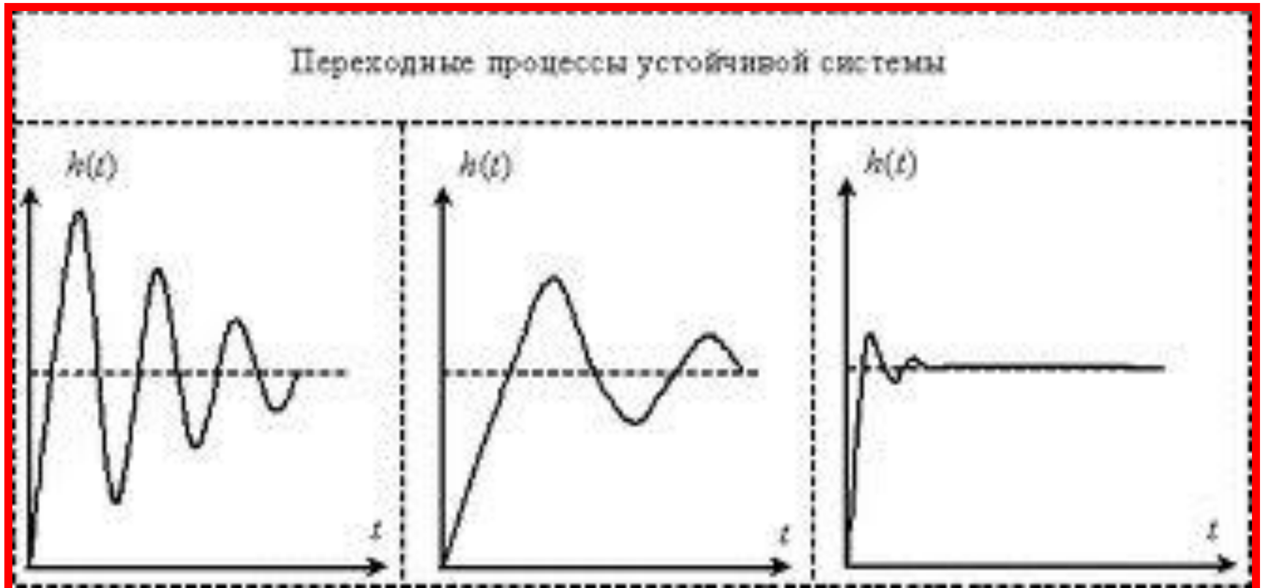
Дисциплина: Теория электрических цепей

Лекция №13

Тема: Методы анализа переходных процессов. Классический метод



Учебные вопросы

1. Общие сведения о переходных процессах. Законы коммутации.
2. Методы анализа переходных процессов в линейных электрических цепях.
3. Содержание классического метода анализа переходных процессов.
4. Включение последовательной RL-цепи под постоянное напряжение.
5. Включение последовательной RC-цепи под постоянное напряжение.

Литература

- 1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007, с. 306-322.

Режимы работы электрической цепи

***Установившийся режим в электрической цепи* – это режим, при котором ЭДС, напряжения и токи в цепи являются постоянными или периодическими.**

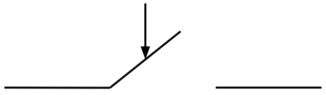
***Переходным процессом электрической цепи* называется электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.**

Коммутация цепи

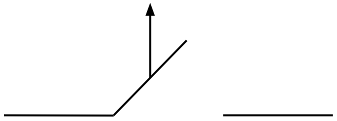
Коммутацией цепи называется совокупность всех причин, вызывающих изменение условий работы цепи и её переход от одного установившегося состояния к другому.

Примерами коммутации являются :

- *включение цепи под напряжение источника питания;*
- *отключение цепи от сети;*
- *внезапное изменение параметров цепи;*
- *переключение отдельных элементов цепи;*
- *внезапное короткое замыкание цепи на каком-либо из её участков и т.п.*



t=0

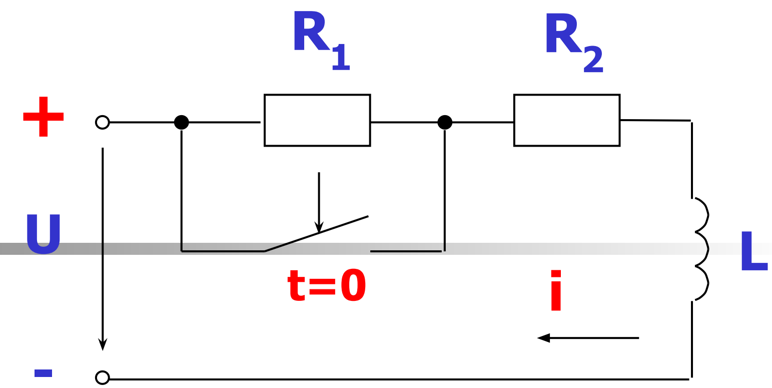


t=0

Первый закон коммутации

До коммутации:

