Дополнительные главы линейной алгебры

Бибердорф Элина Арнольдовна

Структура курса

- Особенности машинных вычислений
- Спектр симметричных матриц
- Решение линейных систем
- Спектр несимметричных матриц

Литература

Бибердорф Э.А. *Гарантированная точность прикладных задачах линейной алгебры*

Бибердорф Э.А. *Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры*

Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры*

Досрочный экзамен

- 3 задания
- Результаты присылать по адресу dgla@ngs.ru
- Файлы: ФамилияСтудента.docx

  ФамилияСтудента.pdf

Повторить

- Линейные системы, число обусловленности
- Собственные значения, собственные векторы
- Сингулярные числа, сингулярные векторы
- Критерии устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений

Особенности компьютерных вычислений

Современные исследования:

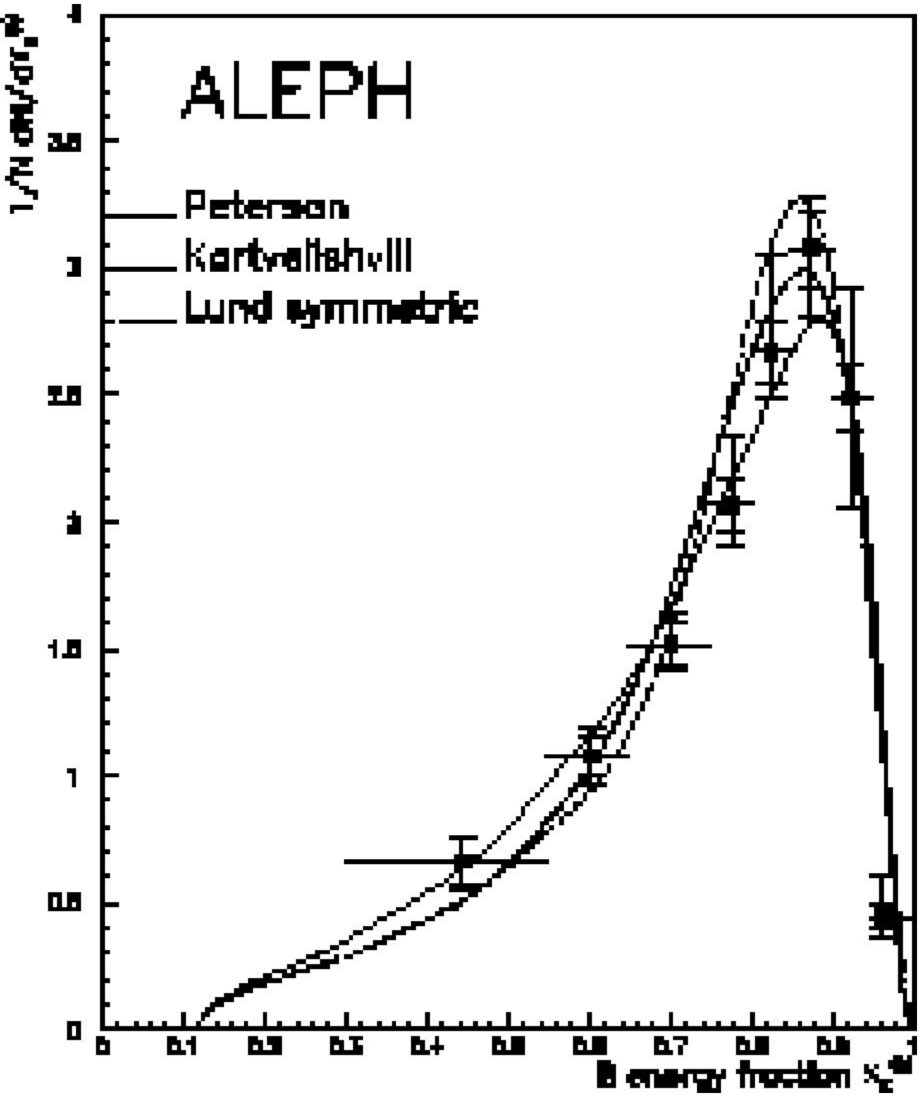
1) физический или численный эксперимент $\Rightarrow$ исходные данные задачи;

