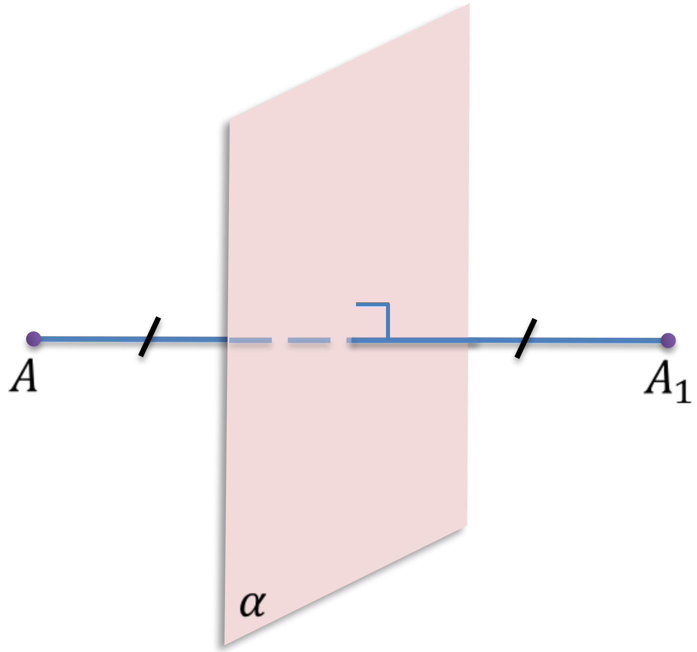
Зеркальная симметрия

Сегодня на уроке:

- ✔ Зеркальная симметрия или симметрия относительно плоскости
- ✔ Будет ли зеркальная симметрия движением пространства?

Симметрия относительно плоскости

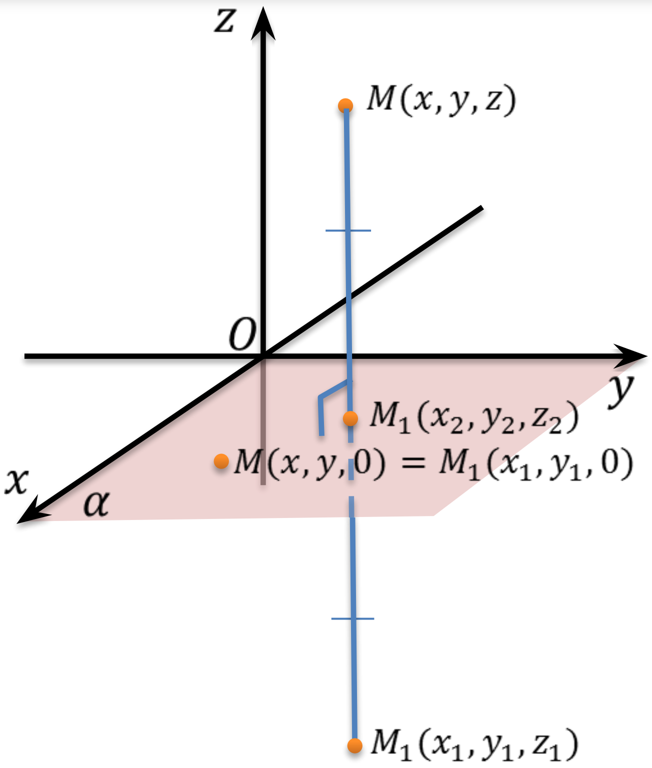


Точки A и A_1 называются ***симметричными относительно плоскости*** $\boldsymbol{\alpha}$, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку.

Плоскость α называется ***плоскостью симметрии***.