$$I_{y1} = \frac{U}{R_1 + R_2}$$



$$W_{L1} = L \cdot \frac{I_{y1}^2}{2}$$

После коммутации:

$$I_{y2} = \frac{U}{R_2}$$

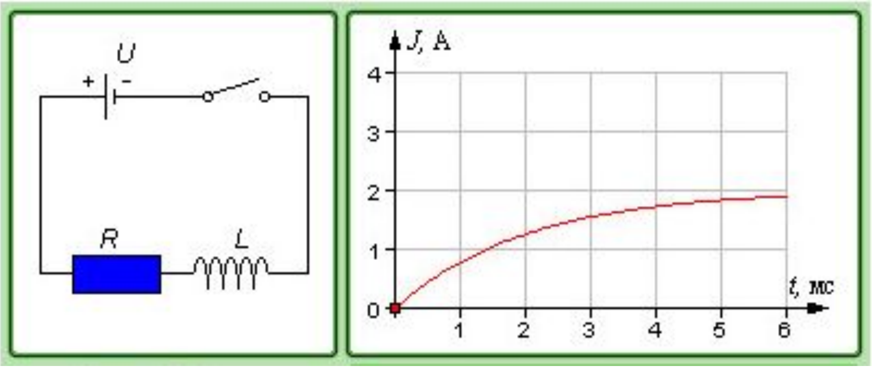
$$I_{y2} = \frac{U}{R_2} > I_{y1}; \quad W_{L2} = L \cdot \frac{I_{y2}^2}{2} > W_{L1};$$

$$\Delta W_L = W_{L2} - W_{L1} = \frac{1}{2} L\left(I_{y2}^2 - I_{y1}^2\right)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W_L}{\Delta t} = \infty,$$

На практике невыполнимо!!!

В цепи с индуктивностью скачка энергии магнитного поля быть не может!

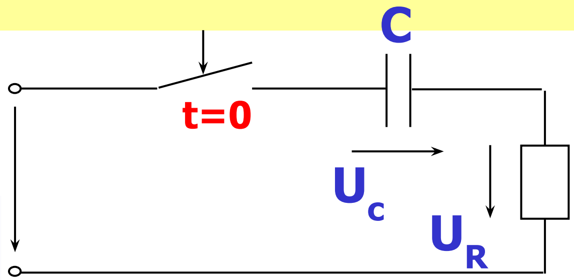


Первый закон коммутации

Первый закон коммутации *обусловлен непрерывностью изменения магнитного поля катушки индуктивности и гласит:* ***в любой ветви с индуктивностью ток и потокосцепление в момент коммутации сохраняют те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и далее начинают изменяться именно с этих значений.***

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad \Psi(0_-) = \Psi(0_+).$$

Второй закон коммутации



В цепи с ёмкостьюстью скачка энергии электрического поля быть не может

Второй закон коммутации обусловлен непрерывностью изменения электрического напряжения и гласит: в любой ветви с ёмкостью напряжение на ёмкости и электрический заряд в момент коммутации сохраняет те же значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией, и далее начинают изменяться именно с этих значений

$$W_C = C \cdot \frac{U_C^2}{2} = \frac{q}{2C}.$$

$$\Delta W_C = W_{C2} - W_{C1} = C \cdot \frac{U^2}{2} > 0;$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W_C}{\Delta t} = \infty ,$$

$$u_c(0_-) = u_c(0_+), \quad q(0_-) = q(0_+).$$

На практике невыполнимо!!!

