Тема 5 Основные понятия алгебры логики

Цель лекции: булевы функции одной и двух переменных; комбинационный автомат и автомат с памятью

Введение

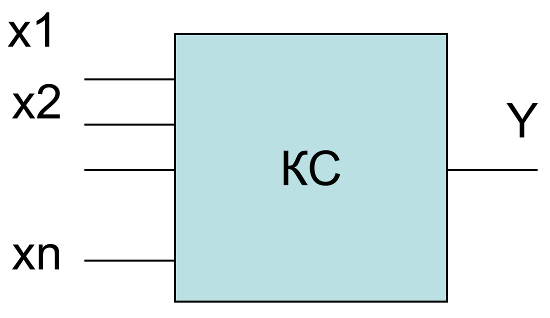
- Если аргументы функции принимают только значения 0 или 1, то функция так же может принимать значения 0 или 1.
- Независимая переменная, которая принимает всего два значения называется двоичной или логической или булевой переменной.
- Логическая схема, реализует функцию от заданного числа аргументов.
- Разделяют функции от одного аргумента, от двух аргументов и от n – аргументов.

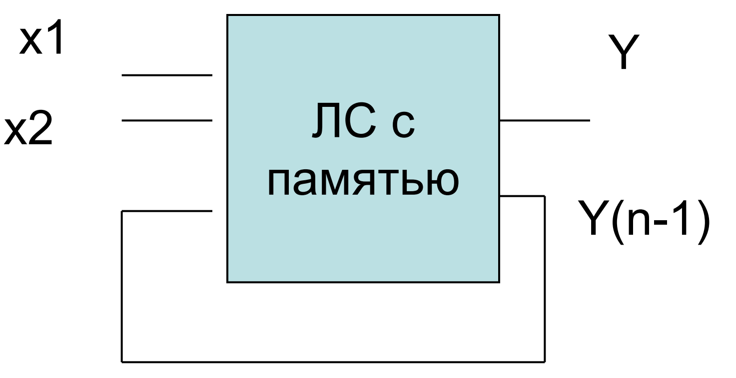
Определение

- Алгебра логики – это исчисление булевых функций на основе тождеств.

Виды логических схем

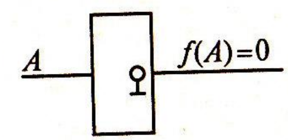
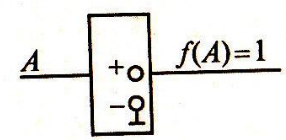
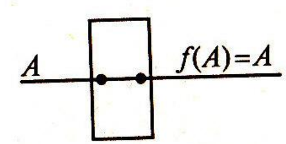
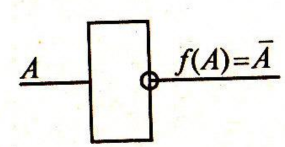
- Логические схемы комбинационного типа или схемы без памяти.
- Логические схемы с памятью.



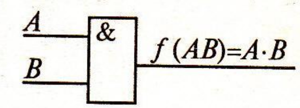
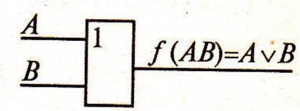


•Логическая схема, реализует функцию от заданного числа аргументов.
•ЭТО основа для создания всего многообразия функциональных элементов

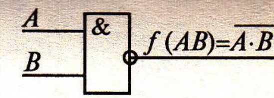
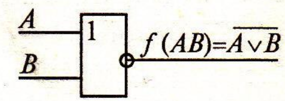
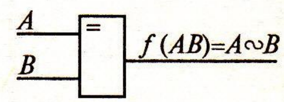
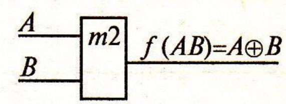
Функции одной переменной

