Виды случайных величин. Задание дискретной случайной величины.

Случайная величина

Уже в первой части приводились события, состоящие в появлении того или иного **числа**. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 есть *возможные значения* этой величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Дискретные и непрерывные случайные величины

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, ..., 100. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (a, b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной еeличины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, $\ldots$, $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т. е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Р е ш е н и е. Напишем возможные значения X: $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0{,}89$.

Напишем искомый закон распределения:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

К о н т р о л ь: $0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}89 = 1$.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $(x_i,\ p_i)$, а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Биномиальное распределение

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (*)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Формула (*) и является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (*) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях; второй член $np^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события $n-1$ раз; ...; последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	...	k	...	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Пример. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p=1/2$, следовательно, вероятность непоявления «герба» $q=1-1/2=1/2$.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(2)=C_2^2p^2=(1/2)^2=0{,}25,$$
$$P_2(1)=C_2^1pq=2\cdot(1/2)\cdot(1/2)=0{,}5,$$
$$P_2(0)=C_2^0q^2=(1/2)^2=0{,}25.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Контроль: $0{,}25+0{,}5+0{,}25=1$.

Распределение Пуассона

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! \qquad (p \leqslant 0,1)$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

З а м е ч а н и е. Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти $P_n(k)$, зная k и λ.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Р е ш е н и е. По условию, $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \lambda^k e^{-\lambda}/k! = e^{-1}/3! = 1/6e \simeq 0,06.$$

Гипегеометрическое распределение

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (*)$$

Формула (*) определяет распределение вероятностей, которое называют *гипергеометрическим*.

Учитывая, что m — случайная величина, заключаем, что гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: N, M, n. Иногда в качестве параметров этого распределения рассматривают N, n и $p=M/N$, где p — вероятность того, что первое извлеченное изделие стандартное.

Заметим, что если n значительно меньше N (практически если $n < 0{,}1N$), то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону.

Пример. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Решение. По условию, $N=50$, $M=20$, $n=5$, $m=3$. Искомая вероятность

$$P(X=3)=C_{20}^3 C_{30}^2 / C_{50}^5 = 0{,}234.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Как уже известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют *числовыми характеристиками случайной величины*. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожидание.

Математическое ожидание, как будет показано далее, приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго. Хотя математическое ожидание дает о случайной величине значительно меньше сведений, чем закон ее распределения, но для решения задач, подобных приведенной и многих других, знание математического ожидания оказывается достаточным.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть *неслучайная* (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно. В дальнейшем будет показано, что математическое ожидание непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X)=3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}3=3{,}9.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

Решение. Случайная величина X — число появлений события A в одном испытании — может принимать только два значения: $x_1=1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2=0$ (событие A не наступило) с вероятностью $q=1-p$. Искомое математическое ожидание

$$M(X)=1\cdot p+0\cdot q=p.$$

Итак, *математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.*

Вероятностный смысл математического ожидания

Пусть произведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, ..., m_k раз значение x_k, причем $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$. Тогда сумма всех значений, принятых X, равна

$$x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k.$$

Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний:

$$\overline{X}=(x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k)/n,$$

или

$$\overline{X}=x_1(m_1/n)+x_2(m_2/n)+\ldots+x_k(m_k/n). \qquad (*)$$

Заметив, что отношение m_1/n — относительная частота W_1 значения x_1, m_2/n — относительная частота W_2 значения x_2 и т. д., запишем соотношение (*) так:

$$\overline{X}=x_1W_1+x_2W_2+\ldots+x_kW_k. \qquad (**)$$

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероятности появления события

$$W_1 \simeq p_1, \; W_2 \simeq p_2, \; \ldots, \; W_k \simeq p_k.$$

Заменив в соотношении (**) относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

$$\overline{X} \simeq x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k.$$

Правая часть этого приближенного равенства есть $M(X)$.

$$\overline{X} \simeq M(X).$$

Вероятностный смысл полученного результата таков: *математическое ожидание приближенно равно* (тем точнее, чем больше число испытаний) *среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.*

Замечание . Происхождение термина «математическое ожидание» связано с начальным периодом возникновения теории вероятностей (XVI—XVII вв.), когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша, или, иными словами, математическое ожидание выигрыша.

