

Уравнения Максвелла

Теория Максвелла

Анализируя связь между величинами электрического и магнитного поля и обобщая результаты опытов Эрстеда и Фарадея,

*Максвелл создал теорию
электромагнитного поля.*

Теория Максвелла – теория близкодействия, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия распространяются со скоростью, равной скорости света в данной среде.

Теория Максвелла

В основе теории Максвелла лежат два положения.

1. Всякое переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле.

2. Всякое переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле

Вихревое электрическое поле

Из закона Фарадея следует

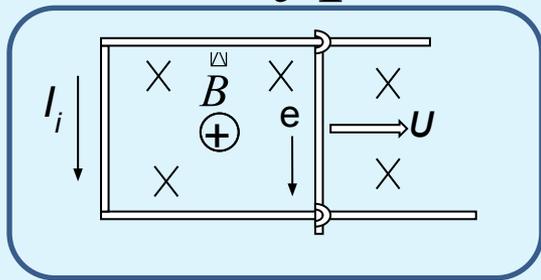
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

следует: любое изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток.

Вихревое электрическое поле

Природа возникновения ЭДС

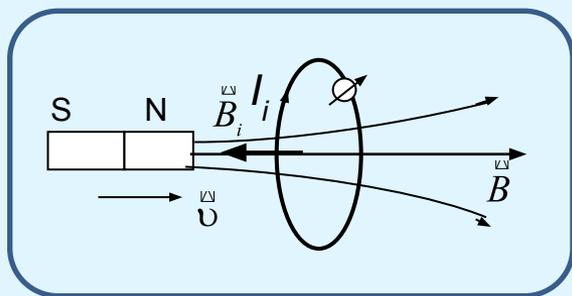
1. Возникновение ЭДС в подвижном контуре



При движении перемычки в магнитном поле на электроны будет действовать сила Лоренца. Возникает разность потенциалов

Причиной возникновения индукционного тока в подвижных проводниках является сила Лоренца.

2. Неподвижный контур находится в переменном магнитном поле



Причиной возникновения ЭДС не могут быть силы Лоренца, т.к. они не действуют на неподвижные заряды

Сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре.

Всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве переменное электрическое поле

Вихревое электрическое поле

По Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле (вихревое поле) E_B , циркуляция которого

$$\oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{Bl} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Если поверхность и контур неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами

Свойства вихревого электрического поля

- Вихревое поле имеет совершенно иную структуру, нежели поле, создаваемое зарядами. Так как оно не создается зарядами, то силовые линии не могут начинаться и заканчиваться на зарядах, как это было в электростатике.
- Силовые линии вихревого поля замкнуты.
- Так как это поле перемещает заряды, вихревое поле - силовое поле
- Работа вихревого поля на замкнутом пути не равна нулю

Вихревое электрическое поле

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Циркуляция вектора напряженности *электростатического* поля

$$\oint_L \vec{E}_q d\vec{l} = 0$$

Циркуляция вектора напряженности *вихревого* поля

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \varepsilon_i$$

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_q$$



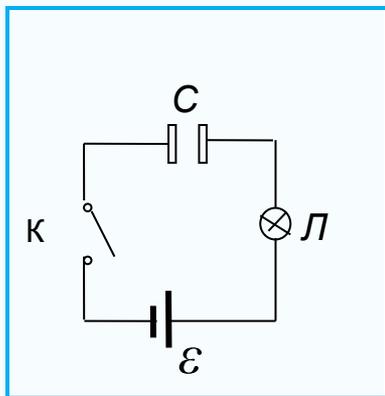
$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Первое уравнение
Максвелла

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля

Ток смещения

Согласно Максвеллу, **если всякое магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля.**

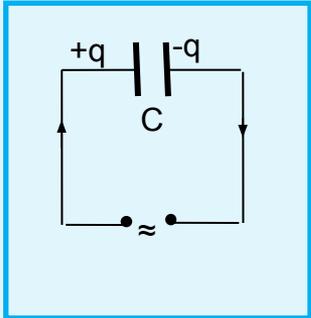


*Для установления количественных отношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый **ток смещения**.*

Рассмотрим цепь постоянного тока, содержащую конденсатор.