Название функции	Представление функции в виде			Определение функции	Условное обозначение
	формулы	таблицы истинности			
		A	$f(A)$		
Константа 0	$f(A)=0$	0 1	0 0	При любом значении A выходная функция равна лог. 0	
Константа 1	$f(A)=1$	0 1	1 1	При любом значении A выходная функция равна лог. 1	
Переменная A	$f(A)=A$	0 1	0 1	Значение функции равно переменной A	
Инверсия A	$f(A)=\bar{A}$	0 1	1 0	Значение функции противоположно (инверсно) входной переменной A	

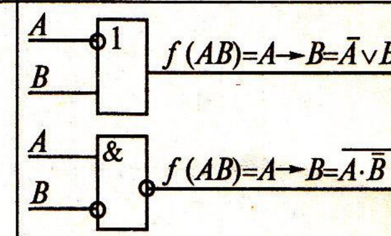
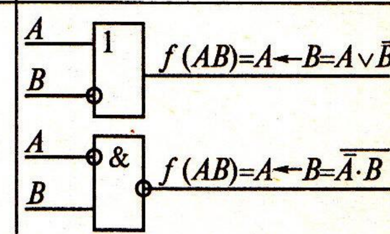
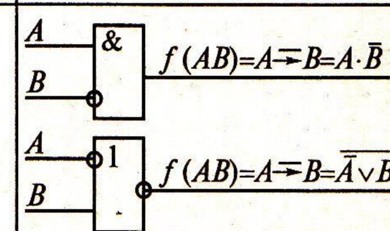
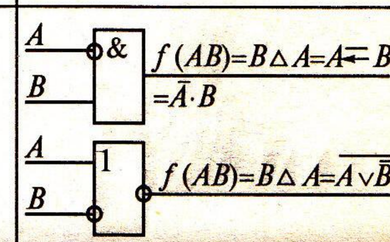
Функция двух переменных

Название функции	Символика функции	Условная «связка»	Понятие логической функции	Вид функции двух аргументов	Таблица истинности			Условное графическое обозначение (УГО) логического элемента
					A	B	$f(AB)$	
Конъюнкция (логическое умножение)	$\cdot$; $\wedge$	И	Функция истинна — равна 1, если **и** A **и** B истинны — равны 1. Совпадение 1 на входах элемента приводит к появлению на выходе 1. Достаточно 0 на одном из входов элемента для появления на выходе 0	$f(AB) = A \cdot B =$ $= A \wedge B$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 1	
Дизъюнкция (логическое сложение)	+; $\vee$	ИЛИ	Функция истинна — равна 1, если **или** A, **или** B, **или** A и B истинны — равны 1. Совпадение 0 на входах элемента приводит к появлению на выходе 0. Достаточно 1 на одном из входов элемента для появления на выходе 1	$f(AB) = A \vee B$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 1	

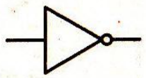
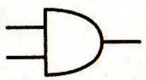
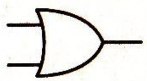
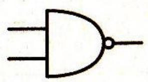
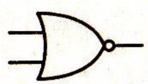
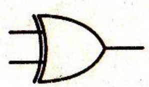
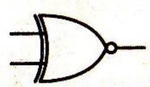
Функция двух переменных

Операция Шеффера (штрих Шеффера). Функция является инверсией функции «Конъюнкция»	/	И-НЕ	Функция ложна — равна 0, если **и** A **и** B истинны — равны 1. Совпадение 1 на входах элемента приводит к появлению на выходе 0. Достаточно 0 на одном из входов элемента для появления на выходе 1	$f(AB) = A/B = \overline{A \cdot B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 1 0	
Стрелка Пирса (функция Вебба). Функция является инверсией функции «Дизъюнкция»	↓	ИЛИ-НЕ	Функция ложна — равна 0, если хотя бы одна из переменных истинна или функция истинна, если обе переменные ложны	$f(AB) = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 0	
Эквивалентность (равнозначность)	$\sim$; =	—	Функция истинна — равна 1, когда значения переменных совпадают по изображению	$f(AB) = A \sim B = \overline{A} \cdot \overline{B} \vee AB$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 0 1	
Сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ, неравнозначность). Функция является инверсией функции «Эквивалентность»	$\oplus$; = 1; $\forall$; $m2$	—	Функция истинна — равна 1, если переменные не совпадают по изображению. Реализация функции соответствует правилу двоичного сложения без учета единицы переноса	$f(AB) = A \oplus B = \overline{A}B \vee A\overline{B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0	