Свойства математического ожидания

Свойство 1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:*

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y заданы следующнми законамн распределения:

X	5	2	4	Y	7	9
p	0,6	0,1	0,3	p	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величнны XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных велнчин:

$$M(X) = 5\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 = 4{,}4;$$
$$M(Y) = 7\cdot 0{,}8 + 9\cdot 0{,}9 = 7{,}4.$$

Случайные величины X и Y независимые, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)\,M(Y) = 4{,}4\cdot 7{,}4 = 32{,}56.$$

Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Следствие. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Например, для трех слагаемых величин имеем

$$M(X+Y+Z)=M[(X+Y)+Z]=$$
$$=M(X+Y)+M(Z)=M(X)+M(Y)+M(Z).$$

Пример 2. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1=0{,}4$; $p_2=0{,}3$ и $p_3=0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина X_1, которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью $p_1=0{,}4$ и 0 (промах) с вероятностью $q=1-0{,}4=0{,}6$.

Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания (см. § 2, пример 2), т. е. $M(X_1)=0{,}4$. Аналогично найдем математические ожидания числа попаданий при втором и третьем выстрелах: $M(X_2)=0{,}3$, $M(X_3)=0{,}6$.

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов:

$$X=X_1+X_2+X_3.$$

Искомое математическое ожидание находим по теореме о математическом ожидании суммы:

$$M(X)=M(X_1+X_2+X_3)=M(X_1)+M(X_2)+M(X_3)=$$
$$=0{,}4+0{,}3+0{,}6=1{,}3 \text{ (попаданий).}$$

Пример 3. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй — через Y. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6, причем вероятность каждого из этих значений равна 1/6.

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X)=1\cdot(1/6)+2\cdot(1/6)+3(1/6)+4\cdot(1/6)+5\cdot(1/6)+6\cdot(1/6)=7/2.$$

Очевидно, что и $M(Y)=7/2$.

Искомое математическое ожидание

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=7/2+7/2=7.$$

Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаиниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Чему равно среднее число появлений события A в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:*

$$M(X) = np.$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: математическое ожидание биномиального распределения с параметрами n и p равно произведению np.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p=0,6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от исходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события независимы и, следовательно, искомое математическое ожидание

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ (попаданий).}$$

Дисперсия дискретной случайной величины

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Пример. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Напишем закон распределения квадрата отклонення:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

По определению,

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Вычисление, основанное на определении дисперсии, оказалось относнтельно громоздким. Далее будет указана формула, которая приводит к цели значительно быстрее.

Формула для вычисления дисперсии

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
p	0,1	0,6	0,3

Найдем математические ожидания $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомая дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Замечание. Казалось бы, если X и Y имеют одинаковые возможные значения и одно и то же математнческое ожидание, то и дисперсин этих величин равны (ведь возможные значеиия обеих величин одинаково рассеяны вокруг своих математических ожиданий!). Однако в общем случае это не так. Дело в том, что одинаковые возможные значения рассматриваемых величин имеют, вообще говоря, различные вероятности, *а величина дисперсии определяется не только самими возможными значениями, но и их вероятностями*. Например, если вероятностн «далеких» от математического ожидания возможных значений X больше, чем вероятности этих же значений Y, н вероятности «близких» значений X меньше, чем вероятности тех же значений Y, то, очевидно, дисперсия X больше дисперсии Y.

Приведем иллюстрирующий прнмер.

Пример 2. Сравнить дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

X	-1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42

Y	-1	1	2	3
p	0,19	0,51	0,25	0,05

Решение. Легко убедиться, что

$$M(X)=M(Y)=0{,}97; \quad D(X)\simeq 3{,}69, \ D(Y)\simeq 1{,}21.$$

Таким образом, возможные значения н математические ожидания X и Y одинаковы, а дисперсин различны, причем $D(X)>D(Y)$. Этот результат можно было предвидеть без вычислений, глядя лишь на законы распределенний.