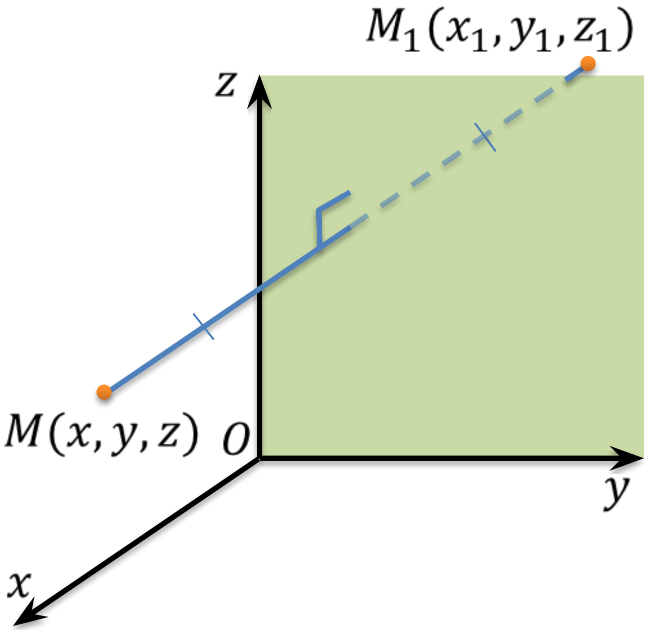
Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.

Зеркальной симметрией или ***симметрией относительно плоскости α*** называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей относительно плоскости α точку M_1.



$$z_2 = \frac{z + z_1}{2} = 0 \Rightarrow z_1 = -z$$

$$MM_1 \parallel Oz \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y. \end{cases}$$

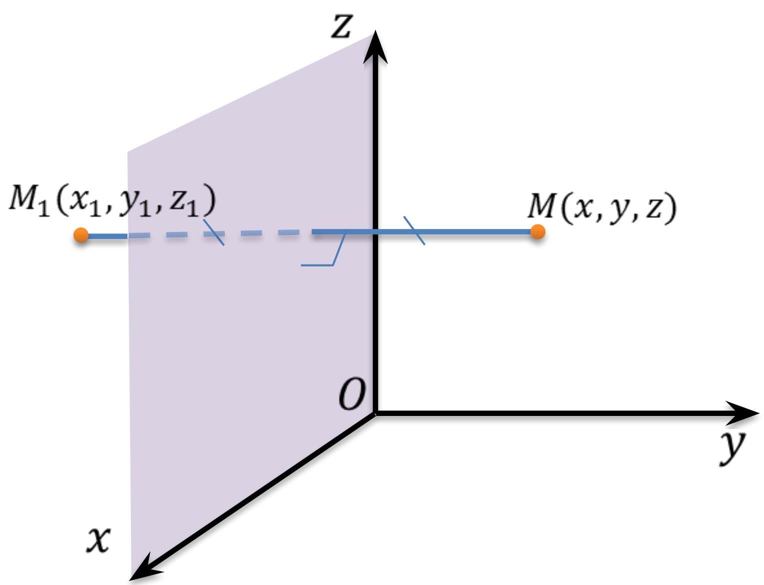


Если плоскость симметрии проходит через плоскость Oyz:

$$x_1 = -x$$

$$y_1 = y$$

$$z_1 = z$$



Если плоскость симметрии проходит через плоскость Oyz:

$$x_1 = -x$$

$$y_1 = y$$

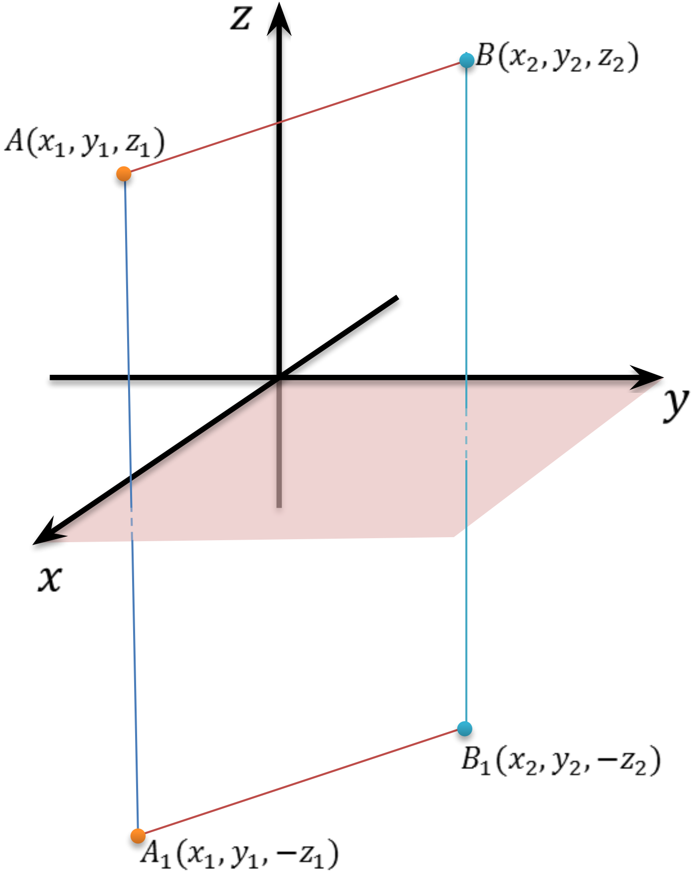
$$z_1 = z$$

Если плоскость симметрии проходит через плоскость Oxz:

$$x_1 = x$$

$$y_1 = -y$$

$$z_1 = z$$



$$M_1N_1 = M_1O + ON_1$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 - (-z_1))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\Rightarrow MN = M_1N_1$$

Расстояние между точками при зеркальной симметрии в пространстве сохраняется, значит, зеркальная симметрия в пространстве также ***является движением***, но уже не плоскости, а ***пространства***.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно плоскости Oxy, то справедливы формулы: $x_1 = x,\ y_1 = y,\ z_1 = -z$.

Точка $A(0, 1, 2) \xrightarrow{\text{относительно } Oxy} A_1(0, 1, -2)$.

Точка $B(3, -1, 4) \xrightarrow{\text{относительно } Oxy} B_1(3, -1, -4)$.

Точка $C(1, 0, -2) \xrightarrow{\text{относительно } Oxy} C_1(1, 0, 2)$.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при зеркальной симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно плоскости Oxz, то справедливы формулы: $x_1 = x,\ \ y_1 = -y,\ \ z_1 = z$.

Точка $A(0, 1, 2) \xrightarrow{\text{относительно } Oxz} A_1(0, -1, 2)$.

Точка $B(3, -1, 4) \xrightarrow{\text{относительно } Oxz} B_1(3, 1, 4)$.

Точка $C(1, 0, -2) \xrightarrow{\text{относительно } Oxz} C_1(1, 0, -2)$.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при зеркальной симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно оси Oyz, то справедливы формулы: $x_1 = -x,\ \ y_1 = y,\ \ z_1 = z$.

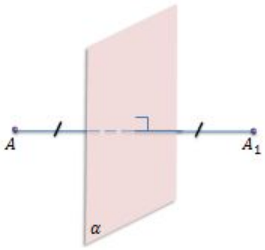
Точка $A(0, 1, 2) \xrightarrow{\text{относительно } Oyz} A_1(0, 1, 2)$.

Точка $B(3, -1, 4) \xrightarrow{\text{относительно } Oyz} B_1(-3, -1, 4)$.

Точка $C(1, 0, -2) \xrightarrow{\text{относительно } Oyz} C_1(-1, 0, -2)$.

Зеркальная симметрия

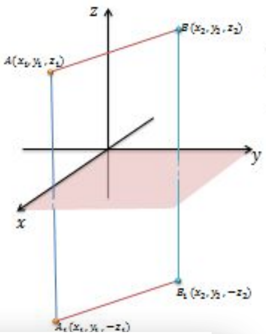
Симметрия относительно плоскости



Точки A и A_1 называются *симметричными относительно плоскости* α, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку.

Плоскость α называется *плоскостью симметрии*.

Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 - (-z_1))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = A_1B_1$$

Расстояние между точками при зеркальной симметрии в пространстве сохраняется, значит, зеркальная симметрия в пространстве также *является движением*, но уже не плоскости, а *пространства*.

Задача. Найти координаты точек, в которые переходят точки $A(0, 1, 2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(1, 0, -2)$ при осевой симметрии относительно координатных осей.

Решение:

Если точка $M(x, y, z)$ симметрична точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно плоскости Oxz, то справедливы формулы: $x_1 = x$, $y_1 = -y$, $z_1 = z$.

Точка $A(0, 1, 2) \xrightarrow{\text{относительно } Oxz} A_1(0, -1, 2)$.

Точка $B(3, -1, 4) \xrightarrow{\text{относительно } Oxz} B_1(3, 1, 4)$.

Точка $C(1, 0, -2) \xrightarrow{\text{относительно } Oxz} C_1(1, 0, -2)$.