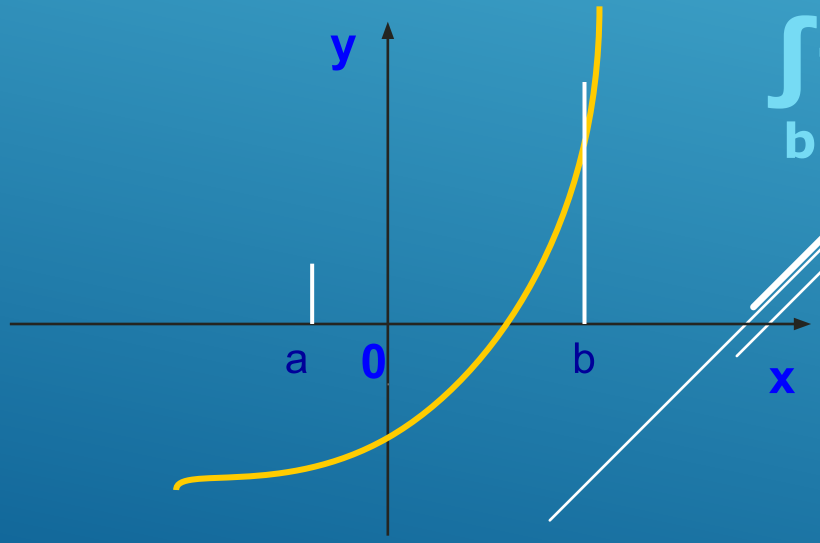
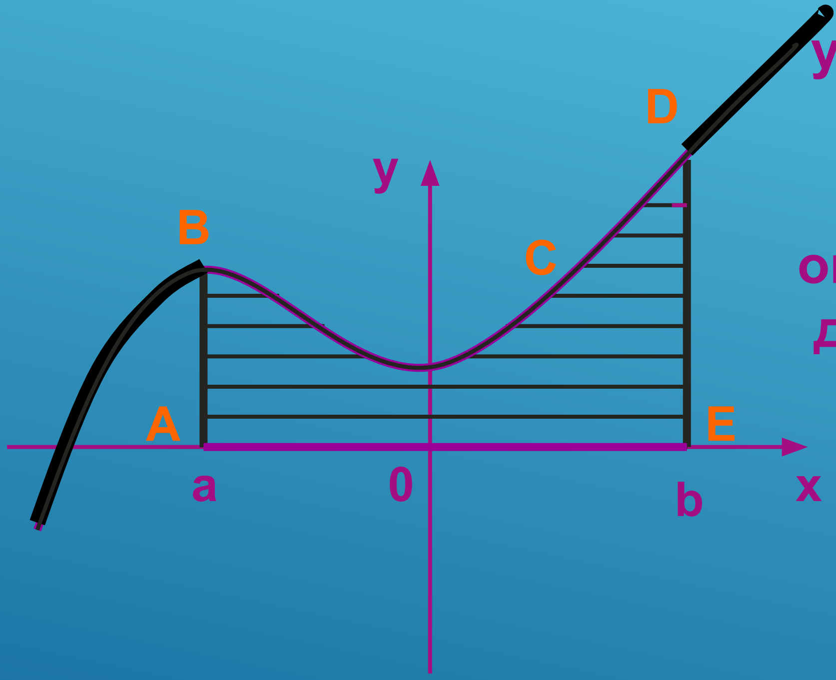
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА.

$$\int_{b}^{a} f(x)dx$$



Пусть функция y=f(x) - непрерывная на отрезке [a;b] , причём на этом отрезке f(x) ≥ 0 .



Линии, ограничивающие данную фигуру:

y=f(x);

[a;b] Є Ox;

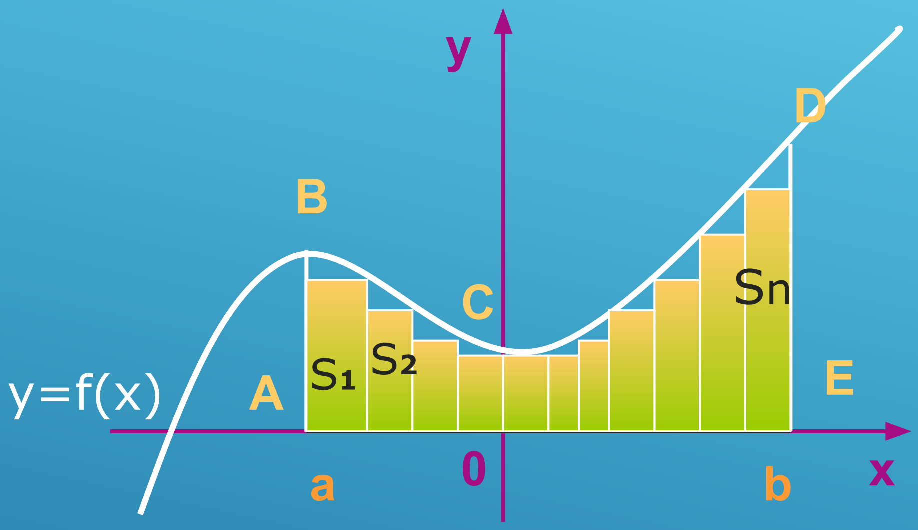
x=a;

x=b;

ABCDE - криволинейная трапеция.