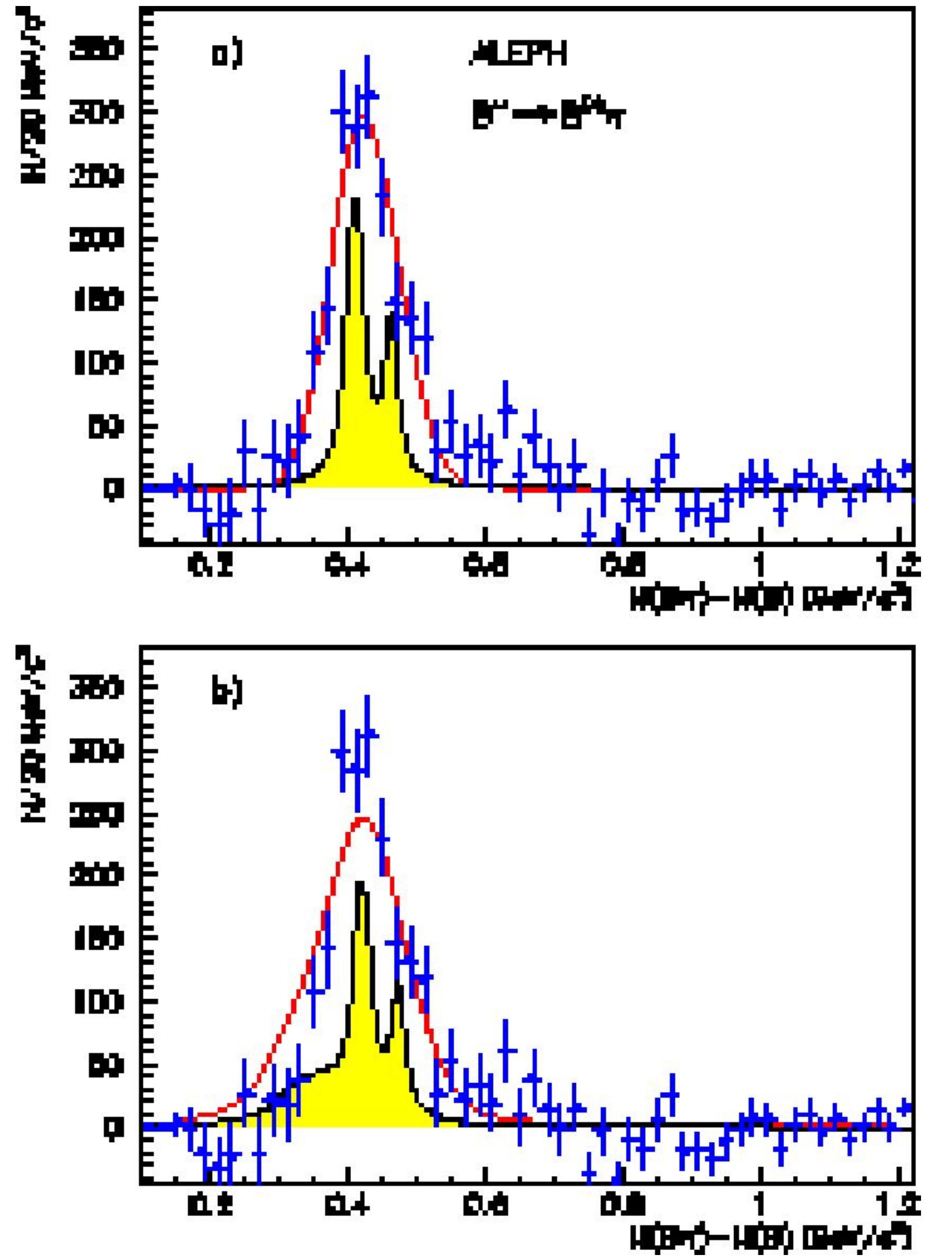
2) интерполяция этих данных на всю область;

