Линейная алгебра

- Определители второго и третьего порядка.
- Определители n – ого порядка.
- Свойства определителей.
- Методы вычисления определителей.

Определители широко применяются во многих разделах высшей математики, в теоретической механике, физике и т.д. для сокращения записей и удобства вычислений.

Любой квадратной матрице порядка ***n*** можно сопоставить число, которое называется ***определителем***.

Обозначается $\det A$ или $|A|$ или Δ .

Определитель матрицы также называется её ***детерминантом***.

Определители 2 порядка

Определитель 2 - го порядка - это число, записанное в виде: $\boxed{a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

Элементы определителя,

Индексы

Номер строки

Номер столбца

Главная диагональ определителя

Побочная диагональ определителя

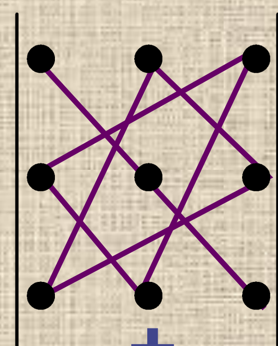
из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали.

Определители 3 порядка

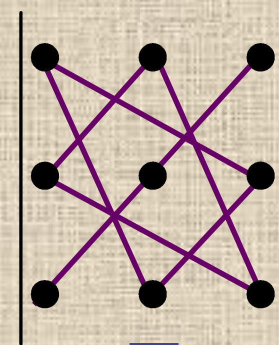
Определитель 3 - го порядка - это число, записанное в виде: $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$

$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

Метод треугольников или схема Саррюса



+



−

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 6\cdot 0 - 5\cdot(-1)\cdot 0$$

$$-2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 4 = 29$$

Метод треугольника применим только для определителей 3 порядка

Определители n – ого порядка

Определителем *n* – ого порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Методы вычисления определителей *n* – ого порядка рассмотрим на примере вычисления определителей третьего порядка.

Методы вычисления определителей

1 **Метод разложения определителя по элементам строки (столбца)**

Определитель *(n-1)-ого* порядка, который получается из определителя *n - ого* порядка путем вычеркивания *i - ой* строки и *j - ого* столбца, т.е. строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} называется ***минором элемента*** и обозначается M_{ij}

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23}$$

Методы вычисления определителей

Величина определителя равна сумме произведений элементов какой – либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Разложение определителя по элементам *i – ой* строки

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Разложение определителя по элементам *j – ого* столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3}$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot 1 - 5 \cdot 1) - 1 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -2$$

Методы вычисления определителей

2 Использование свойств определителя

Свойства определителя:

Величина определителя:

- равна нулю, если элементы какого - либо столбца или строки равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

- равна нулю, если соответствующие элементы двух строк (столбцов) равны

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{12} = 0$$

- меняет знак, если поменять местами строки (столбцы):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

- увеличивается в *k* раз, если элементы какого - либо столбца (строки) увеличить в *k* раз:

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot a_{11} \cdot a_{22} - k \cdot a_{12} \cdot a_{21} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- не меняется при замене строк соответствующими столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Методы вычисления определителей

- не меняется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{11}ka_{12} - a_{21}a_{12} - ka_{11}a_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Если определитель имеет так называемый треугольный вид, то он вычисляется как произведение чисел, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Методы вычисления определителей

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} =$$

$$= -5 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = -17$$

Разложим определитель по элементам 1 столбца

Также, используя свойства, можно привести определитель к треугольному виду и вычислить по последнему свойству.

Методы вычисления определителей

1. Определители 3-го порядка вычисляются с помощью правила треугольников или путем приписывания справа первых двух столбцов и тогда определитель равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -8 & 0 \\ 2 & -3 \end{matrix} = 1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot(-8)\cdot(-3)$$

$$-2\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot(-8)\cdot 0 = 79$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

2. Метод разложения определителя по элементам строки (столбца) или метод понижения порядка определителя.

3. Метод использования элементарных преобразований или метод приведения к треугольному виду.

4. Метод рекуррентных соотношений.