Теоретические основы информатики
Лекция 2 Системы счисления

Доцент кафедры «Информационные системы», к. т.н.
Тронин Вадим Георгиевич

2. Системы счисления

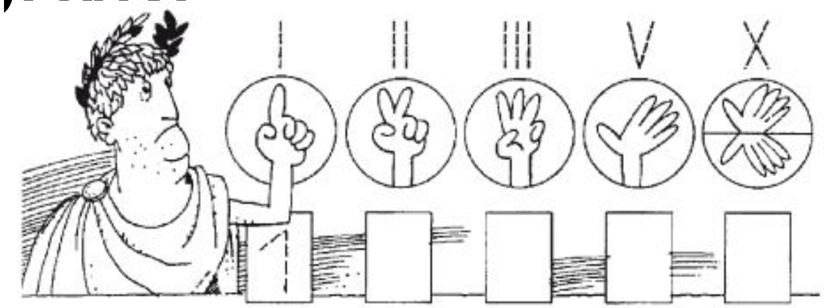
- 2.1. Основы систем счисления.
- 2.2. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и десятичная системы счисления.
- 2.3. Понятие об алгоритме преобразования информации из двоичной в десятичную системы счисления и обратно.
- 2.4. Частные случаи преобразования информации из двоичной системы счисления в восьмеричную, шестнадцатеричную и обратно. Основные процессы преобразования информации.

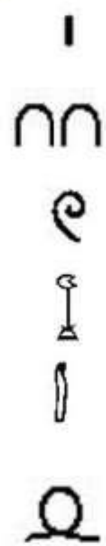
2.1. Основы систем счисления.
2.1.1. Определения

- **Система счисления** — это совокупность приемов и правил, по которым числа записываются и читаются.
- **Цифра** – знак, предназначенный для записи чисел.
- Существуют:
  - **Непозиционные системы счисления** - вес цифры (т. е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа. В римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен просто десяти.
  - **Позиционные системы счисления** - вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. В числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая — 7 единиц, а третья — 7 десятых долей единицы. Сама же запись числа 757,7 означает сокращенную запись выражения $700+50+7+0,7=7\cdot 10^2+5\cdot 10^1+7\cdot 10^0+7\cdot 10^{-1}= 757,7$.

2.1. Основы систем счисления. Непозиционные системы ения

Единицы	Десятки	Сотни	Тысячи
1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	