Свойства дисперсии

Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю:*

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

Следствие 2. *Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:*

$$D(C + X) = D(X).$$

Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна. Чему равна дисперсия числа появлений события в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность*

p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq.$$

Замечание. Так как величина X распределена по биномиальному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: *дисперсия биномиального распределения с параметрами n и p равна произведению npq.*

Пример. Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в этих испытаниях.

Решение. По условию, $n=10$, $p=0{,}6$. Очевидно, вероятность непоявления события

$$q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Искомая дисперсия

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4.$$

Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X)=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}5=6{,}4.$$

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=2^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}4+10^2\cdot 0{,}5=54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=54-6{,}4^2=13{,}04.$$

Искомое среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\simeq 3{,}61.$$

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Как уже известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Казалось бы, поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли — простейшим.

Сущность теоремы Чебышева

Итак, *среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин* (дисперсии которых равномерно ограничены) *утрачивает характер случайной величины*. Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются.

Теорема Чебышева справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин; она

является ярким примером, подтверждающим справедливость учения диалектического материализма о связи между случайностью и необходимостью.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчисляемое сотнями.

В качестве другого примера можно указать на определение качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае число наудачу отобранных зерен мало сравнительно со всей массой зерна, *но само по себе оно* достаточно велико.

Уже из приведенных примеров можно заключить, что *для практики* теорема Чебышева имеет неоценимое значение.

Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Якобом Бернулли (опубликована в 1713 г.), которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Бернулли было сложным; простое доказательство дано П. Л. Чебышевым в 1846 г.

Итак, теорема Бернулли утверждает, что при $n \to \infty$ относительная частота стремится по *вероятности* к p. Коротко теорему Бернулли записывают так:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{вер}} p.$$

Как видим, теорема Бернулли объясняет, почему относительиая частота при достаточио большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистническое определение вероятности

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют *непрерывной*, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения

Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* $[0, 1]$:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Свойство 2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т. е.*

$$F(x_2) \geqslant F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1.$$

Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале* (a, b), *равна приращению функции распределения на этом интервале:*

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1; \\ x/4 + 1/4 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

С л е д с т в и е 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.*

С в о й с т в о 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* (a, b), *то*: 1) $F(x) = 0$ *при* $x \leqslant a$; 2) $F(x) = 1$ *при* $x \geqslant b$.

С л е д с т в и е. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси* x, *то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

График функции распределения

Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.

График расположен в полосе, ограниченной прямыми $y=0$, $y=1$ (первое свойство).

При возрастании x в интервале (a, b), в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (второе свойство).

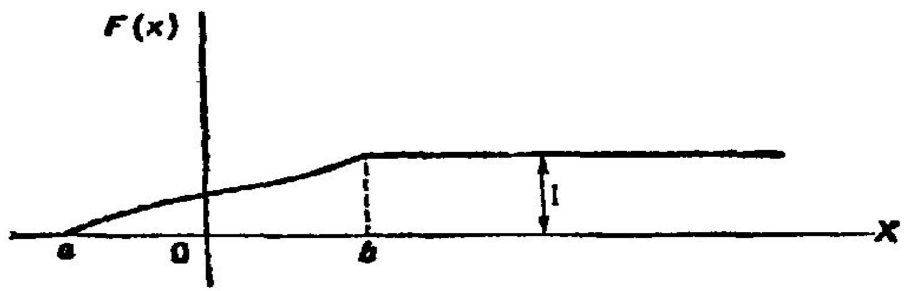


Рис. 2

При $x \leqslant a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geqslant b$ ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис. 2.

Замечание. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Убедимся в этом на примере.

Пример. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

X	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если $x \leqslant 1$, то $F(x)=0$ (третье свойство).

Если $1 < x \leqslant 4$, то $F(x) = 0{,}3$. Действительно, X может принять значение 1 с вероятностью 0,3.