Если замкнуть ключ, то лампа гореть не будет. Зазор между обкладками конденсатора – разрыв в цепи **постоянного** тока. Но в момент выключения лампа вспыхивает. Если взять прибор, регистрирующий магнитное поле, то в промежутке между обкладками обнаружится магнитное поле. Источником магнитного поля, как известно, является ток. Переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле.

Ток смещения



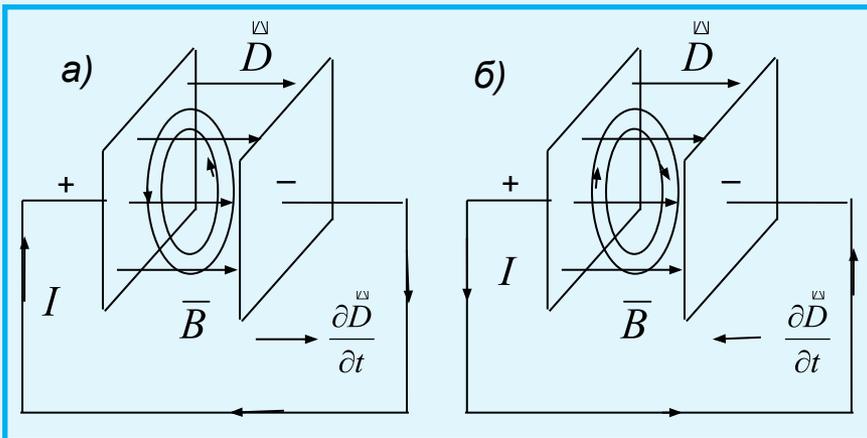
Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор. *Между пластинами конденсатора заряды не могут перемещаться.*

Согласно Максвеллу, через конденсатор “протекают” **токи смещения**, причем в тех участках, где отсутствуют проводники.

Максвелл ввел **понятие плотность тока смещения**

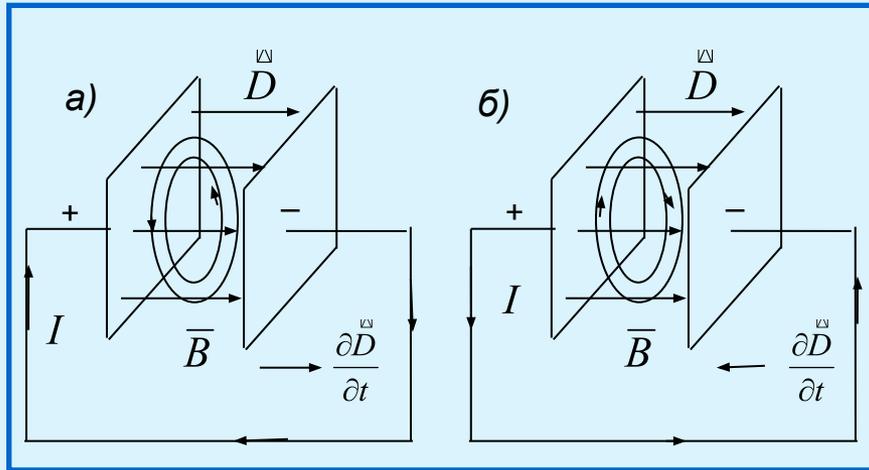
$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Рассмотрим, каково направление векторов плотностей токов проводимости и смещения.



При зарядке конденсатора (рис.а) ток течет от правой обкладки к левой, поле в конденсаторе усиливается ($\frac{\partial D}{\partial t} > 0$), направления векторов $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и $\vec{j}_{см}$ совпадают.

Плотность тока смещения



При разрядке конденсатора (рис.б) ток течет от правой обкладки к левой, поле в конденсаторе ослабляется ($\frac{\partial D}{\partial t} < 0$), т.е. вектор $\frac{\partial D}{\partial t}$ направлен против вектора \vec{D} . Однако вектор $\frac{\partial D}{\partial t}$ направлен опять так же, как \vec{j} и вектор \vec{j} .