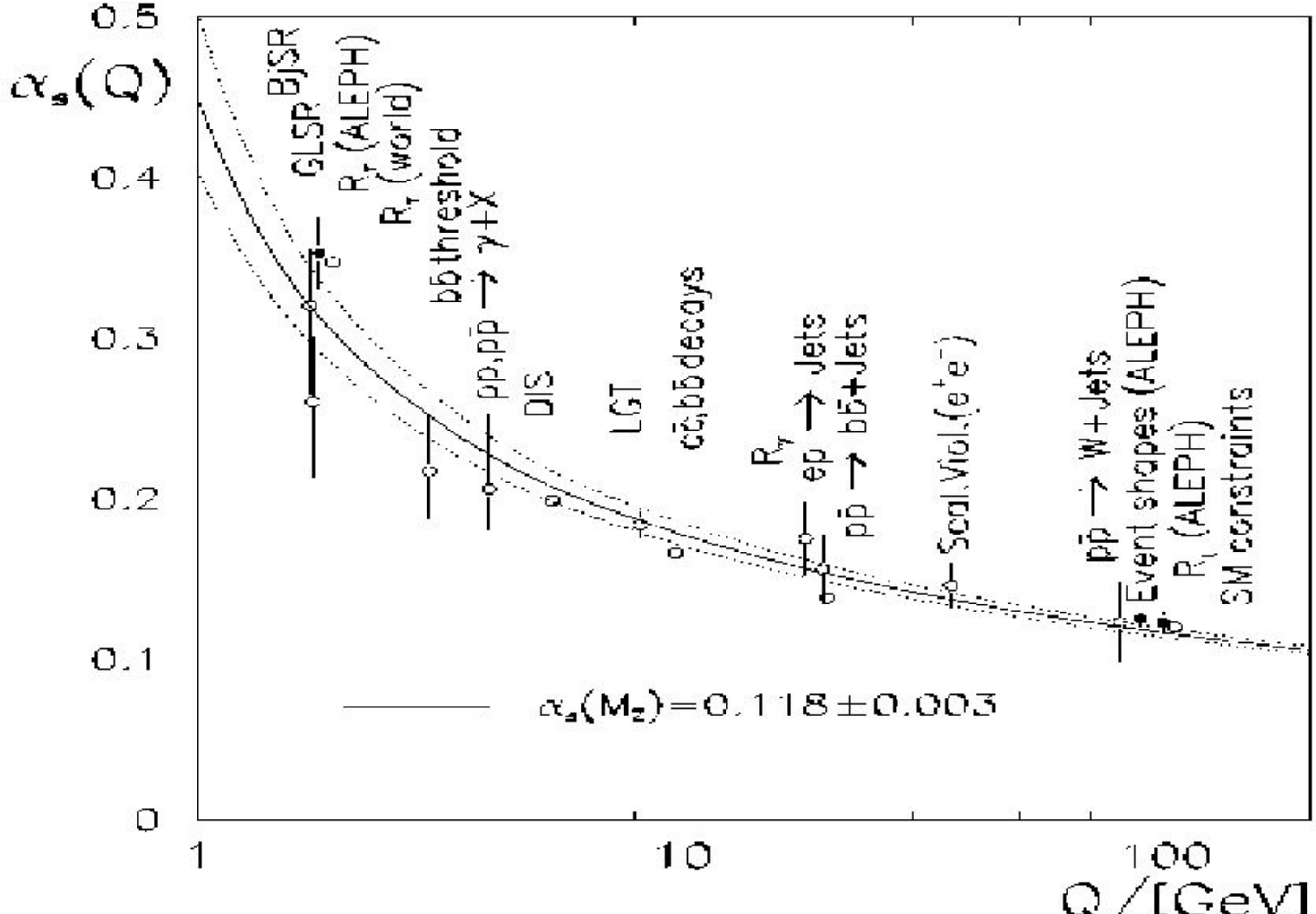
3) дискретизация $\Rightarrow$ конечномерная математическая модель;

4) решение задачи линейной алгебры

$$Ax = f \qquad \text{или} \qquad Av = \lambda v.$$


ALEPH
Peterson
Kartvelishvili
Lund symmetric
B energy fraction


a)
ALEPH
b)



$\alpha_s(Q)$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
10
100
Q/[GeV]
BjSR
GLSR
R_τ (ALEPH)
R_τ (world)
$b\bar{b}$ threshold
$p\bar{p} \rightarrow \gamma + X$
$pp, p\bar{p}$
DIS
LGT
$c\bar{c}, b\bar{b}$ decays
R_γ
$ep \rightarrow$ Jets
$p\bar{p} \rightarrow b\bar{b}$+Jets
Scal.Viol.(e^+e^-)
$p\bar{p} \rightarrow$ W+Jets
Event shapes (ALEPH)
R_l (ALEPH)
SM constraints
$\alpha_s(M_Z) = 0.118 \pm 0.003$