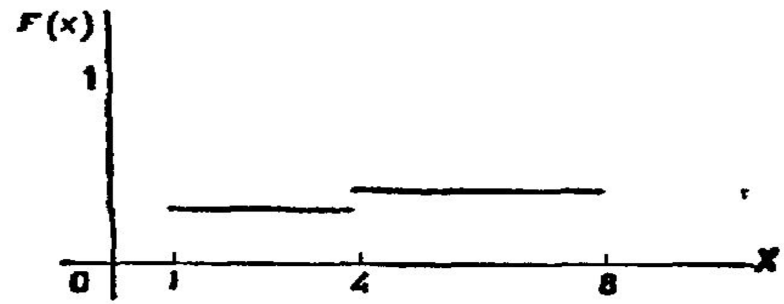


Рис. 3

Если $4 < x \leqslant 8$, то $F(x) = 0{,}4$. Действительно, если x_1 удовлетворяет неравенству $4 < x_1 \leqslant 8$, то $F(x_1)$ равно вероятности события $X < x_1$, которое может быть осуществлено, когда X примет значение 1 (вероятность этого события равна 0,3) или значение 4 (вероятность этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $X < x_1$ равна сумме вероятностей $0{,}3+0{,}1=0{,}4$.

Если $x > 8$, то $F(x)=1$. Действительно, событие $X \leqslant 8$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 0{,}3 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение плотности распределения

Выше непрерывная случайная величина задавалась с помощью функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ — первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу. Вычисление основано на следующей теореме.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометрически полученный результат можно истолковать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Замечание. В частности, если $f(x)$ — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 2x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Решение. Искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0{,}5}^{1} x\,dx = x^2\Big|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Закон равномерного распределения вероятностей

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также *законами распределений*. Часто встречаются, например, законы равномерного, нормального и показательного распределений.

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Приведем пример равномерно распределенной непрерывной случайной величины.

Пример. Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями. Таким образом, X имеет равномерное распределение.

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$, считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интервале (a, b), на котором функция $f(x)$ сохраняет постоянные значения:

По условию, X не принимает значений вне интервала (a, b), поэтому $f(x)=0$ при $x<a$ и $x>b$.

Найдем постоянную C. Так как все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то должно выполняться соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx=1, \quad \text{или} \quad \int_a^b C\,dx=1.$$

Отсюда

$$C=1/\int_a^b dx=1/(b-a).$$

Итак, искомая плотность вероятности равномерного распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leqslant a, \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a<x\leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 6, а график функции распределения — на рис. 4.

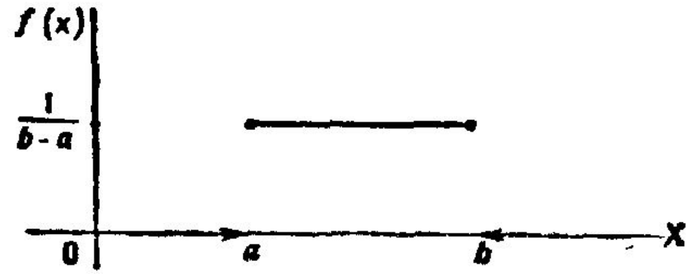


Рис. 6

Замечание. Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале $(0, 1)$, а через r — ее возможные значения. Вероятность попадания величины R (в результате испытания) в интервал (c, d), принадлежащий интервалу $(0, 1)$, равна его длине:

$$P(c < R < d) = d - c.$$

Действительно, плотность рассматриваемого равномерного распределения

$$f(r) = 1/(1-0) = 1.$$

Следовательно, вероятность попадания случайной величины R в интервал (c, d)

$$P(c < R < d) = \int_c^d f(r)\,dr = \int_c^d 1 \cdot dr = d - c.$$

Далее случайная величина R используется неоднократно

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Распространим определения числовых характеристик дискретных величин на величины непрерывные. Начнем с математического ожидания.