Таким образом, ток смещения (в вакууме или веществе) создает в окружающем пространстве магнитное поле (на рис. – штриховые линии)

В диэлектрике ток смещения состоит из двух составляющих

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

\vec{E} - напряженность электрического поля;

\vec{P} - поляризованность

$$\vec{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - Плотность тока смещения в вакууме

$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - Плотность тока поляризации

Задача 1

При разрядке цилиндрического конденсатора длиной $l = 10 \text{ см}$ и внешним радиусом $r = 1 \text{ см}$ в подводящих проводах течет ток $I = 1 \text{ мкА}$. Определить плотность тока смещения

Дано: $l = 10 \text{ см}$; $r = 1 \text{ см}$; $I = 1 \text{ мкА}$.

Определить: $j_{\text{см}}$

Решение. Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

\vec{D} - вектор электрического смещения в диэлектрике между обкладками конденсатор

Согласно теореме Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint_S \vec{D} dS = q \quad Q - \text{заряд конденсатора} \quad (2)$$

Поскольку поток вектора \vec{D} пронизывает только боковую цилиндрическую поверхность ($S=2\pi r l$) и вектор \vec{D} направлен перпендикулярно к поверхности, то выражение (2) можно записать в виде

$$D \cdot 2\pi r l = q \quad \longrightarrow \quad D = \frac{q}{2\pi r l} \quad (3)$$

Задача 1

Продифференцировав выражение (3) по времени и учитывая, что $\frac{\partial D}{\partial t} = I$

(I - сила тока проводимости), найдем искомую плотность тока смещения

$$J_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l}$$

Вычисления

$$J_{см} = \frac{10^{-6}}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}} = 0,16 \text{ мА} / \text{м}^2$$

Ответ: $J_{см} = 0,16 \text{ мА} / \text{м}^2$

Закон полного тока

Так как числовые значения плотности тока смещения $j_{см}$ и плотности тока проводимости j равны, то линии плотности тока проводимости **внутри** проводника непрерывно переходят в линии плотности тока смещения **между обкладками** конденсатора.

Для того, чтобы ток был замкнут, вводится понятие **полного тока**, который включает в себя сумму тока проводимости и тока смещения

$$j_{полн} = j + \frac{dD}{dt} \quad \longrightarrow \quad \boxed{j}_{полн} = \boxed{j} + \frac{d\boxed{D}}{dt}$$

Плотность полного тока

Ток смещения – переменное электрическое поле;

Ток смещения, подобно току проводимости, порождает магнитное поле, силовые линии которого всегда замкнуты.

Теорема о циркуляции вектора \vec{H}

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции \vec{B}

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \mu I$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}$$

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

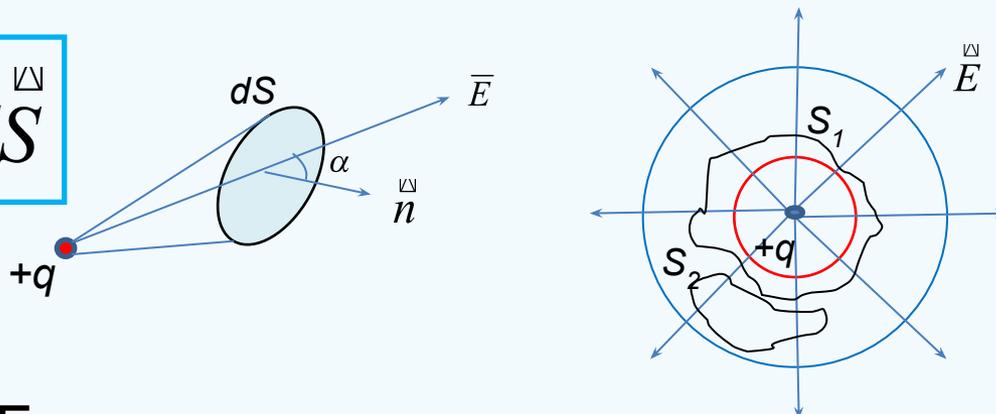
Второе уравнение
Максвелла

Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями

Теорема Гаусса для вектора \vec{D}

Поток вектора напряженности электрического поля

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S}$$



$$[\Phi] = B\sigma$$

Теорема Гаусса для электростатического поля

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$q = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Третье уравнение
Максвелла

Это – постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах.