2.Площадь криволинейной трапеции.

$S_{ABCDE} = ?$



$S_{ABCDE} \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

Если $n \to \infty$*, тогда*

$S_{ABCDE} \to \Sigma S_n.$

ΣS_n - интегральные суммы.

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma S_n = \int_a^b f(x)dx \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = S_{ABCDE}$$

Определённый интеграл

Рассмотрим непрерывную на некотором отрезке [a;b] функцию y=f(x), тогда

Верхний предел интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)+C\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона - Лейбница

Нижний предел интегрирования

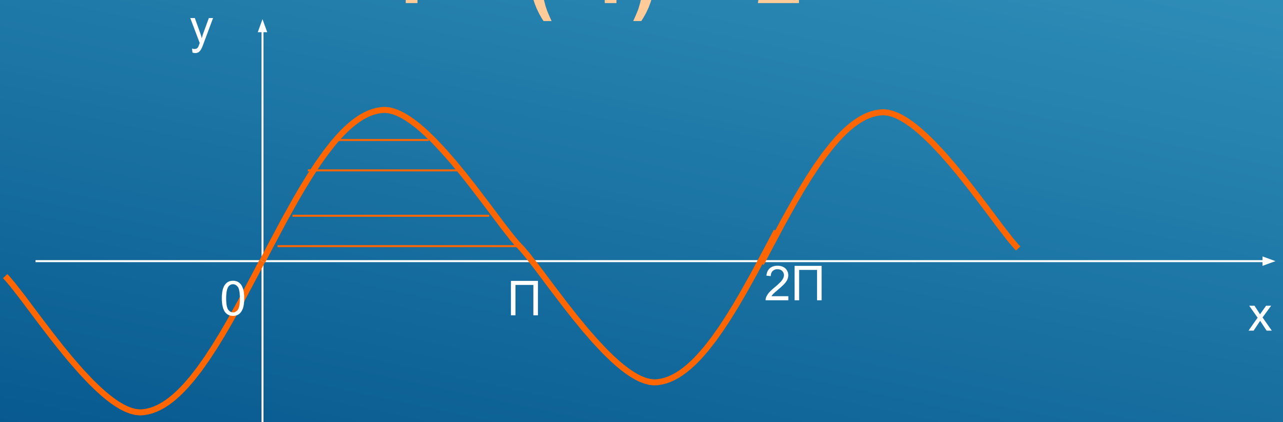
$$\int_a^b f(x)dx = S_{ABCDE} \Rightarrow \text{число}$$

Вычисление определённого интеграла по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример: $$\int_0^{\Pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\Pi} = -\cos \Pi - (-\cos 0) =$$

$$= 1 - (-1) = 2$$



Определённый интеграл – площадь криволинейной трапеции.

?

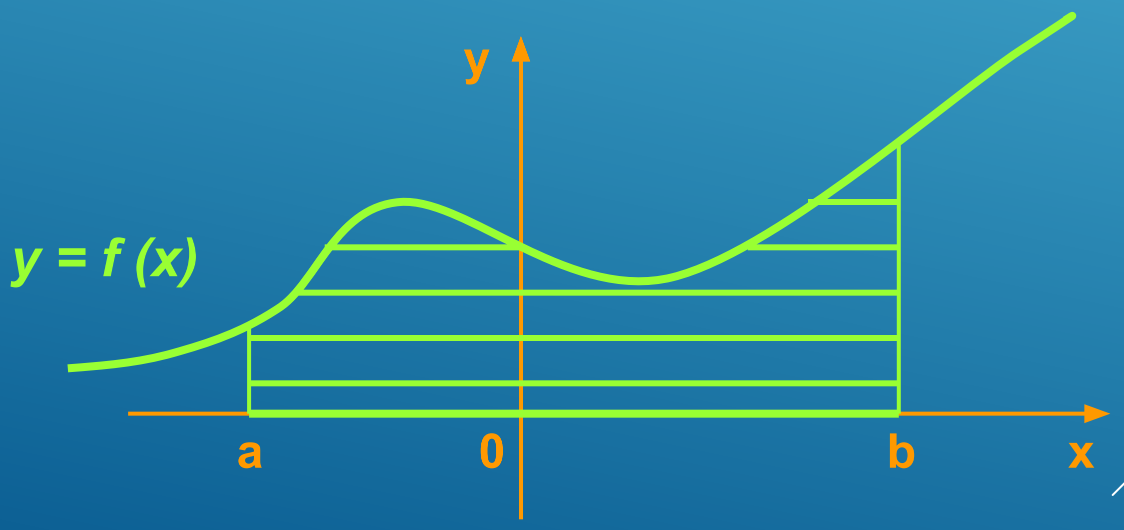
Какие требования предъявляются к криволинейной трапеции?