Функция двух переменных

Название функции	Символика функции	Условная «связка»	Понятие логической функции	Вид функции двух аргументов	Таблица истинности A	B	$f(AB)$	Условное графическое обозначение (УГО) логического элемента
Импликация (от A к B)	$\rightarrow$	—	Это высказывание ложно только в том случае, когда A истинно, а B ложно, и истинно во всех остальных случаях	$f(AB)=A\rightarrow B=$ $=\bar{A}\vee B=\overline{A\cdot\bar{B}}$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 1 0 1	
Импликация (от B к A)	$\leftarrow$	—	Это высказывание ложно только в том случае, когда B истинно, а A ложно, и истинно во всех остальных случаях	$f(AB)=A\leftarrow B=$ $=A\vee\bar{B}=\overline{\bar{A}\cdot B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	1 0 1 1	
Запрет по B. Функция является инверсией функции «Импликация» (от A к B)	Δ; $\overline{\rightarrow}$; $\not\rightarrow$	—	Функция истинна, когда A истинно, а B ложно, и ложна во всех остальных случаях	$f(AB)=A\overline{\rightarrow}B=$ $=A\cdot\bar{B}=\overline{\bar{A}\vee B}$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 1 0	
Запрет по A. Функция является инверсией функции «Импликация» (от B к A)	Δ; $\overline{\leftarrow}$; $\not\leftarrow$	—	Функция истинна, когда B истинно, а A ложно, и ложна во всех остальных случаях	$f(AB)=B\overline{\leftarrow}A=$ $=\bar{A}\cdot B=\overline{A\vee\bar{B}}$	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 0 0	

Функциональное изображение логических элементов с двумя входами

Логическая функция	Отечественное	Зарубежное
НЕ	1	
И	&	
ИЛИ	1	
И-НЕ	&	
ИЛИ-НЕ	1	
Сложение по модулю 2 (Исключающее ИЛИ)	=1	
Эквивалентность (Исключающее ИЛИ-НЕ)	= =1	

Основа для создания любой цифровой схемы

Обычные логические выходы нельзя Соединять!!!!

Булевы тождества

- ВАЖНО. Одну и туже булеву функцию можно задать разными формулами. Это и есть тождества.
- Использую тождества можно менять аналитическое выражение функции, не изменяя ее значение.

Тождества

- Коммутативные (переместительные) законы:
- $a \vee b = b \vee a; \qquad a \cdot b = b \cdot a;$
- Ассоциативные (сочетательные) законы:
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c); \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

Тождества

- Дистрибутивные (распределительные) законы:

$$a(b \vee c) = ab \vee bc; \qquad a \vee bc = (a \vee b) \cdot (a \vee c);$$

- Законы повторения:

$$a \vee a \vee \ldots \vee a = a; \qquad a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a;$$

- Законы инверсии (двойственности):

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}; \qquad \overline{a \cdot b} = \bar{a} \vee \bar{b};$$

Тождества

- Закон отрицания.

$$a \vee \overline{a} = 1; \qquad a \cdot \overline{a} = 0;$$

- Закон двойного отрицания.

$$\overline{\overline{a}} = a$$

- Закон поглощения.

$$a \vee ab = a; \qquad a \cdot (a \vee b) = a$$

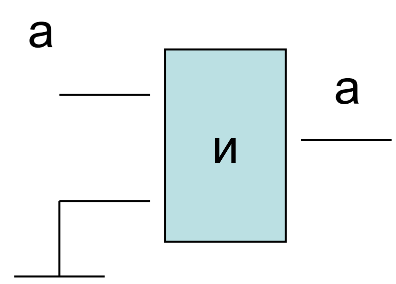
- Закон склеивания.