Машинные числа

γ - фиксированное целое положительное число

z - произвольное вещественное число

$$z = \pm m(z)\gamma^{p(z)}$$

$p(z)$ - γ-ичный порядок

$m(z) = \dfrac{a_1}{\gamma} + \dfrac{a_2}{\gamma^2} + \ldots$ – γ-ичная мантисса

a_j– натуральное число, $0 \le a_j < \gamma - 1$ при $1 < j < \infty$,

$\dfrac{1}{\gamma} \le m(z) < 1$ Представление однозначно.

Чтобы ненулевое вещественное число z могло быть размещено в машинной памяти, его порядок должен быть ограничен:

$$p_- \le p(z) \le p_+ \,,$$

а мантисса должна раскладываться в конечную γ-ичную дробь

$$m(z) = 0.a_1 a_2 \cdots a_{k[\gamma]} = \frac{a_1}{\gamma} + \frac{a_2}{\gamma^2} + \cdots + \frac{a_k}{\gamma^k},$$

$$1 \le a_1 \le \gamma - 1, \quad 0 \le a_j \le \gamma - 1 \quad (2 \le j \le k).$$

Константы p_+ , p_- и k – абсолютные

Для $z = 0$ принято считать $m(0) = 0$, $p(0)$ – не определен.

$$\varepsilon_0 = \gamma^{p_-}\frac{1}{\gamma}, \quad \varepsilon_\infty = \gamma^{p_+}\left(1 - \frac{1}{\gamma^k}\right), \quad \varepsilon_1 = \gamma^1\frac{1}{\gamma^k},$$

– основные параметры разрядной сетки

ε_0 – минимальное положительное машинное число (*порог машинного нуля*);

ε_∞ – максимальное положительное машинное число (*порог переполнения*);

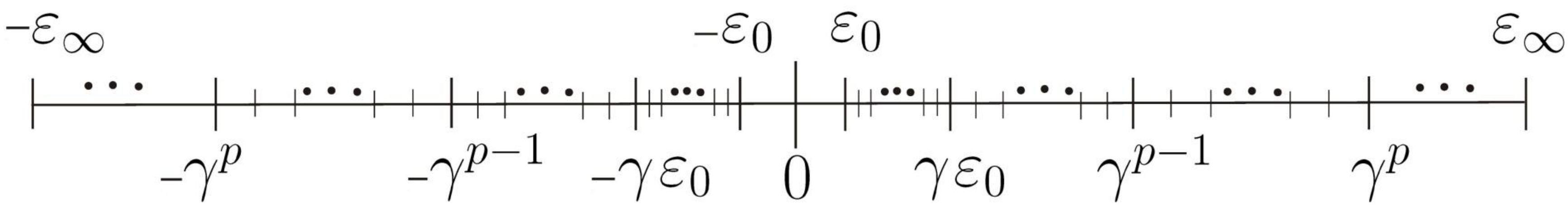
ε_1 – шаг разрядной сетки на интервале от 1 до γ: минимальное из всех машинных чисел z_{com} таких, что

$$(1 + z_{com})_{com} > 1.$$

ε_0 – абсолютная погрешность нуля

если $0 < z < \varepsilon_0$,

то $z_{com} = \varepsilon_0$ или $z_{com} = 0$;