1. Палочки

10. Путы

100. Мерная веревка

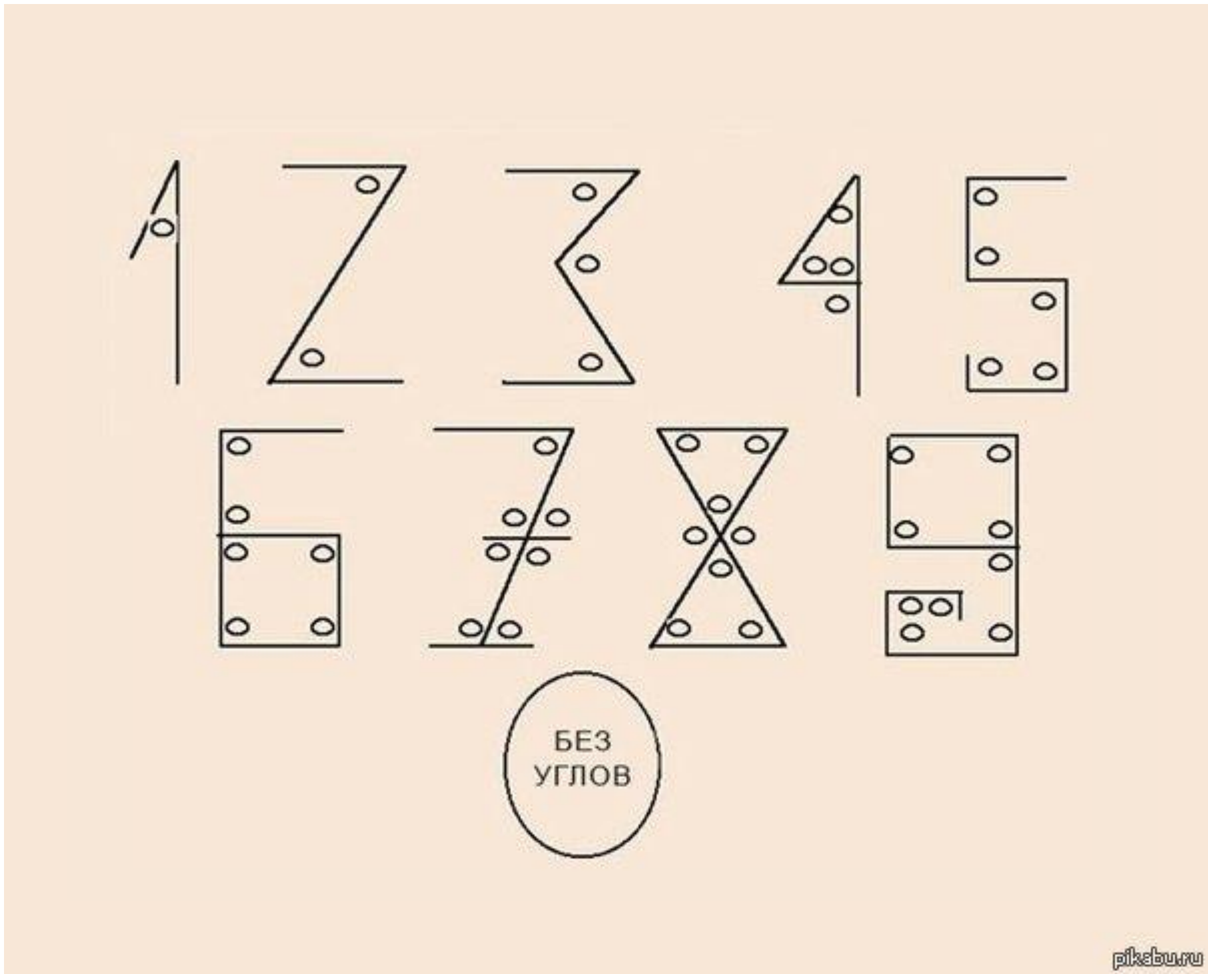
1000. Цветок лотоса

100 000. Головастик.

10 000 000. Символ Амона Ра, бога Солнца.

2.1. Основы систем счисления. Славянская система счисления

2.1. Основы систем счисления. Как появились цифры?



Как появились цифры?

- **Арабские цифры возникли в Индии не позднее V века**. Тогда же было открыто и формализовано понятие нуля (*шунья*), которое позволило перейти к позиционной записи чисел.
- Арабский мир познакомил с индийскими цифрами средневековый математик Абу Джафар Мухаммад ибн Муса **аль-Хорезми** (783-850 гг.), один из его научных трудов– «**Книга об индийском счете**».

- Благодаря тесным связям христианской Барселоны и мусульманской Кордовы, Сильвестр II (**папа римский** с 999 по 1003 гг.) имел возможность доступа к научной информации. Одним из первых среди европейцев познакомился с арабскими цифрами, понял удобство их употребления по сравнению с римскими цифрами и начал пропагандировать их внедрение в

Как появились цифры?

- Названия цифр на санскрите (Сев. Индия)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
शून्य	एक	द्वि	त्रि	चतुर्	पञ्च	षष्	सप्त	अष्ट	नव	दश
śūnya	eka	dvi	tri	catur	pañca	ṣaṣ	sapta	aṣṭa	nava	daśa

2.1. Основы систем счисления. 2.1.2. Позиционные системы счисления

- **Основание позиционной системы счисления** — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления.
- За основание системы можно принять любое натуральное число: два, три, четыре и т.д.
- Множество позиционных систем:
двоичная, троичная, четверичная и т.д.
- Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием q означает сокращенную запись выражения
- $a_{n-1}\, q^{n-1} + a_{n-2}\, q^{n-2} + \ldots + a_1\, q^1 + a_0\, q^0 + a_{-1}\, q^{-1} + \ldots + a_{-m}\, q^{-m}$,
- где a_i —цифры системы счисления; n и m — число целых и дробных разрядов, соответственно.

Разряды 3 2 1 0 -1
Число **1 0 1 1, 1**$_2$ $= 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1}$;