$$ab \vee a\overline{b} = a$$

Тождества их применение

- Операции с константами.

$$\bar{0}=1; \qquad \bar{1}=0; \qquad a\cdot 0=0; \qquad a\vee 0=a; \qquad a\vee 1=1;$$



На доске привести ряд экспресс задач ……

Сводный список тождеств

ЗАДАЧА. Дайте графическую интерпретацию этих тождеств

I. $x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$.

II. $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$.

III. $\bar{\bar{x}} = x$.

IV. $x \wedge x = x,\ x \vee x = x$.

V. $x \wedge \bar{x} = 0,\ x \vee \bar{x} = 1$.

VI. $x \wedge 1 = x,\ x \vee 1 = 1$.

VII. $x \wedge 0 = 0,\ x \vee 0 = x$.

VIII. $\overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2,\ \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$.

IX. $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1,\ x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$.

X. $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$,

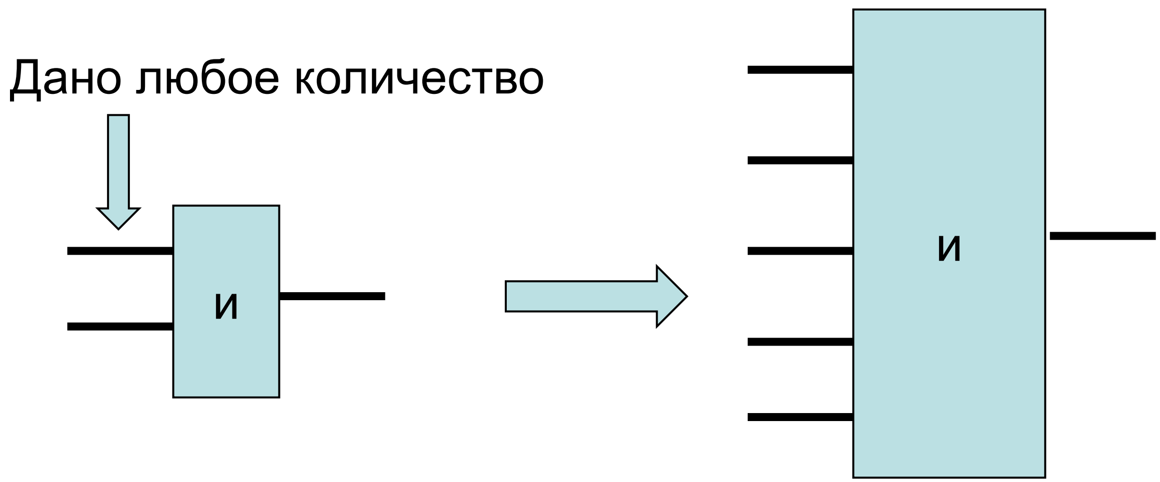
$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

XI. $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$,

$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

Применение тождеств

- ЗАДАЧА. Типовая задача. Задан базис из элементов 2И. Необходимо создать элемент 5И.



Решите в аналитической и графической форме

Применение тождеств

- Используется для перехода от одного логического базиса к другому.
- ЗАДАЧА. Задан базис элементов 2И-НЕ. Постройте из этого базиса логический элемент 2ИЛИ