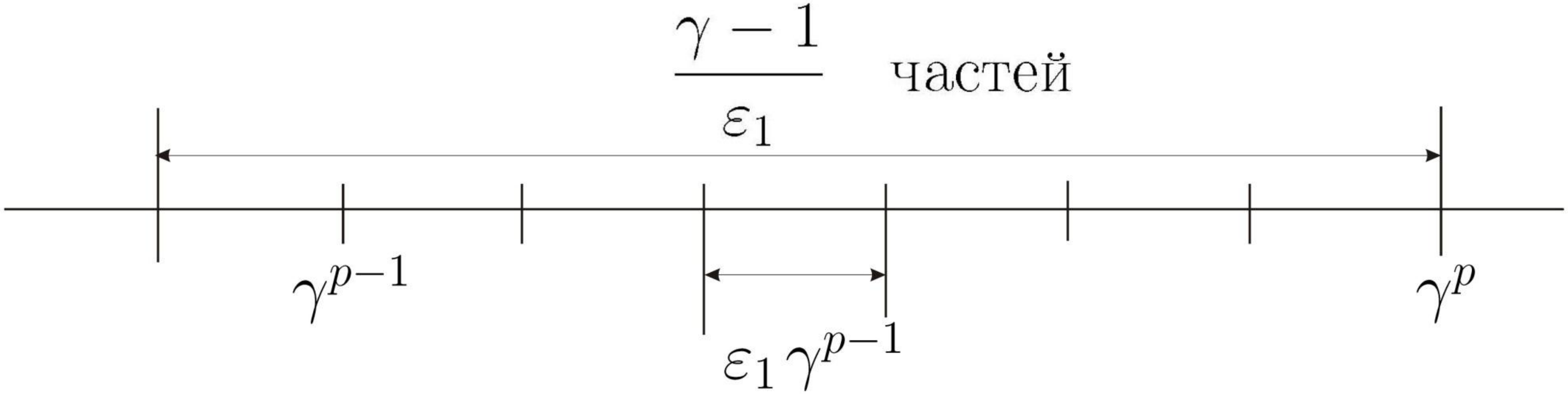


Расположение машинных чисел на числовой прямой.

ε_1 – относительная погрешность единицы

если $0 < z < \varepsilon_1$,

то $(1 + z)_{com} = 1 + \varepsilon_1$ или $(1 + z)_{com} = 1$.



Отрезок числовой прямой $[\gamma^{p-1}, \gamma^p]$.

Ближайшие соседние машинные числа

$z_- < z_{com} < z_+$

Если $|z_{com}| > \varepsilon_0$, то

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \le \frac{|z_+ - z_{com}|}{|z_{com}|} \le \varepsilon_1\,,$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma} \le \frac{|z_- - z_{com}|}{|z_{com}|} \le \varepsilon_1\,.$$

$$|z_{com} - z| \le \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{при} \quad |z| < \varepsilon_0, \\ \varepsilon_1 |z|, & \text{при} \quad \varepsilon_0 \le |z| \le \varepsilon_\infty. \end{cases}$$

Бинарные арифметические операции

$$a \oplus b = (a + b)_{com}, \quad a \ominus b = (a - b)_{com},$$
$$a \otimes b = (a \times b)_{com}, \quad a \oslash b = (a/b)_{com}.$$

Лемма 1 *Если* $v \in \{+, -, \times, :\}$ *– обозначение для одной из бинарных операций,* a, b *– машинные числа, то*

$$(a\ v\ b)_{com} = (a\ v\ b)(1 + \alpha) + \beta\,,$$

где $|\alpha| \le \varepsilon_1$, $|\beta| \le \varepsilon_0$, $\alpha\beta = 0$.

Если модуль результата операции больше чем ε_0, *то машинная погрешность моделируется равенством*

$$(a\ v\ b)_{com} = (a\ v\ b)(1 + \alpha).$$

Следствие.

$$|(a\ v\ b)_{com} - (a\ v\ b)| \le \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{при} \quad |a\ v\ b| < \varepsilon_0, \\ \varepsilon_1 |a\ v\ b|, & \text{при} \quad \varepsilon_0 \le |a\ v\ b| \le \varepsilon_\infty. \end{cases}$$

Метод обратного анализа погрешностей

Например:

$$(a+b)_{com} = a(1+\alpha) + b(1+\alpha).$$

Дж. фон Нейманом и Голдстайном (Goldstane) в 1947 г.

Дж. Х. Уилкинсоном (Wilkinson) в 1957 г.

Ввод вектора.

$$\|x_{com} - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} |(x_i)_{com} - x_i|^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{M} (\varepsilon_1 |x_i| + \varepsilon_0)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\varepsilon_1^2 \sum_{i=1}^{M} |x_i|^2 + M\varepsilon_0^2} \le \varepsilon_1 \|x\| + \varepsilon_0 \sqrt{M}.$$

$$\|x\| \ge \sqrt{M}\varepsilon_0/\varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \|x_{com} - x\| \le 2\varepsilon_1 \|x\| \ .$$

Необходимо $|x_i| \le \varepsilon_\infty$.