Пусть непрерывная случайиая величина X задана плотностью распределения $f(x)$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx.$$

З а м е ч а н и е 2. Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2, \tag{**}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leq 0, \\ x & \text{при} \quad 0<x\leq 1, \\ 1 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем плотность распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\leq 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<1. \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле (*):

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = x^2/2\Big|_0^1 = 1/2.$$

Найдем дисперсию по формуле (**):

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-[1/2]^2 = x^3/3\Big|_0^1 - 1/4 = 1/12.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(a,\ b)$.

Решение. Найдем математическое ожидание X по формуле (*), учитывая, что плотность равномерного распределения $f(x)=1/(b-a)$

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$M(X)=(a+b)/2.$$

Найдем дисперсию X по формуле (**):

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\left[\frac{a+b}{2}\right]^2.$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$D(X)=(b-a)^2/12.$$

Замечание 3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины R, распределенной равномерно в интервале $(0, 1)$, т. е. если $a=0$, $b=1$, как следует из примера 2, соответственно равны $M(R)=1/2$, $D(R)=1/12$. Этот же результат мы получили в примере 1 по заданной функции распределения случайной величины R.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)\,dx;$$

если возможные значения принадлежат всей оси x, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} [x-M(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и для величины дискретной, равенством

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Замечание 1. Можно доказать, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Нормальное распределение

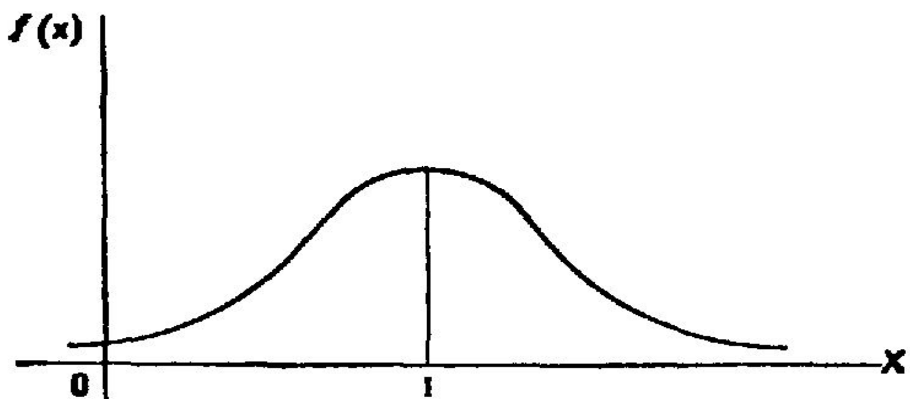
Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Мы видим, что *нормальное распределение определяется двумя параметрами*: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Покажем, что вероятностный смысл этих параметров таков: a есть математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Нормальная кривая

График плотности нормального распределения называют *нормальной кривой (кривой Гаусса)*.



Понятие о теореме Ляпуиова. Формулировка центральной предельной теоремы

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (центральная предельная теорема): *если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Уже известно, что если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), такова:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Пользуясь функцией Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\,dz,$$

окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-z^2/2}\,dz$ не выражается через элементарные функции.

Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс

Эмпирическим называют распределение относительных частот. Эмпирические распределения изучает математическая статистика.

Теоретическим называют распределение вероятностей. Теоретические распределения изучает теория вероятностей. В этом параграфе рассматриваются теоретические распределения.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю. Поэтому если для изучаемого распределения асимметрия и эксцесс имеют небольшие значения, то можно предположить близость этого распределения к нормальному. Наоборот, большие значения асимметрии и эксцесса указывают на значительное отклонение от нормального.

Функция одного случайного аргумента и ее распределение

Предварительно заметим, что далее, вместо того чтобы говорить «закон распределения вероятностей», будем часто говорить кратко — «распределение».

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X:

$$Y = \varphi(X).$$

Далее показано, как найти распределение функции по известному распределению дискретного и непрерывного аргумента.

1. Пусть аргумент X — дискретная случайная величина.

а) Если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y, то вероятности соответствующих значений X и Y между собой равны.