Решение задачи

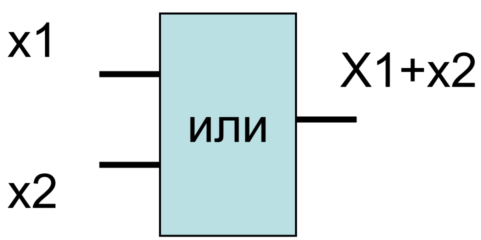
Дано

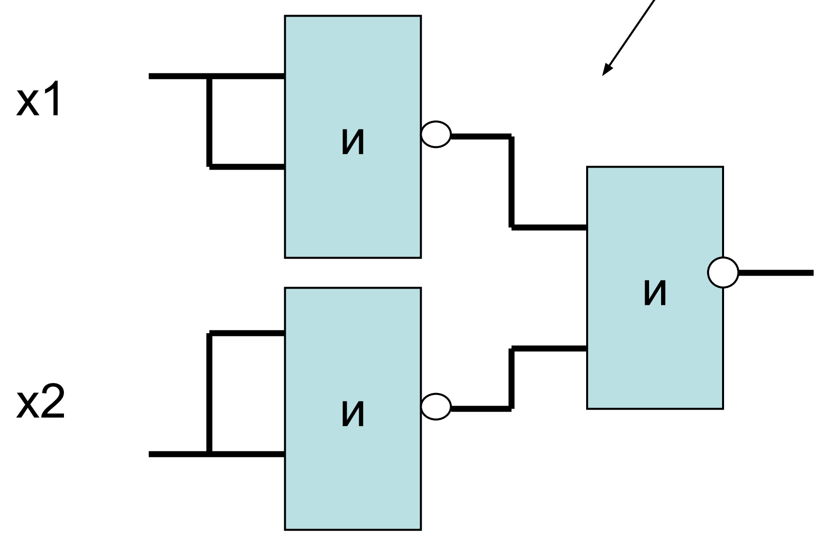
$$x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{\bar{x}_1 \times \bar{x}_2}$$

Ответ

Отрицание отрицания

инверсия





Значение сложной функции

- ПРИМЕР. Пусть задана некоторая сложная функция или суперпозиция.
- Как вычислить значение функции?

$$f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \wedge x_2$$

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \wedge x_2$
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	0	0
№ шага		1	2

Решение

Значение сложной функции

- Пример 2. Вычислить значение функции.

$$f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2).$$

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
№ шага		1	2	3	4	5

Из этой методики следует важное следствие

Логические выражения и логические схемы

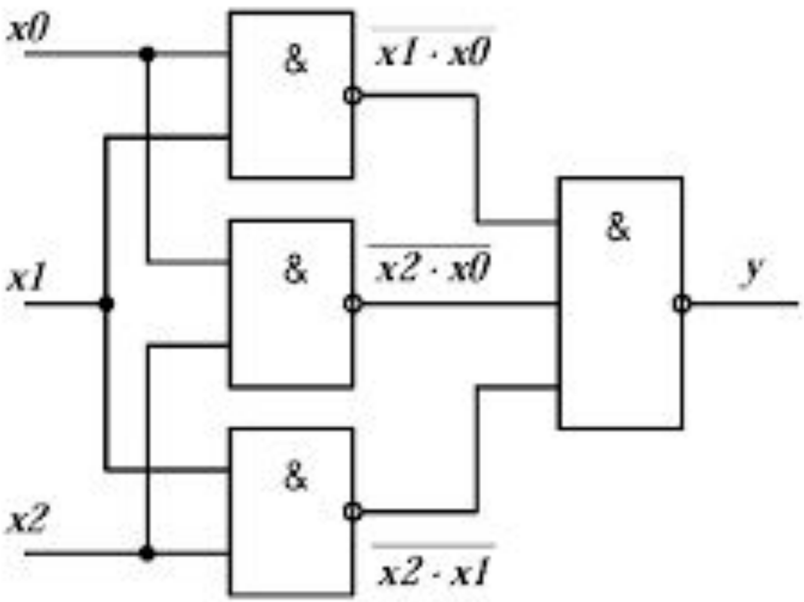
- Задача. По формуле составьте изображение логической схемы

$$F = \overline{(A * B * C)} + (B * C + \overline{A})$$

$$F = B + (C * \overline{A}) + (A * B)$$

Типовая задача

- ЗАДАЧА. Восстановите логическое выражение по схеме



Булева функция N переменных

- ТЕОРЕМА. Любую булеву функцию **n** переменных можно задать с помощью формулы, употребляя только тождественный нуль, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.
- Далее приведем пример

