

СЛОЖЕНИЕ И
ВЫЧИТАНИЕ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
ДРОБЕЙ
С РАЗНЫМИ
ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

АЛГОРИТМ СЛОЖЕНИЯ (ВЫЧИТАНИЯ) АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

1. Привести все дроби к общему знаменателю; если они с самого начала имели одинаковые знаменатели, то этот шаг алгоритма опускают.
2. Выполнить сложение (вычитание) полученных дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 1: Выполнить действия: 1) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3}$ 2) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y}$

Решение:
$$\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3} = \frac{3ab}{12b^3} + \frac{2a^2}{12b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3};$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y} &= \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - xy) - (x^2 + xy)}{x^2 - y^2} = \\ &= \frac{x^2 - xy - x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{a}{4b^2} \text{ и } \frac{a^2}{6b^3}$$

$$12b^3 \quad \begin{array}{l} \boxtimes 4b^2 \\ \boxtimes 6b^3 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+y} \text{ и } \frac{x}{x-y}$$

$$(x+y)(x-y) \quad \begin{array}{l} \boxtimes x+y \\ \boxtimes x-y \end{array}$$

*Найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов;
 Определить для каждого несколько раз встречающегося буквенного множителя наибольший показатель степени;
 Собрать все в одно произведение.*

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ОБЩЕГО ЗНАМЕНАТЕЛЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

1. Разложить все знаменатели на множители.
2. Найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов, имеющих в разложениях на множители, составленных на первом шаге.
3. Составить произведение, включив в него в качестве множителей все буквенные множители разложений, полученных на первом шаге алгоритма. Если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то его следует взять с показателем степени, равным наибольшему из имеющих.
4. Приписать к произведению, полученному на третьем шаге, числовой коэффициент, найденный на втором шаге; в итоге получится общий знаменатель.

Замечание:

$$\frac{a}{4b^2} \text{ и } \frac{a^2}{6b^3}$$

$$12b^3 \quad 24b^3 \quad 48a^2b^4$$

Общий знаменатель - Наименьший общий знаменатель

$$\frac{a}{4b^2} \text{ и } \frac{a^2}{6b^3}$$

$$12b^3 : 4b^2 = 3b \qquad 2 = 12b^3 : 6b^3$$

$$\frac{a^{3b}}{4b^2} + \frac{a^{2 \cdot 2}}{6b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}$$

АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

1. Разложить все знаменатели на множители.
2. Из первого знаменателя выписать произведение всех его множителей, из остальных знаменателей приписать к этому произведению недостающие множители. Полученное произведение и будет общим (новым) знаменателем.
3. Найти дополнительные множители для каждой из дробей: это будут произведения тех множителей, которые имеются в новом знаменателе, но которых нет в старом знаменателе.
4. Найти для каждой дроби новый числитель: это будет произведение старого числителя и дополнительного множителя.
5. Записать каждую дробь с новым числителем и новым (общим) знаменателем.

Пример 2: Упростить выражение:

$$\frac{3a}{4a^2 - 1} - \frac{a + 1}{2a^2 + a}$$

Решение:

Первый этап:

$$4a^2 - 1 = \underline{(2a - 1)(2a + 1)},$$

$$2a^2 + a = \underline{a(2a + 1)}.$$

$$a(2a - 1)(2a + 1)$$

<i>Знаменатели</i>	<i>Общий знаменатель</i>	<i>Дополнительные множители</i>
$(2a - 1)(2a + 1)$ $a(2a + 1)$	$a(2a - 1)(2a + 1)$	a $(2a - 1)$

Второй этап:

$$\begin{aligned} \frac{3a}{4a^2 - 1} - \frac{a + 1}{2a^2 + a} &= \frac{3a \overset{a}{\cancel{a}}}{(2a - 1)(2a + 1)} - \frac{a + 1 \overset{2a-1}{\cancel{a(2a+1)}}}{a(2a + 1)} = \frac{3a^2 - (a + 1)(2a - 1)}{a(2a - 1)(2a + 1)} = \\ &= \frac{3a^2 - (2a^2 - a + 2a - 1)}{a(2a - 1)(2a + 1)} = \frac{3a^2 - 2a^2 + a - 2a + 1}{a(2a - 1)(2a + 1)} = \frac{a^2 - a + 1}{a(2a - 1)(2a + 1)}. \end{aligned}$$

Пример 3: Упростить выражение:

$$\frac{b}{2a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2} - \frac{1}{3ab^2 - 3a^3} + \frac{b}{6a^4 - 6a^3b}.$$

Решение:

Первый этап:

$$2a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 = 2a^2(a^2 + 2ab + b^2) = \underline{2a^2(a+b)^2};$$

$$3ab^2 - 3a^3 = 3a(b^2 - a^2) = \underline{3a(b-a)(b+a)};$$

$$6a^4 - 6a^3b = 6a^3(a-b).$$

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$2a^2(a+b)^2$	$6a^3(a-b)(a+b)^2$	$3a(a-b)$
$3a(b-a)(b+a)$		$\ominus 2a^2(a+b)$
$6a^3(a-b)$		$(a+b)^2$

Второй этап:

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2} - \frac{1}{3ab^2 - 3a^3} + \frac{b}{6a^4 - 6a^3b} = \\ & = \frac{\frac{3a(a-b)}{b}}{2a^2(a+b)^2} + \frac{1 \frac{2a^2(a+b)}{1}}{3a(a-b)(a+b)} + \frac{\frac{(a+b)^2}{b}}{6a^3(a-b)} = \\ & = \frac{3ab(a-b) + 2a^2(a+b) + b(a^2 + 2ab + b^2)}{6a^3(a-b)(a+b)^2} = \\ & = \frac{3a^2b - 3ab^2 + 2a^3 + 2a^2b + a^2b + 2ab^2 + b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2} = \\ & = \frac{2a^3 + 6a^2b - ab^2 + b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2}. \end{aligned}$$

$a \neq 0, a \neq b, a \neq -b$ - в этих случаях знаменатели обращаются в нуль