Необходимость учёта переходных процессов

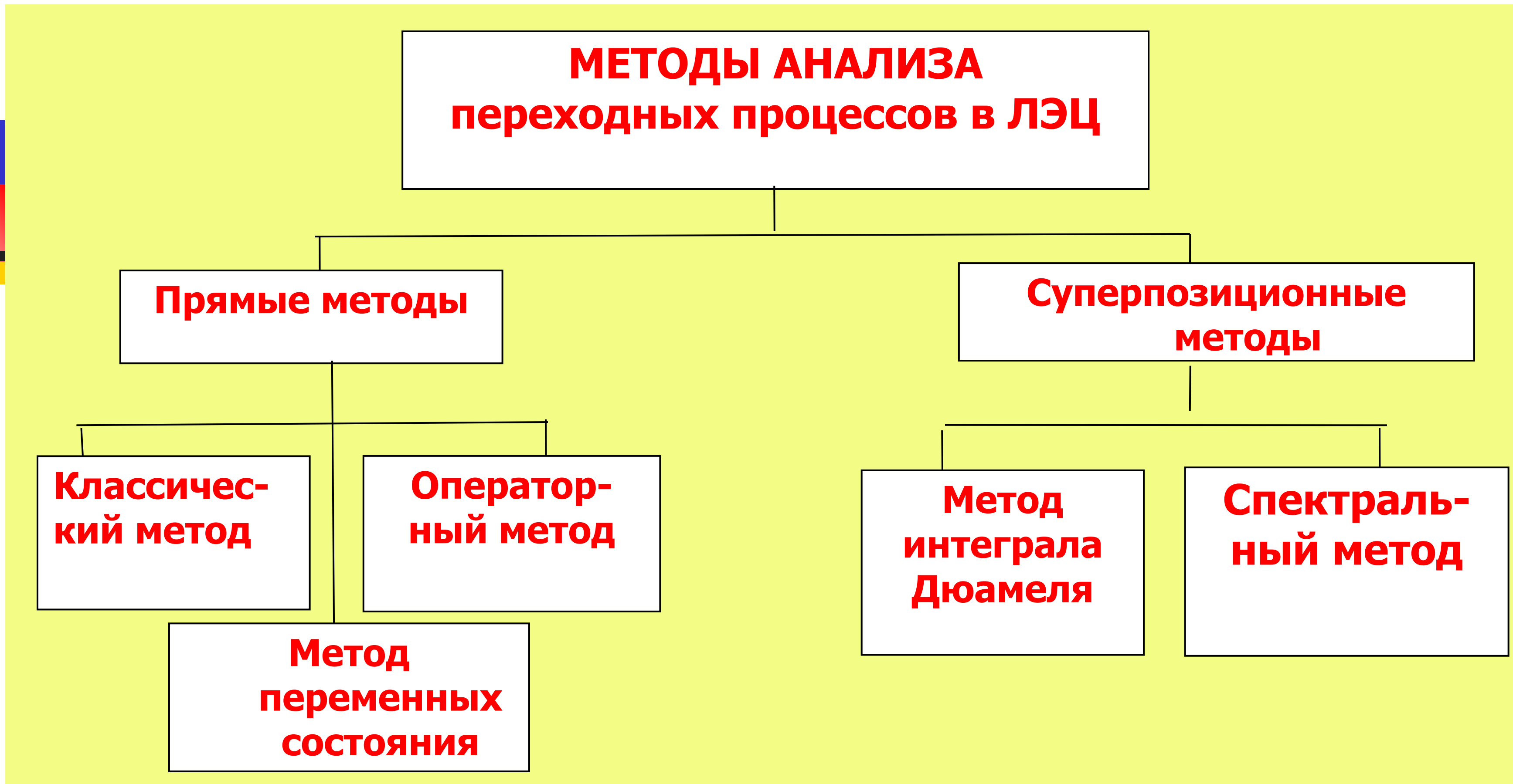
1. Переходные процессы часто сопровождаются появлением на отдельных участках цепи **повышенных величин напряжений и токов** (так называемых **«перенапряжений»** и **«сверхтоков»**).

2. В ряде устройств переходные процессы затухают очень медленно, и на элементах цепи **длительное** время сохраняются большие величины зарядов и напряжений.

3. Переходные режимы работы для многих радиотехнических и электротехнических устройств, машин и аппаратов являются **нормальными рабочими режимами.**

4. Длительность переходных процессов в устройствах БРЭА, автоматики и ЭВМ определяет их быстродействие и **непосредственно влияет на эффективность работы систем в целом.**

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ



Прямые методы – это методы, в которых внешнее воздействие рассматривается как единое воздействие, представляющее собой некоторую функцию времени.

Классическим методом называется метод расчета переходных процессов с использованием мгновенных значений напряжений и токов в ветвях цепи.

В методе переменных состояния выбирают в качестве переменных энергетического состояния цепи токи индуктивных катушек *iLk* и напряжения на конденсаторах *uCk* и составляют по законам Кирхгофа *n* дифференциальных уравнений первого порядка, затем их преобразовывают, оставляя в левой части каждого уравнения первую производную соответствующей переменной (d (*uCk*)/dt) или d (*iLk*)/dt), а в правой функции выбранных переменных (*uCk* и *iLk*) и приложеных к цепи воздействий ek(t) и jk(t).

Сформулированную таким образом систему дифференциальных уравнений первого порядка при *n*>2 решают с помощью численного интегрирования, например, **методом Рунге-Кутта 4-го порядка.**

Операторный метод расчета переходных процессов основан на использовании прямого преобразования Лапласа, с помощью которого переходят от действительных функций времени (оригиналов e(t), u(t), i(t)) к их операционным изображениям (E(p), U(p), I(p)), называемым функциями комплексного переменного (оператора) p = σ + jω. Составив по законам Кирхгофа систему алгебраических уравнений для изображений и решив её относительно изображения искомой переходной функции, определяют оригинал этой функции путём обратных преобразований Лапласа.