Криволинейная трапеция должна быть ограничена:

1.Отрезком [a ; b], лежащим на оси X.

2. Прямыми x=a ; x= b.

3.Графиком функции y = f (x), где f (x) ≥ 0 на [a;b].



ПРИМЕРЫ:

1) $F(X)=X^2$

$X=2;$

$X=4$

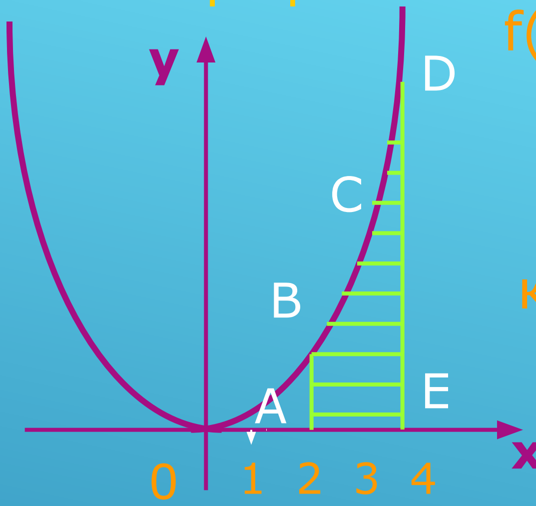
$S_ф$-?

Решение:

1. $f(x)=X^2$

x	0	1	2
y	0	1	4

2. График.



$f(x) \geq 0$ на [2;4]

ABCDE- криволинейная трапеция.

$$3.\ S_{ABCDE}=\int_2^4 x^2dx=x^3/3\Big|_2^4=$$

$$=64/3-8/3=56/3$$

3.Вычисление площадей фигур с помощью интеграла.

а) Пусть фигура ограничена графиком непрерывной функции

y= f(x), причём $f(x) \le 0$ на [a;b].

Фигура АВС - не является криволинейной трапецией.

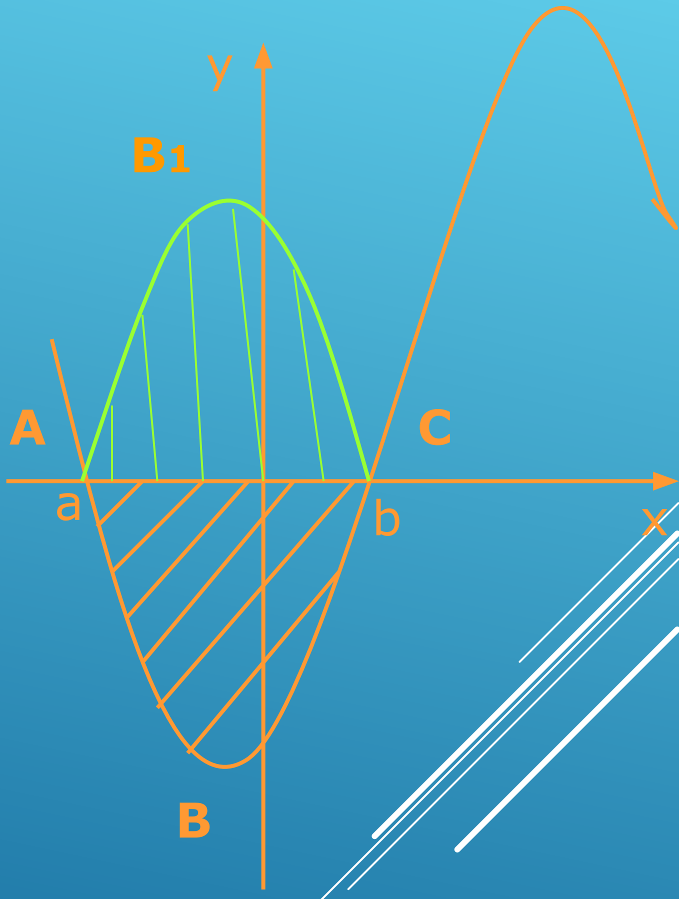
S_{ABC}=?