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	2	3
p	0,6	0,4

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Решение. Найдем возможные значения Y: $y_1 = 2^2 = 4$; $y_2 = 3^2 = 9$. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
p	0,6	0,4

б) Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана распределением

X	-2	2	3
p	$0,4$	$0,5$	$0,1$

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Решение. Вероятность возможного значения $y_1 = 4$ равна сумме вероятностей несовместных событий $X = -2$, $X = 2$, т. е. $0,4 + 0,5 = 0,9$. Вероятность возможного значения $y_2 = 9$ равна 0,1. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
p	$0,9$	$0,1$

2. Пусть аргумент X — непрерывная случайная величина. Как найти распределение функции $Y=\varphi(X)$, зная плотность распределения случайного аргумента X? Доказано: если $y=\varphi(x)$ — дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится с помощью равенства

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|.$$

Пример 3. Случайная величина X распределена нормальио, причем ее математическое ожидание $a=0$. Найти распределение функции $Y=X^3$.

Решение. Так как фуикция $y=x^3$ дифференцируема и строго возрастает, то можно применить формулу

$$g(y)=f[\psi(y)]\,|\psi'(y)|. \qquad (*)$$

Найдем функцию, обратную функции $y=x^3$:

$$\psi(y)=x=y^{1/3}.$$

Найдем $f[\psi(y)]$. По условию,

Найдем $f[\psi(y)]$. По условию,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2\sigma^2},$$

поэтому

$$f[\psi(y)]=f\left[y^{1/3}\right]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}. \qquad (**)$$

Найдем производную обратной функции по y:

$$\psi'(y)=\left(y^{1/3}\right)'=\frac{1}{3y^{2/3}}. \qquad (***)$$

Найдем искомую плотность распределения, для чего подставим (**) и (***) и (*):

$$g(y)=\frac{1}{3\sigma y^{2/3}\sqrt{2\pi}}\,e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}.$$

Замечание. Пользуясь формулой (*), можно доказать, что линейная функция $Y = AX + B$ нормально распределенного аргумента X также распределена нормально, причем для того чтобы найти математическое ожидание Y, надо в выражение функции подставить вместо аргумента X его математическое ожидание a:

$$M(Y) = Aa + B;$$

для того чтобы найти среднее квадратическое отклонение Y, надо среднее квадратическое отклонение аргумента X умножить на модуль коэффициента при X:

$$\sigma(Y) = |A|\,\sigma(X).$$

Пример 4. Найти плотность распределения линейной функции $Y = 3X + 1$, если аргумент распределен нормально, причем математическое ожидание X равно 2 и среднее квадратическое отклонение равно 0,5.

Решение. Найдем математическое ожидание Y:

$$M(Y) = 3 \cdot 2 + 1 = 7.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение Y:

$$\sigma(Y) = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$$

Искомая плотность распределения имеет вид

$$g(y) = \frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}}\, e^{-(y-7)^2/[2\cdot(1{,}5)^2]}.$$

Распределение «хи квадрат»

Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение — единице. Тогда сумма квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону χ^2 («хи квадрат») с $k = n$ степенями свободы; если же эти величины связаны одним линейным соотношением, например $\sum X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $k = n - 1$.

Плотность этого распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)}\, e^{-x/2}\, x^{(k/2)-1} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ — гамма-функция; в частности,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Отсюда видно, что распределение «хи квадрат» определяется одним параметром — числом степеней свободы k.

С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

Распределение Стьюдента

Пусть Z — нормальная случайная величина, причем $M(Z)=0$, $\sigma(Z)=1$, а V — независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют t-распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета), с k степенями свободы.

Итак, отношение нормированной нормальной величины к квадратному корню из независимой случайной величины, распределенной по закону «хи квадрат» с k степенями свободы, деленной на k, распределено по закону Стьюдента с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XVI, § 16).

Распределение F Фишера — Снедекора

Если U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F=\frac{U/k_1}{V/k_2} \qquad (*)$$

имеет распределение, которое называют распределением F Фишера — Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2 (иногда его обозначают через V^2).

Плотность этого распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ C_0\dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} & \text{при } x>0, \end{cases}$$

где

$$C_0=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}\,k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\,\Gamma(k_2/2)}.$$