В основе суперпозиционных методов лежит принцип суперпозиции (наложения), применимый только к линейным цепям. Во всех суперпозиционных методах входной сигнал представляется суммой стандартных элементарных сигналов:

$$\boxed{x(t)=\sum_n x_n(t)}$$

Воздействие на цепь каждого слагаемого этой суммы в отдельности. Выходной сигнал определяется суммированием откликов цепи на каждый элементарный сигнал в отдельности

$$\boxed{y(t)=\sum_n y_n(t)}$$

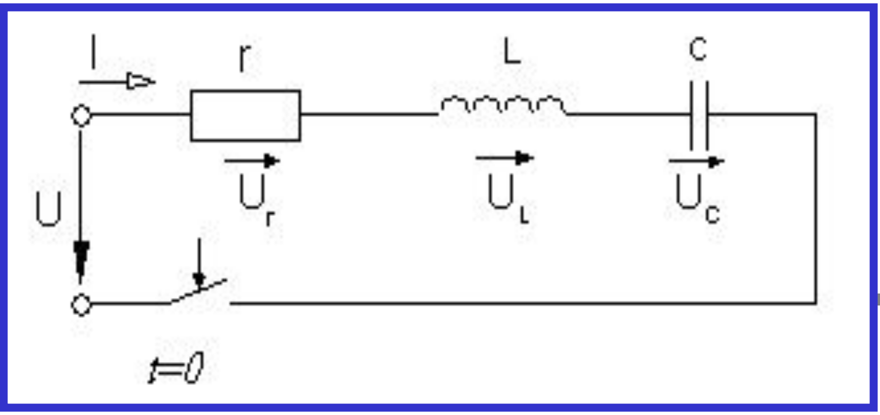
Метод интеграла Дюамеля основан на представлении входного сигнала в виде суммы элементарных воздействий типа единичной функции *1(t)* или единичного импульса *δ(t)*, а также использовании формулы интеграла Дюамеля, отражающего принцип непрерывности электрического тока. При этом в качестве характеристики цепи используется соответственно реакция цепи (отклик) на воздействие единичной функции или единичного импульса – переходная характеристика *h(t)* или импульсная характеристика *g(t)*- временные характеристики цепи.

Спектральный (частотный) метод анализа переходных процессов в электрических цепях основан на использовании понятия о спектрах сигналов и частотных свойствах цепей. При этом входной сигнал представляется в виде суммы гармонических составляющих спектра, а характеристикой цепи, соответствующей её реакции (отклику) на единичное гармоническое колебание, является комплексный коэффициент передачи $\underline{K}(j\omega)$- частотная характеристика цепи.

Содержание классического метода анализа переходных процессов

В основе классического метода лежит составление системы дифференциальных уравнений цепи на основе законов Кирхгофа и сведение их к одному неоднородному линейному дифференциальному уравнению, на основе которого определяется искомая переходная электрическая величина.

Иллюстрация классического метода



Условия задачи. Пусть задана последовательная ***RLC*** – цепь, подключающаяся к сети с напряжением ***u*** .

***Найти* переходный ток**, т.е. ток в цепи, имеющий место во время переходного процесса.

$$\left.\begin{aligned} &u_r + u_L + u_c = u;\\ &u_r = r \cdot i;\\ &u_L = L \cdot \frac{di}{dt};\\ &u_c = \frac{1}{c}\int i \cdot dt. \end{aligned}\right\}$$

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i \cdot dt = u.$$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{du}{dt}.$$

$$i = i_у + i_{св}$$

Составляющие переходного тока

Установившийся электрический ток есть периодический или постоянный электрический ток, устанавливающийся в электрической цепи после окончания переходного процесса при воздействии на цепь периодических или постоянных ЭДС или напряжений.

Свободный электрический ток есть электрический ток, который существует в цепи только в течение времени переходного процесса и обусловлен запасом энергии в реактивных элементах до момента коммутации (т.е. при отключенных источниках питания).

Определение установившегося тока

Установившийся ток есть частное решение неоднородного (с правой частью) дифференциального уравнения вида:

$$L\cdot\frac{d^2 i_y}{dt^2}+r\cdot\frac{di_y}{dt}+\frac{1}{C}i_y=\frac{du}{dt}.$$

В электротехнике установившийся ток находят следующим образом:

- функции *iy* можно сформировать на основе **понимания физических процессов в цепи;**
- функцию *iy* можно получить **обычным расчетом цепи в установившемся режиме её работы.**

Определение свободного тока

Свободный ток есть общее решение однородного (без правой части) дифференциального уравнения

$$L\frac{d^2 i_{св}}{dt^2} + r\cdot\frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C}i_{св} = 0$$

$$i_{св} = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}$$

- решение для уравнения n-го порядка;

$$i_{св} = Ae^{Pt}$$

- решение для уравнения 1-го порядка;

$$i_{св} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

- решение для уравнения 2-го порядка в случае веществ. и разных корней характеристического уравнения

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0$$

- характеристическое уравнение для уравнения 2-го порядка.