тогда

рассмотрим функцию y = -f(x)

$-f(x) \ge 0$ на [a;b]

фигура AB_1C - -криволинейная трапеция.



$$S_{ABC} = S_{AB_1C} = \int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Задачи по готовым чертежам:

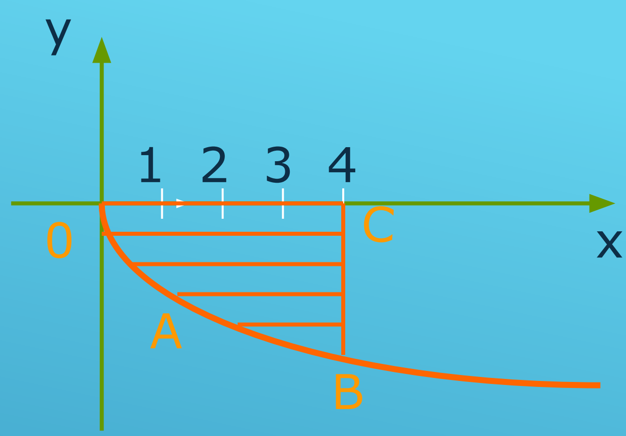
Дано:

$f(x)=-\sqrt{x}$

$x=0$

$x=4$

$S_ф$-?



2. График.

$f(x) \leq 0$ на $[0;4]$

$$S_{OABC} = -\int_0^4 (-\sqrt{x})\,dx =$$

Решение:

1. $f(x)=-\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	-1	-2

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 3x\sqrt{x}/2 \Big|_0^4 =$$

$$=3 * 4\sqrt{4}/2 - 0 = 12$$

б) Площадь фигуры, ограниченной двумя графиками непрерывных функций.

Пусть фигура ограничена графиками непрерывных на [a;b] функций y=f(x) и y=g(x).