Сложение векторов и умножение вектора, матрицы на скаляр.

$$\begin{aligned}
&\|(x \oplus y) - (x + y)\| \le \varepsilon_1 \|x + y\| + \varepsilon_0 \sqrt{M}, \\
&\|(\alpha \otimes x) - (\alpha x)\| \le \varepsilon_1 |\alpha| \, \|x\| + \varepsilon_0 \sqrt{M}, \\
&\|(\alpha \otimes A) - (\alpha A)\| \le \varepsilon_1 |\alpha| \sqrt{N_0} \, \|A\| + \varepsilon_0 \sqrt{NM}.
\end{aligned}$$

Необходимо $(-\varepsilon_\infty, \varepsilon_\infty)$.

Потребуем большего: $\|x + y\| < \varepsilon_\infty$, $\|\alpha x\| < \varepsilon_\infty$.

Если

$$\frac{\sqrt{M}\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \le \|x+y\|, \qquad \frac{\sqrt{M}\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \le |\alpha|\|x\|,$$

$$\frac{\sqrt{NM}\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \le |\alpha|\sqrt{N_0}\,\|A\|,$$

то

$$\begin{aligned}
&\|(x \oplus y) - (x+y)\| \le 2\varepsilon_1\|x+y\|,\\
&\|(\alpha \otimes x) - (\alpha x)\| \le 2\varepsilon_1|\alpha|\,\|x\|,\\
&\|(\alpha \otimes A) - (\alpha A)\| \le \varepsilon_1|\alpha|\sqrt{N_0}\,\|A\|.
\end{aligned}$$

Скалярное произведение.

Лемма 2

$$|(x,y)_{com}-(x,y)| \le \frac{\varepsilon_1 M}{1-\varepsilon_1 M/2}\|x\|\,\|y\| + \frac{\varepsilon_0 M}{1-\varepsilon_1 M/2}.$$

Лемма 3 *Если*

$$\sqrt{2M\varepsilon_0 \;/\; \varepsilon_1} \le \|x\| \le \sqrt{\varepsilon_\infty \;/\; 2},$$
$$\sqrt{2M\varepsilon_0 \;/\; \varepsilon_1} \le \|y\| \le \sqrt{\varepsilon_\infty \;/\; 2},$$

и $M \le \sqrt{1/\varepsilon_1}$, *то*

$$|(x,y)_{com}-(x,y)| < (M+1)\varepsilon_1\|x\|\,\|y\|.$$

Экстремальные ситуации

ПЕРЕПОЛНЕНИЕ и ИСЧЕЗНОВЕНИЕ ПОРЯДКА

Крушение ракеты Ариан 5 Европейского космического агенства, 4 июня 1996 г.

Катастрофическая потеря точности

Потеря верных значащих цифр при получении малых чисел в результате сложения/вычитания больших чисел.

Пример Вычислить e^{-a}, $a > 0$ через ряд Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Пусть $\gamma = 10$, $k = 5$, $x = -5.5$

$$S_{25}(-5.5) = 0.0051040 \not\approx e^{-5.5} = 0.00408677$$

$$\frac{1}{S_{25}(5.5)} = 0.004087 \approx e^{-5.5} = 0.00408677$$

Алгоритмы

Обратная устойчивость

Пусть $f(x)$ – вещественная функция

$\mathsf{alg}(x)$ – результат вычислений значения функции $f(x)$ по некоторому алгоритму.

алгоритм *обратно устойчив* для $f(x)$ если

$$\forall x \quad \exists \triangle x, \quad |\triangle x| \le \epsilon : \qquad \mathsf{alg}(x) = f(x + \triangle x)$$

$\triangle x$ – *обратная ошибка*.
Т.е. алгоритм дает точный результат $f(x + \triangle x)$ для возмущенных начальных данных $(x + \triangle x)$.

Пример

Пусть $f(x)$ дифференцируемая

алгоритм обратно устойчив

$$|\mathsf{alg}(x) - f(x)| = |f(x + \triangle x) - f(x)| \approx$$

$$\approx |\triangle x| \cdot |f'(x)| = \epsilon \cdot \kappa(f).$$

$\kappa(f) = \max|f'(x)|$ – число обусловленности