Определение свободного тока

$$i_{св} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} = (B_1 + B_2 t) \cdot e^{P_1 t}$$

- решение для уравнения 2-го порядка в случае веществ. и равных корней характеристического уравнения;

$$i_{св} = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} = A e^{-\alpha t} sin(\varpi_c t + \varphi)$$

- решение для уравнения 2-го порядка в случае комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения.

$$\alpha = \frac{r}{2L}; \quad \varpi_c = \sqrt{\varpi_0^2 - \alpha^2}; \quad \varpi_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

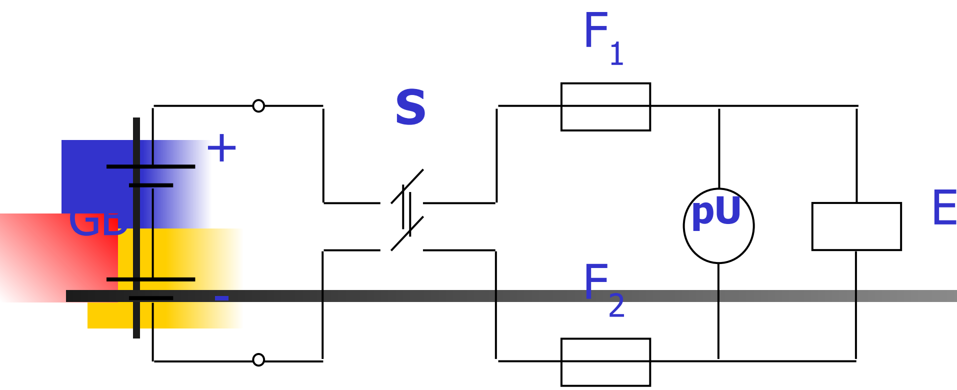
Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом

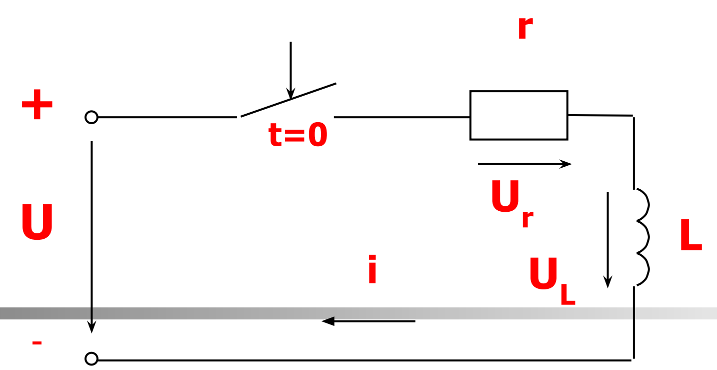
1. Составляется расчетная схема замещения электрической цепи и определяются начальные условия коммутации.
2. Для схемы цепи, образующейся после коммутации, составляется система дифференциальных уравнений на основе соотношений между токами и напряжениями на элементах цепи и законов Кирхгофа.
3. Полученная система уравнений преобразуется к одному неоднородному дифференциальному уравнению, на основе которого записывается и решается характеристическое уравнение цепи.
4. Записывается решение для свободного режима с учетом количества и вида корней характеристического уравнения.

Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом (продолжение)

5. Определяется установившийся режим в цепи.
6. Записывается уравнение переходного процесса как сумма установившегося и свободного режимов.
7. Определяются постоянные интегрирования свободного режима.
8. Записывается в окончательном виде уравнение переходного процесса и определяются остальные искомые величины.
9. Производится анализ характера переходного процесса в цепи (графическое построение временных функций токов и напряжений).

Включение последовательной RL- цепи под постоянное напряжение





$$\left.\begin{aligned} u_r + u_L &= U; \\ u_r &= r \cdot i; \\ u_L &= L \cdot \frac{di}{dt} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i = U}$$

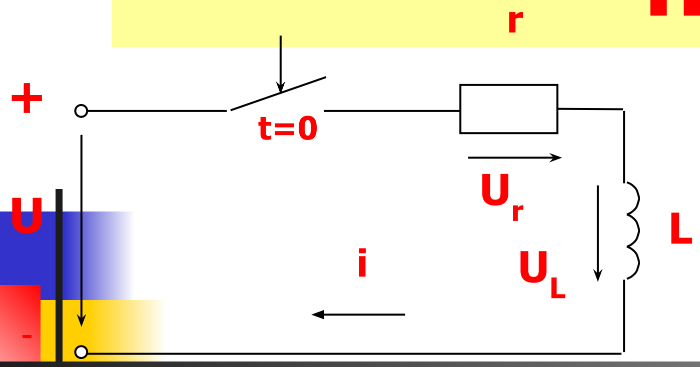
$$\boxed{L \cdot P + r = 0,}$$

$$\boxed{P = -\frac{r}{L}.}$$

$$\boxed{i_{св} = A \cdot e^{Pt} = A \cdot e^{-\frac{t}{L/r}}}$$

- решение для свободного тока

Включение последовательной RL- цепи под постоянное напряжение



Уравнение переходного тока как сумма установившегося и свободного тока:

$$i = i_y + i_{св} = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{t}{L/r}}.$$