$$S_ф \text{ -?}$$

f(x) >0 на отрезке **[a;b]**

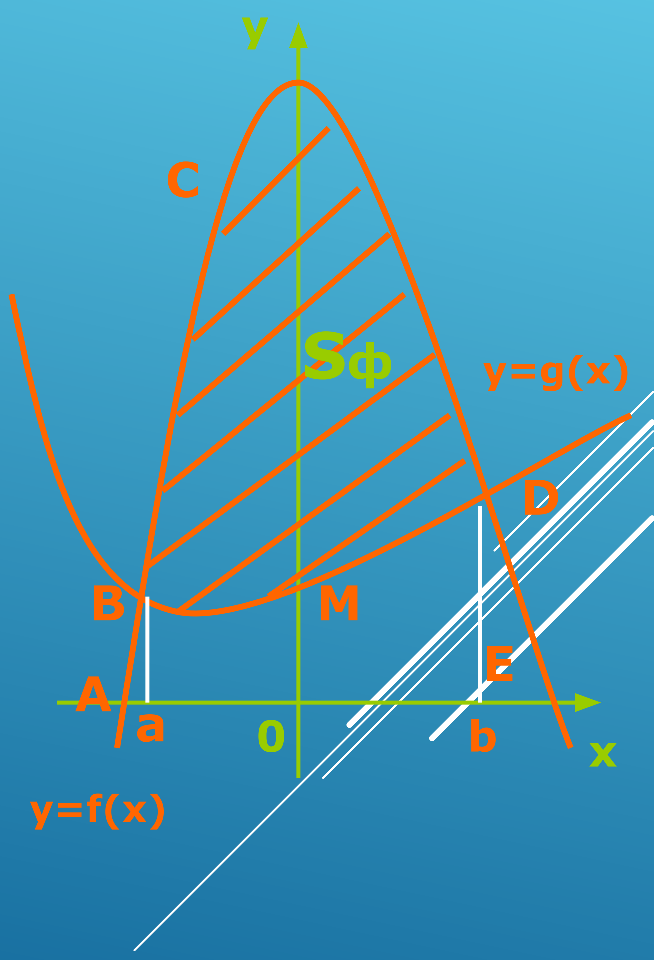
ABCDE-криволинейная трапеция

$$S_{ABCDE} = \int_a^b f(x)dx$$

g(x) >0 на отрезке **[a;b]**

ABMDE-криволинейная трапеция

$$S_{ABMDE} = \int_a^b g(x)dx$$



$$S_{ABCDE} = \int_a^b f(x)dx$$

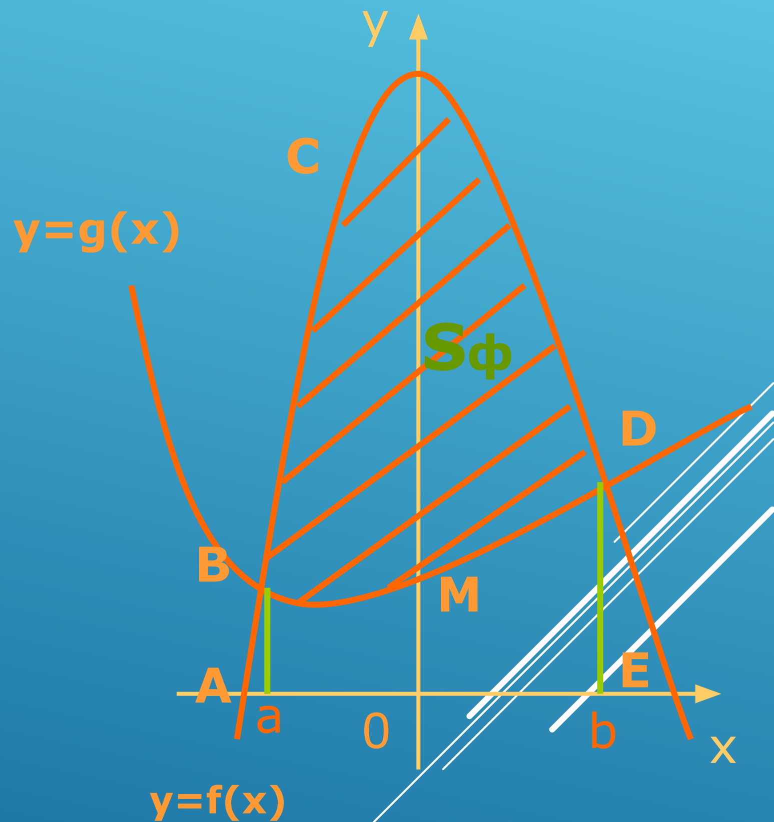
$$S_{ABMDE} = \int_a^b g(x)dx$$

$$S_ф \ -?$$

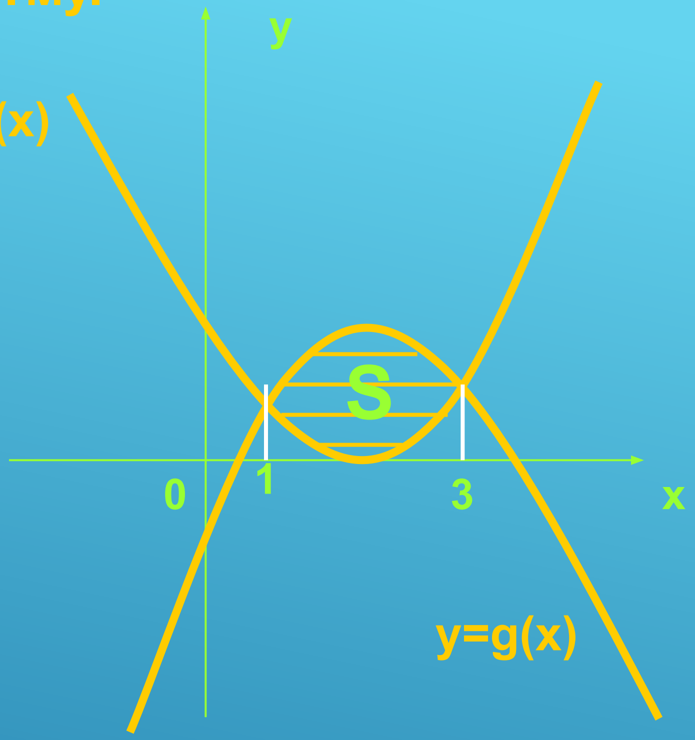
$$S_ф = S_{ABCDE} - S_{ABMDE}$$

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx,$$

где f(x) ≥ g(x) на отрезке [a;b]



Разбор решения задачи по алгоритму.



Дано:

$f(x) = (x - 2)^2;$

$g(x) = -(x-2)^2 + 2;$

S ф -?

Решение:

1. *Фигура ограничена графиками двух непрерывных функций.*

2. *Найдём пределы интегрирования:*

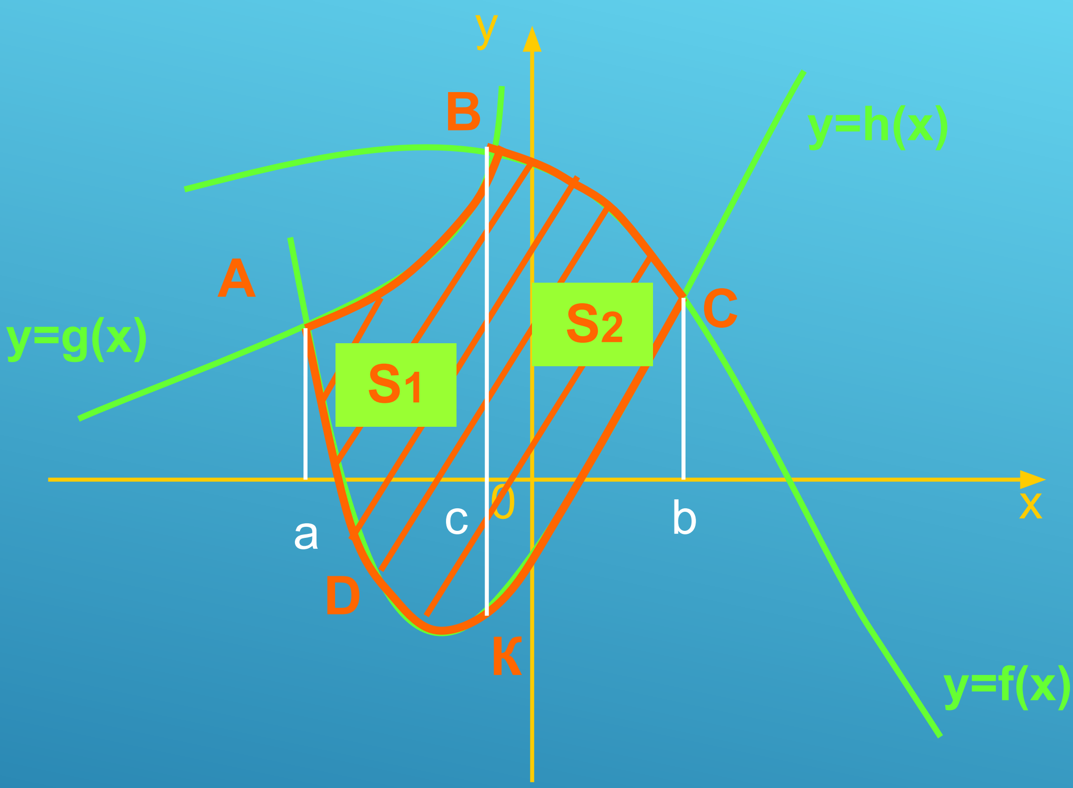
$$-(x-2)^2 + 2 = (x-2)^2;$$

$$X_1 = 1; \qquad X_2 = 3.$$

3. *Найдём площадь полученной фигуры S:*

Т.к. на [1;3] $g(x) \geq f(x)$, то $S_ф = \int_1^3 (g(x) - f(x))\,dx =$

$$= \int_1^3 (-(x-2)^2 + 2 - (x-2)^2)\,dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\,dx = \left(-\frac{2X^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 = 2\frac{2}{3}$$



1. Найдите фигуру, ограниченную графиками данных функций.

2. Является данная фигура криволинейной трапецией?

3. Как найти площадь данной фигуры?

Прямая x = c разбивает фигуру ABCD на две фигуры : ABКD и BCК.

$$S_{ABCD} = S_{ABKD} + S_{BCK},$$

где фигуры ABKD и BCK ограничены графиками только двух функций.

ИТОГОВАЯ СХЕМА
« ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР
С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА».

Данная фигура

Криволинейная трапеция

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx$$

Не является криволинейной трапецией

Ограничена графиком одной непрерывной на данном отрезке функции y=f (x), причём f (x)≤0 на данном отрезке.

$$S_ф = -\int_a^b f(x)dx$$

Ограничена двумя графиками непрерывных функций.

Если на [a;b] f(x) ≥ g(x), то

$$S_ф = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Ограничена тремя и более графиками непрерывных на данном отрезке функций.

1.Необходимо разбить данную фигуру на более простые.