Теорема Гаусса для вектора \vec{B}

$$\oint_S \vec{B} dS = 0$$

Четвертое уравнение
Максвелла

Четвертое уравнение отражает тот факт, что магнитных зарядов в природе нет.

Магнитное поле называют соленоидальным или вихревым.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Первое уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Это – постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют соленоидальным или вихревым.

Уравнения Максвелла – материальные уравнения

В систему уравнений Максвелла помимо указанных четырех входят еще три уравнения, которые называются материальными уравнениями.

Материальные уравнения описывают характеристики среды, в которой распространяется электромагнитная волна, а именно – наличие диэлектриков (ϵ) ферромагнетиков (μ), удельной проводимости (γ).

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные;
 ϵ и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости;
 γ - удельная проводимость вещества.

Уравнения Максвелла для стационарных полей

$$(E = const; B = const)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Т.е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, а источниками магнитного – только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что позволяет изучать отдельно *постоянные* электрические и магнитные поля.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса, можно представить полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}$$

Теорема
Стокса

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_V \text{div} \vec{D} \cdot dV$$

Теорема
Гаусса

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла – интегральная и дифференциальная – эквивалентны.

Однако если имеются поверхности разрыва – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, *дифференциальную форму дополняют граничными условиями*, которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Интегральная форма уравнений содержит эти условия

$$D_{n1} = D_{n2}$$

$$E_{\tau1} = E_{\tau2}$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$H_{\tau1} = H_{\tau2}$$

Первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости.

Свойства уравнений Максвелла

1. *Уравнения Максвелла линейны.*

Они содержат только первые производные полей \vec{E} и \vec{B} по времени t пространственным координатам и первые степени плотности пространственных зарядов ρ и токов \vec{j}

Свойство линейности уравнений Максвелла непосредственно связано с принципом суперпозиции: если два каких-нибудь поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к сумме этих полей.

2. *Уравнения Максвелла содержат уравнение непрерывности*, выражающее закон сохранения электрического заряда.

3. *Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета.* Уравнения Максвелла *инвариантны* по отношению к преобразованиям Лоренца (релятивистски инвариантны).

3. Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета.

Вид уравнений не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Из принципа относительности Эйнштейна вытекает, что *отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл.*

4. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей.

Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но не обнаружены магнитные.

5. Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов.

Изменение состояния этого поля имеет волновой характер. Поля такого рода называют электромагнитными волнами. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света.

Заключение

Какие выводы можно сделать, рассмотрев электрические и магнитные поля?

Во многом эти поля сходны – выполняется принцип суперпозиции, силовое действие, влияние среды и др. Однако имеются принципиальные различия:

- *Электрическое поле создается как неподвижными, так и подвижными зарядами. Магнитных зарядов в природе нет. Магнитное поле создается только движущимися электрическими зарядами и действует только на движущиеся заряды.*
- *Характер поля:
электростатическое поле – потенциальное (силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных).
магнитное поле - вихревое. Силовые линии замкнуты.*

Заключение

Какие выводы можно сделать, рассмотрев электрические и магнитные поля?

Во многом эти поля сходны – выполняется принцип суперпозиции, силовое действие, влияние среды и др. Однако имеются принципиальные различия:

- *Электрическое поле создается как неподвижными, так и подвижными зарядами. Магнитных зарядов в природе нет. Магнитное поле создается только движущимися электрическими зарядами и действует только на движущиеся заряды.*

- *Характер поля:*

электростатическое поле – потенциальное (силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных).

магнитное поле - вихревое. Силовые линии замкнуты.

- *Электрическое поле изменяет энергию заряженной частицы, магнитное поле – нет (изменяется только направление движения).*

Взаимодействие между электрическими зарядами в электрических и магнитных полях, а также между электрическими и магнитными полями является одним из четырех фундаментальных видов взаимодействия – электромагнитного взаимодействия.