Установившийся ток в цепи i_y:

$$i_y = \frac{U}{r} = I$$

$$L \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{U}{r}\right) + r \cdot \frac{U}{r} = U; \quad U = U$$

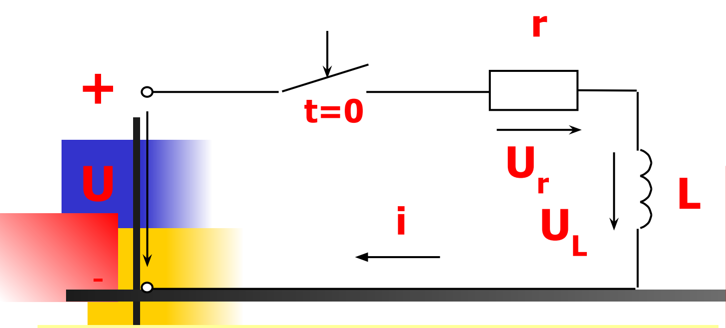
Определяем постоянную интегрирования *A* из начального условия коммутации на основе первого закона коммутации :

$$i(0) = 0 = \frac{U}{r} + A \cdot 1, \text{ следовательно } A = -\frac{U}{r}.$$

Свободный ток примет вид:

$$i_{св} = -\frac{U}{r} \cdot e^{-\frac{t}{L/r}}$$

Включение последовательной RL- цепи под постоянное напряжение



Переходное напряжение на резистивном элементе получаем на основе закона Ома :

$$u_r = r \cdot i = r \cdot I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

Записываем в окончательном виде уравнение переходного тока:

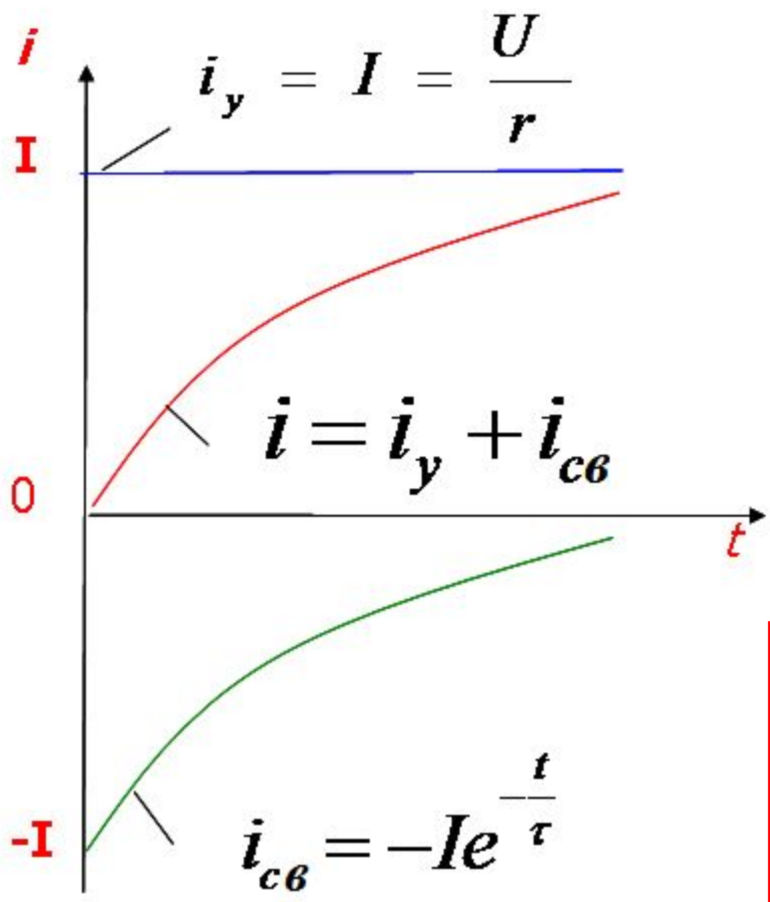
$$i = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