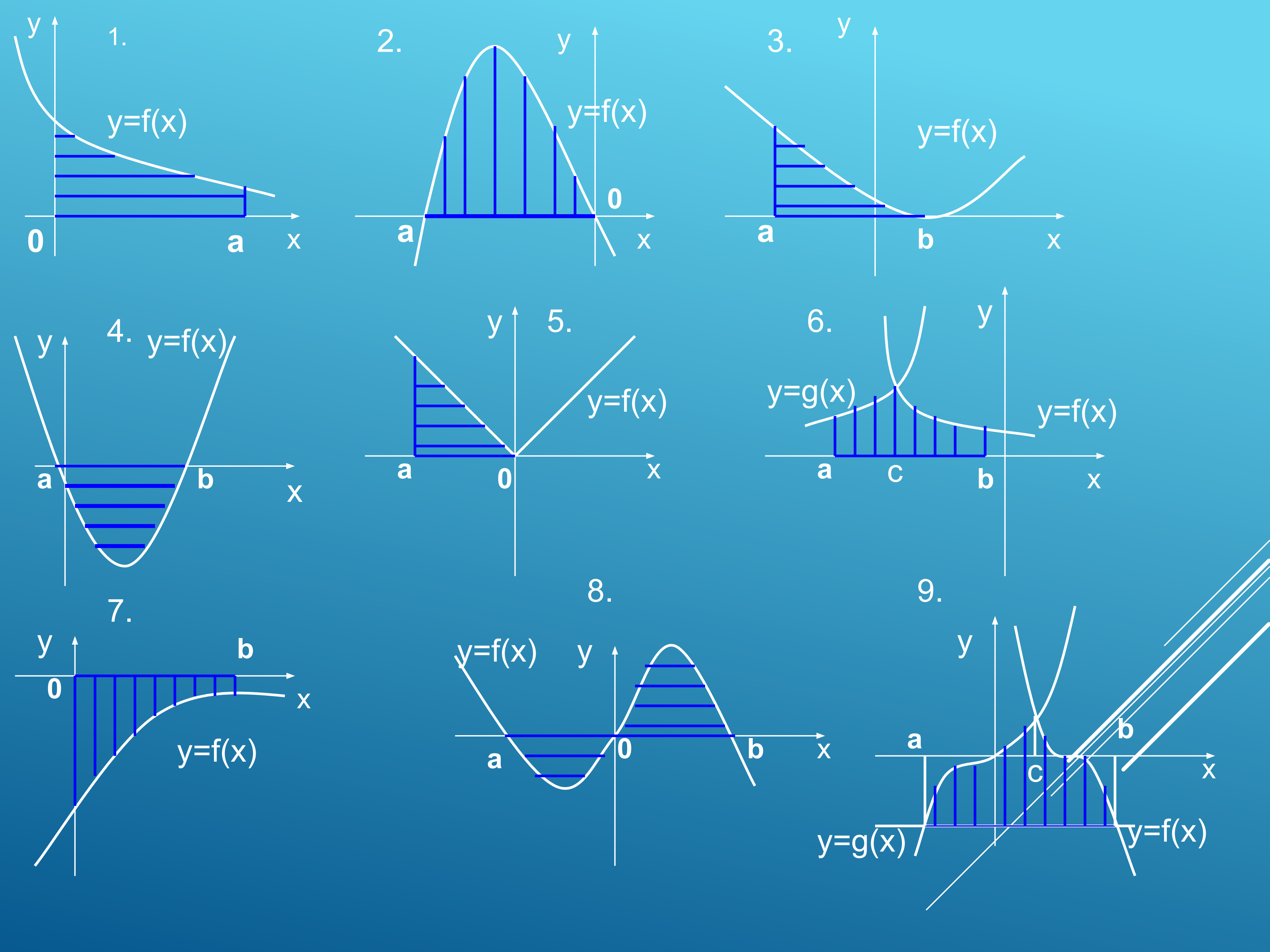
2.Находить площадь полученных фигур, определяя их вид.

Самостоятельная работа

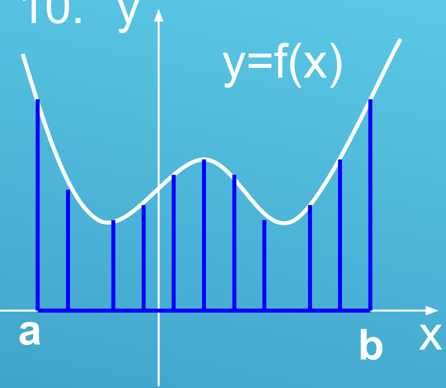
На предложенных далее рисунках изображены

различные фигуры.

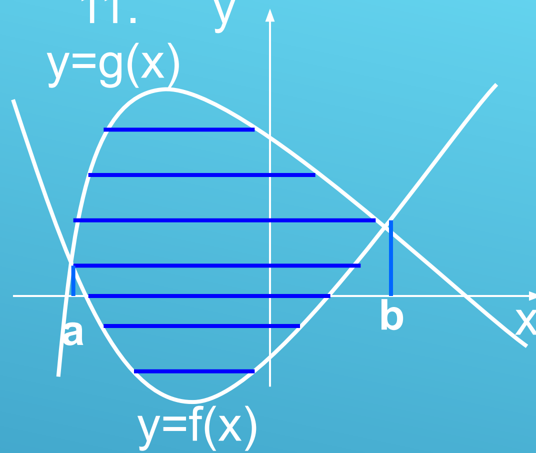
1. Выберете из них те, на которых изображены криволинейные трапеции (запишите их номера)
2. Запишите формулы для вычисления площадей этих криволинейных трапеций.
3. Определите способы вычисления площадей всех оставшихся фигур.


1.
y
y=f(x)
0
a
x
2.
y
y=f(x)
0
a
x
3.
y
y=f(x)
a
b
x
4.
y
y=f(x)
a
b
x
5.
y
y=f(x)
a
0
x
6.
y
y=g(x)
y=f(x)
a
c
b
x
7.
y
b
0
x
y=f(x)
8.
y=f(x)
y
a
0
b
x
9.
y
a
b
c
x
y=g(x)
y=f(x)

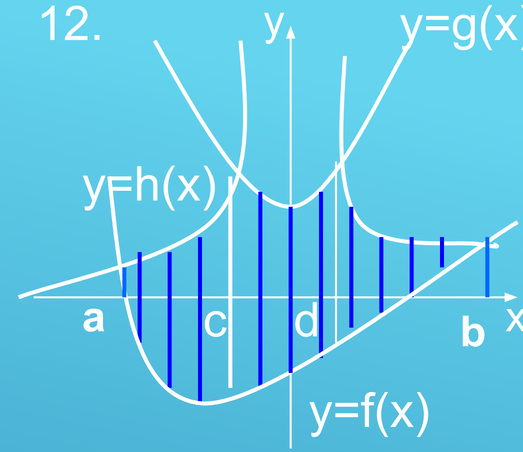
10.