Иллюстрация теоремы

- Рассмотрим функцию заданную таблицей.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

1 Шаг. Выделим строки таблицы, где функция равна единице и составим конъюнкцию переменных.

$$y_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3,$$

$$y_3 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$$

$$y_7 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$

Продолжение иллюстрации теоремы

- Шаг 2. Строим дизъюнкцию построенных конъюнкций.

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_2 \vee y_3 \vee y_7 =$$

$$= (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

Функция стоящая в правой части равенства называется нормальной дизъюнктивной формой

По формуле можно построить логическую схему устройства, условно кодера, которая будет принимать значение единица при определенных комбинациях x.

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы представления функций в алгебре логики

- Чтобы знать переключательную функцию, необязательно задавать все ее значения при всех сочетаниях переменных. Достаточно знать состояния, при которых она равна единице.

- В аналитическом виде функция в своей основе имеет набор логических произведений или сумм, связанных знаками сумм или произведений.

Определения

- Произведение переменных, в которое каждая из переменных входит только один раз в прямом или инверсном виде, называется *минтермом*.
- Сумма переменных, в которую каждая из переменных входит только один раз в прямом или инверсном виде, называется *макстремом*.

Минтерм, макстерм, ранг

$$X = ABC \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C};$$

Минтерм

Макстерм

$$X = \left(\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}\right)\cdot\left(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}\right)\cdot\left(A \vee B \vee C\right).$$

Количество переменных, входящих в минтерм и макстерм, называется рангом

Пример

Переменные		Макстермы	Минтермы
A	*B*	*M*	*m*
0	0	$M_0 = A \vee B$	$m_0 = \overline{A} \cdot \overline{B}$
0	1	$M_1 = A \vee \overline{B}$	$m_1 = \overline{A} \cdot B$
1	0	$M_2 = \overline{A} \vee B$	$m_2 = A \cdot \overline{B}$
1	1	$M_3 = \overline{A} \vee \overline{B}$	$m_3 = A \cdot B$

Задана функция от двух переменных, как будут выглядеть минтермы и макстермы этой функции.

Переход от табличной формы к СКНФ и СДНФ

- Пусть задана функция x = f(A,B,C) таблицей:

X_0 (M)	A	B	C	X	X_1 (m)
—	0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$
—	0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$
$A \vee \overline{B} \vee \overline{C}$	0	1	1	0	—
—	1	0	0	1	$A\overline{B}\,\overline{C}$
$\overline{A} \vee B \vee \overline{C}$	1	0	1	0	—
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$	1	1	0	0	—
—	1	1	1	1	ABC

Произведение макстермов, в которых функция равна нулю называется СКНФ

сумма минтермов, в которых функция равна единице называется СДНФ

Переход от табличной формы к СДНФ

- Из таблицы всегда можно выбрать дизъюнкцию, всех переменных, для которых функция равна единице. Эта формула называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой СДНФ

$$X_1 = \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee ABC.$$

Минтерм

Переход от табличной формы к СКНФ

- Логическое произведение всех макс термов, для которых функция равна нулю. Переменные, входящие в макстерм, имеют инверсный вид по отношению к табличным значениям. Эта запись называется совершенной конъюнктивной нормальной формой СКНФ.

$$X_0 = \left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right).$$

Макстерм

Неформальная и формальная постановка задачи

- Неформальная постановка задачи:
- Необходимо разработать устройство для автомобиля с кузовом седан. Устройство должно обладать звуковым и световым сигнализатором и срабатывать если водитель находится на своем сидении и открыта хотя бы одна дверь или багажник.
- ЗАДАЧА. Сформулируйте логическое выражение и логическую схему устройства.