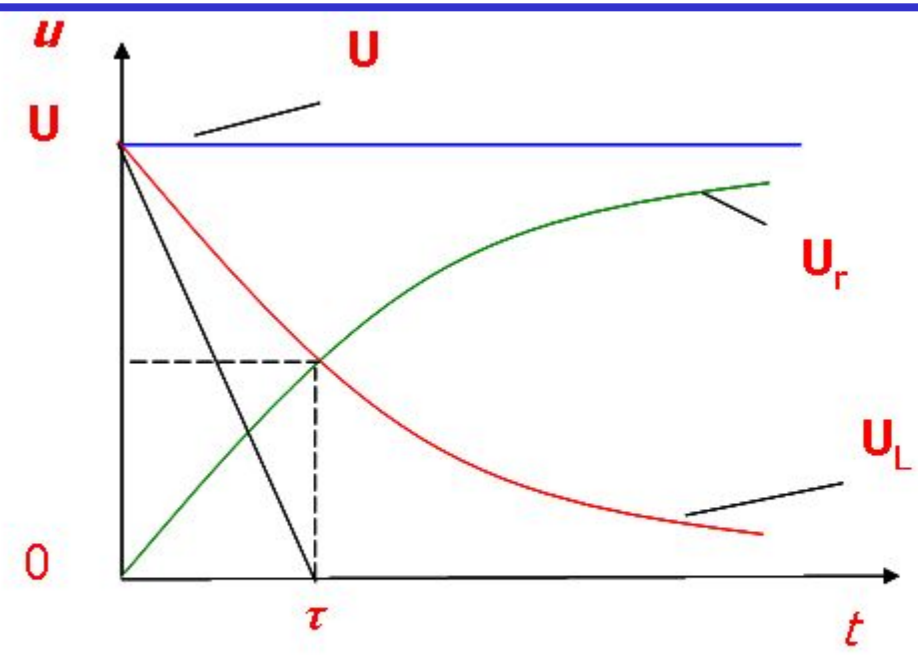
$$I = \frac{U}{r}; \quad \tau = \frac{L}{r},$$

Переходное напряжение на индуктивности определяется на основе закона электромагнитной индукции:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Анализ переходного процесса





Анализ переходного процесса выполняется по уравнениям переходных тока и напряжений, а также по графикам этих функций, построенным в удобном масштабе

Выводы о характере переходного процесса при подключении последовательной RL - цепи под постоянное напряжение:

а) переходный ток в цепи и переходные напряжения на её элементах изменяются по экспоненциальным законам;

б) переходный ток в цепи в момент коммутации не имеет скачка и начинает после коммутации нарастать плавно от значения, предшествовавшего непосредственно моменту коммутации, т.е. от нуля. Это означает, что первый закон коммутации выполняется;

в) в цепи наблюдается скачок напряжения на индуктивности за счет проявления индуктированной ЭДС в обмотке, пропорциональной скорости изменения тока.

Постоянная времени цепи с индуктивностью

$$\tau = \frac{L}{r},$$

$$[\tau] = \frac{[L]}{[r]} = \frac{Гн}{Ом} = \frac{Ом \cdot с}{Ом} = с$$

На практике принято считать переходный процесс законченным при :

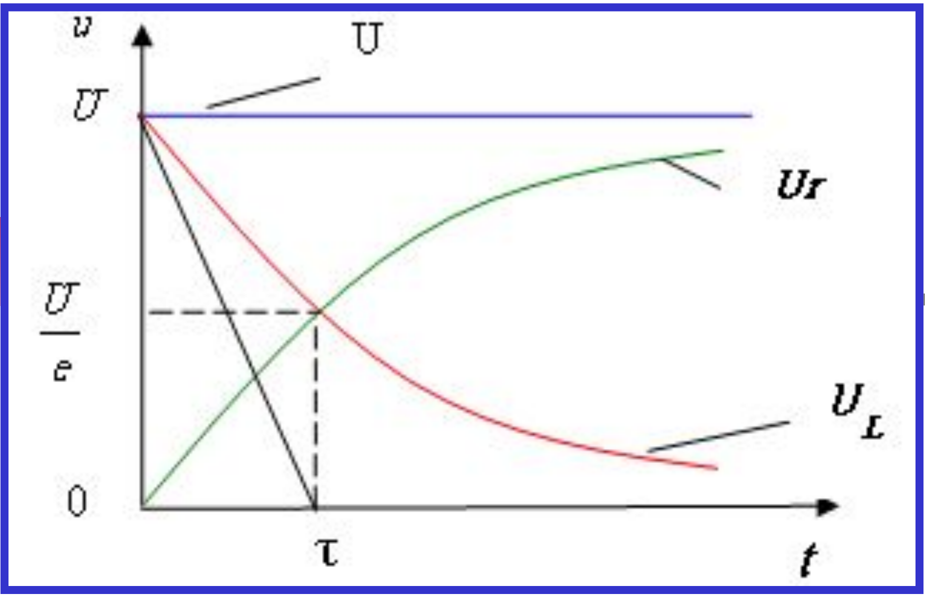
$$t_{ППр} = (3...5)\tau.$$

Анализ графиков и функций переходных напряжений и тока показывает следующее:

а) от значения τ зависят кривизна кривых и время их нарастания до установившегося значения или спадания до нуля, следовательно , от постоянной времени цепи τ зависит время переходного процесса;

б) чем больше постоянная времени цепи τ, тем медленнее затухает переходный процесс.