y
y=f(x)
a
b
x

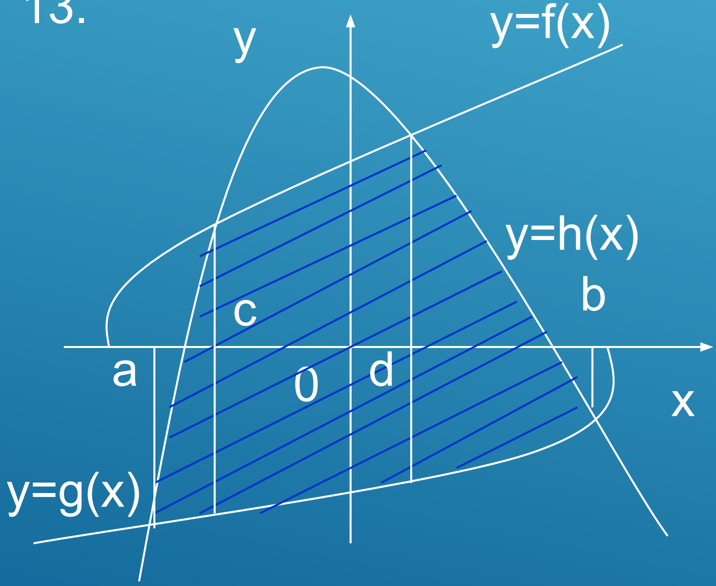
11.


y
y=g(x)
a
b
x
y=f(x)

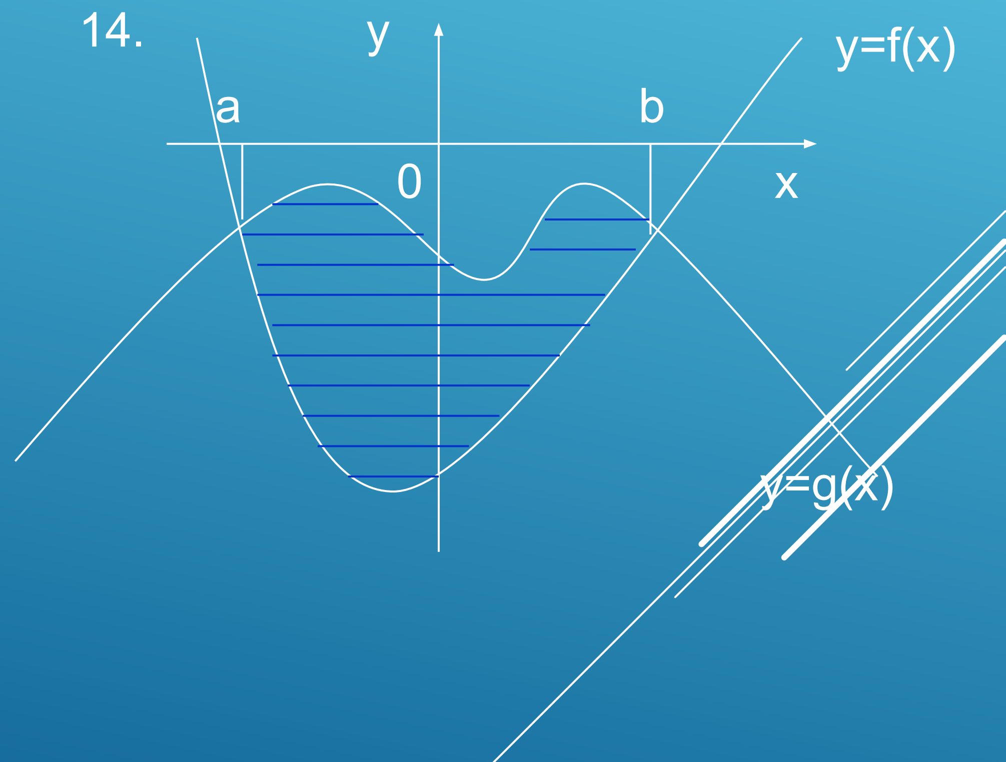
12.


y
y=g(x)
y=h(x)
a
c
d
b
x
y=f(x)

13.


y
y=f(x)
y=h(x)
b
c
a
0
d
x
y=g(x)

14.


y
y=f(x)
a
b
0
x
y=g(x)

Домашняя работа

А

В задачах **107–116** вычислите указанные интегралы:

107. а) $\int_{-1}^{2}(2x-1)\,dx$; б) $\int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$;

в) $\int_{0}^{1}e^{2x}\,dx$; г) $\int_{-2}^{1}(3x^2-2x+1)\,dx$.

108. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$; г) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{dx}{\sin^2 x}$.