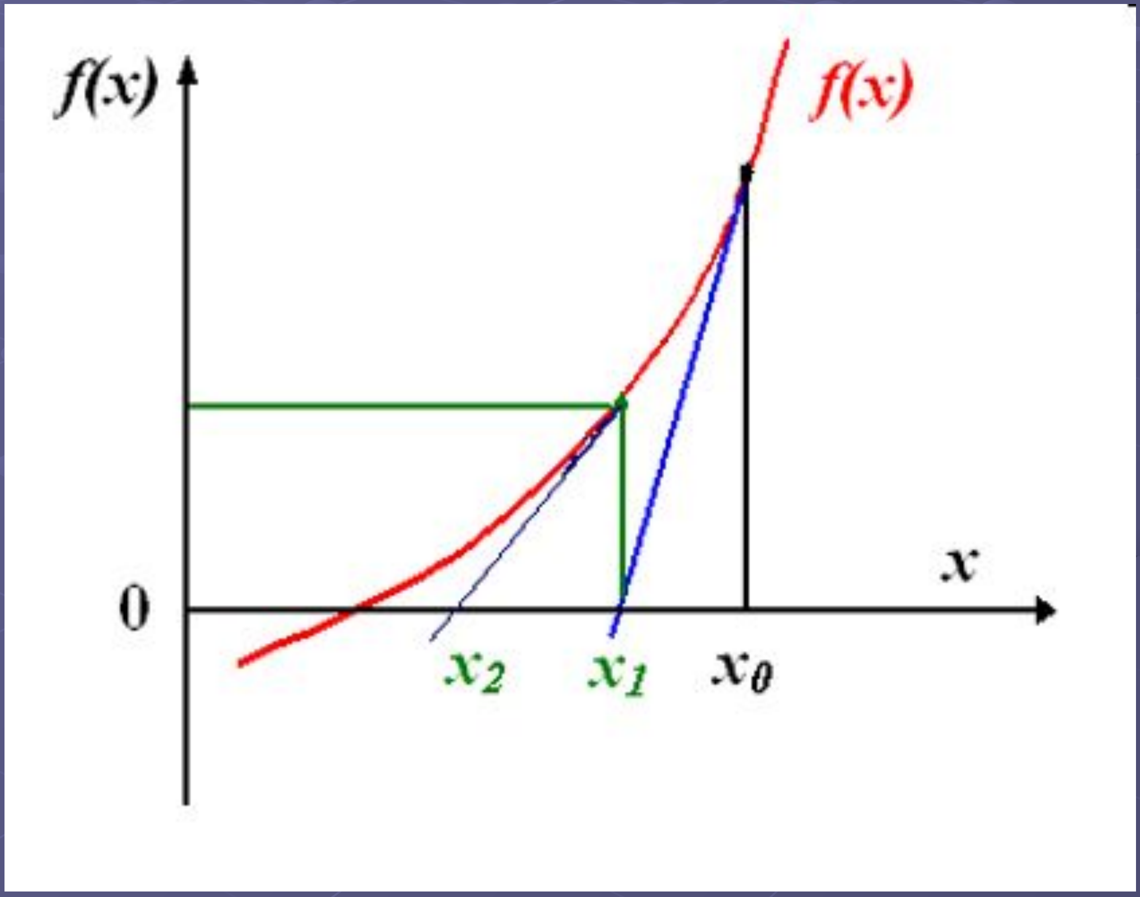
$$x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$$

Процесс повторяется до тех пор, пока разность между последующей и предыдущей точкой не станет меньше величины точности E

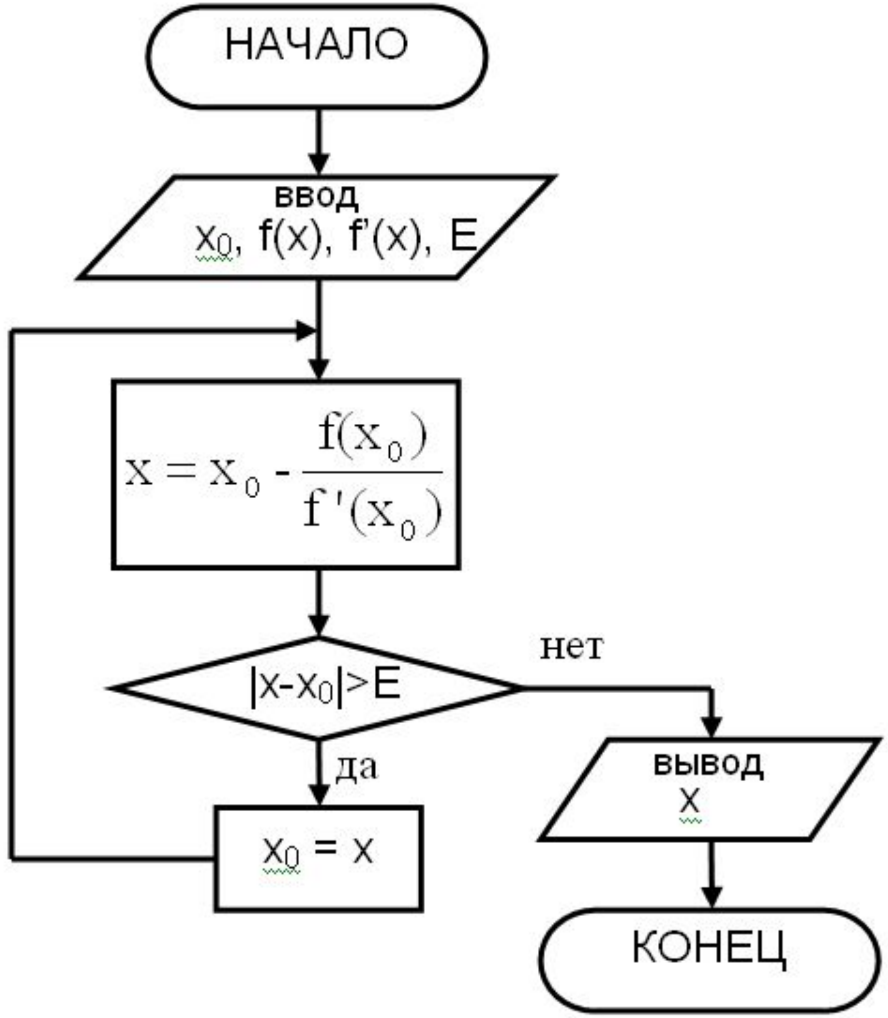
$$|x_{i+1}-x_i|<E$$

В этом случае за корень уравнения можно принять последнюю найденную точку x_i.

Графическая интерпретация метода:



Блок-схема метода касательных



ДОСТОИНСТВО метода

1. Высокая скорость сходимости

НЕДОСТАТКИ метода

1. Необходимость задавать производную функции в аналитическом виде
2. Метод является неустойчивым

Метод секущих

Метод секущих является модификацией метода касательных

Исходные данные для реализации метода:

1. f(x)
2. x_0
3. E

Алгоритм метода:

Алгоритм аналогичен предыдущему методу, но производная функции вычисляется по приближенной формуле:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

где Δx – малая величина. Как правило за эту величину принимают величину точности E:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)\cdot \Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = x_i - \frac{f(x_i)\cdot E}{f(x+E) - f(x)}$$

ДОСТОИНСТВА метода

1. Высокая скорость сходимости
2. Нет необходимости задавать производную функции в аналитическом виде

НЕДОСТАТОК метода

1. Метод является неустойчивым