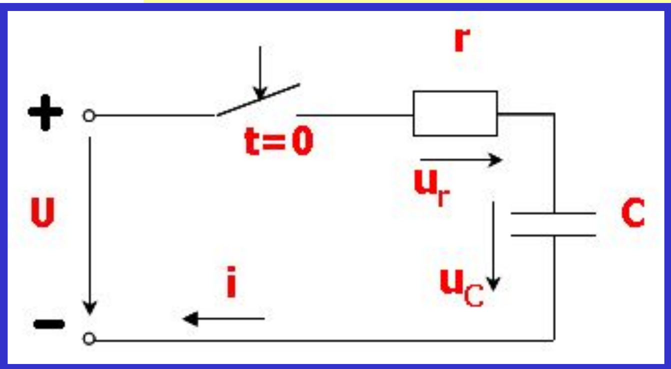
Постоянная времени цепи с индуктивностью



Физический смысл постоянной времени цепи τ заключается в следующем :
постоянная времени цепи есть величина, характеризующая электрическую цепь, в которой свободный ток является экспоненциальной функцией времени, равная интервалу времени, в течение которого этот ток убывает в е ≈ 2,72 раз, где е – основание натурального логарифма.

Путь желаемого воздействия для сокращения времени переходного процесса: нужно уменьшить *τ* , что достигается уменьшением индуктивности *L* цепи или увеличением её электрического сопротивления *r*.

Включение последовательной RC- цепи под постоянное напряжение



Характеристическое уравнение и его решение:

$$rCP + 1 = 0 \qquad \boxed{p = -\frac{1}{rC}} \qquad \boxed{\tau = r \cdot C}$$

$$\left.\begin{aligned} u_r + u_c &= U; \\ u_r &= r \cdot i; \\ i &= C \cdot \frac{du_c}{dt} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{rC\frac{du_c}{dt} + u_c = U}$$

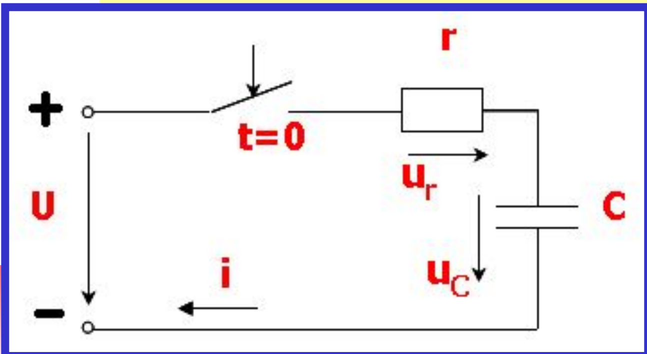
Свободное напряжение на ёмкости определяется на основе уравнения:

$$\boxed{r \cdot C \cdot \frac{du_{св}}{dt} + u_{св} = 0.}$$

$$\boxed{u_{ссв} = A \cdot e^{Pt} = A \cdot e^{-\frac{t}{r \cdot C}} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

- свободное напряжение на ёмкости

Включение последовательной RC- цепи под постоянное напряжение



*Постоянная интегрирования может быть найдена из начальных условий коммутации на основе второго закона коммутации (при **t=0**):*

$$u_c(0) = 0 = U + A \cdot 1; \quad A = -U.$$

$$u_c = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Установившаяся составляющая напряжения:

$$u_{cy} = U$$

Переходный ток заряда в цепи:

$$i = C\frac{du_c}{dt} = \frac{U}{r} \cdot e^{-\frac{t}{r \cdot C}} = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Переходное напряжение на ёмкости:

$$u_c = u_{cy} + u_{ccв} = U + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Переходное напряжение на сопротивлении r :

$$u_r = r \cdot i = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Включение последовательной RC-цепи под постоянное напряжение. Анализ переходного процесса

Анализ переходного процесса выполняется по уравнениям переходных тока и напряжений, а также по графикам этих функций, построенным в удобном масштабе

Выводы о характере переходного процесса при подключении последовательной RC - цепи под постоянное напряжение:

а) ***напряжение на ёмкости в момент коммутации скачка не имеет и монотонно нарастает по экспоненте от его значения, имевшего место до коммутации (от нуля), до установившегося значения, следовательно, второй закон коммутации выполняется;***

б) ***при включении ёмкости на постоянное напряжение в цепи наблюдается скачок тока.***

Постоянная времени цепи с ёмкостью

$$\tau = r \cdot c$$

$$[\tau] = [r] \cdot [c] = \frac{В}{А} \cdot \frac{Кл}{В} = \frac{В \cdot с}{Кл} \cdot \frac{Кл}{В} = с.$$

В цепи с ёмкостью постоянная времени τ имеет тот же физический смысл, что и в цепи с индуктивностью.

Анализ графиков и функций переходных напряжений и тока показывает следующее:

а) для сокращения времени переходного процесса необходимо уменьшать ёмкость С и (или) электрическое сопротивление цепи r;

б) для его увеличения – увеличивать значения этих параметров.

Спасибо
за работу и внимание!