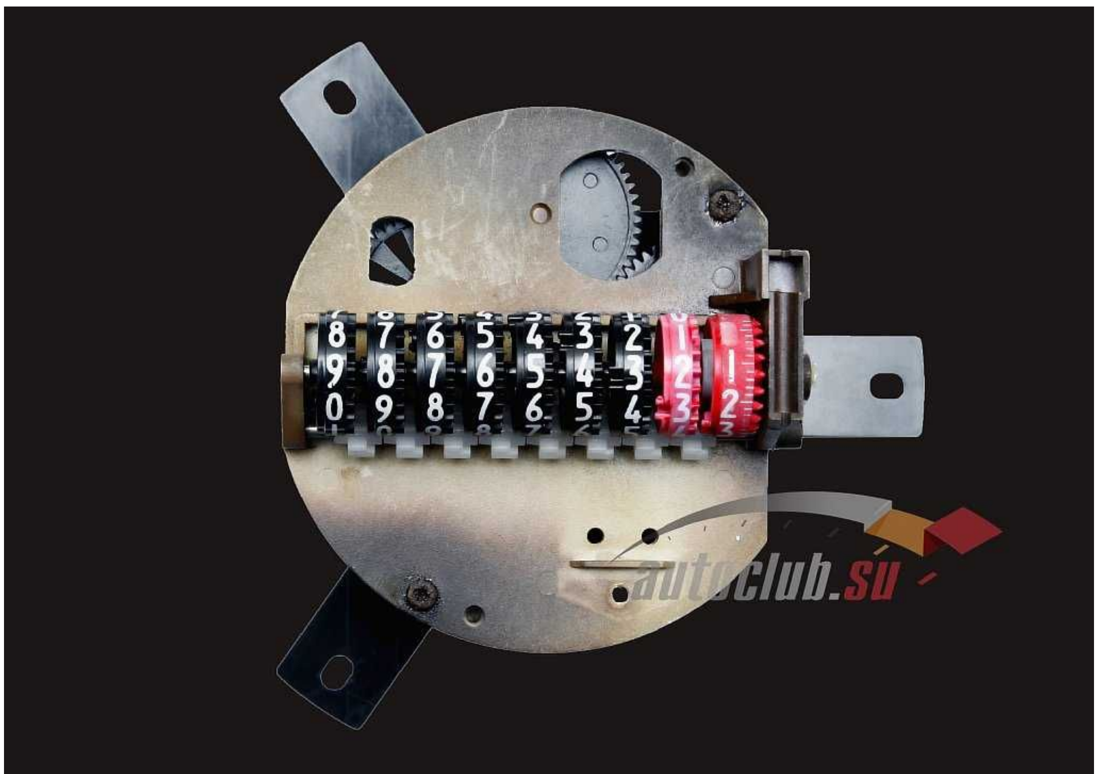
Разряды 2 1 0 -1 -2
Число **2 7 6, 5 2**$_8$ $= 2*8^2 + 7*8^1 + 6*8^0 + 5*8^{-1} + 2*8^{-2}$;

2.1. Основы систем счисления.
2.1.2. Позиционные системы счисления

- В каждой системе счисления цифры упорядочены в соответствии с их значениями: 1 больше 0, 2 больше 1 и т.д.
- **Продвижение** цифры - замена её следующей по величине. Продвинуть цифру 1 значит заменить её на 2, продвинуть цифру 2 значит заменить её на 3 и т.д. Продвижение старшей цифры - замена на 0.
- *Целые числа в любой системе счисления порождаются с помощью Правила счета*:
  - Для образования целого числа, следующего за любым данным целым числом, нужно продвинуть самую правую цифру числа;
  - Если какая-либо цифра после продвижения стала нулем, то нужно продвинуть цифру, стоящую слева от неё.
- Запишем первые десять целых чисел:
  - в двоичной системе: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001;
  - в троичной системе: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100;
  - в пятеричной системе: 0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14;
  - в восьмеричной системе: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11.

2.1. Основы систем счисления. 2.1.2. Позиционные системы счисления

- **Продвижение цифры**



2.2. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и десятичная системы счисления.

- Кроме десятичной в вычислительной технике широко используются системы с основанием, являющимся целой степенью числа 2:
  - **двоичная** (используются цифры 0, 1);
  - **восьмеричная** (используются цифры 0, 1, ..., 7);
  - **шестнадцатеричная** (для первых целых чисел от нуля до девяти используются цифры 0, 1, ..., 9, а для следующих чисел — от десяти до пятнадцати — в качестве цифр используются символы A, B, C, D, E, F).

2.2. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и десятичная системы счисления.

- Причины применения двоичной системы в вычислительной технике:
  - для реализации **нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.), а не, например, с десятью, — как в десятичной;
  - представление информации посредством только двух состояний **надежно и помехоустойчиво**;
  - возможно **применение аппарата булевой алгебры** для выполнения логических преобразований информации;
  - двоичная арифметика намного **проще десятичной**.
- Недостаток двоичной системы:
  - быстрый рост числа разрядов, необходимых для записи чисел.

2.2. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и десятичная системы счисления

- Причины применения восьмеричной и шестнадцатеричной систем:
  - читаются почти так же легко, как десятичные.
  - требуют соответственно в три (восьмеричная) и в четыре (шестнадцатеричная) раза меньше разрядов, чем в двоичной системе.
  - простой перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему: нужно каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой или тетрадой.

$$\begin{array}{lcccclcccc}
537,1_8 = & 101 & 011 & 111, & 001_2\ ; & 1A3,F_{16} = & 1 & 1010 & 0011, & 1111_2 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 5 & 3 & 7 & 1 & & 1 & A & 3 & F
\end{array}$$

2.2. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и десятичная системы счисления

- Чтобы перевести число из двоичной системы в восьмеричную или шестнадцатеричную, его нужно разбить влево и вправо от запятой на
  - ***триады*** (для восьмеричной) или
  - ***тетрады*** (для шестнадцатеричной)
- каждую такую группу заменить соответствующей восьмеричной (шестнадцатеричной) цифрой

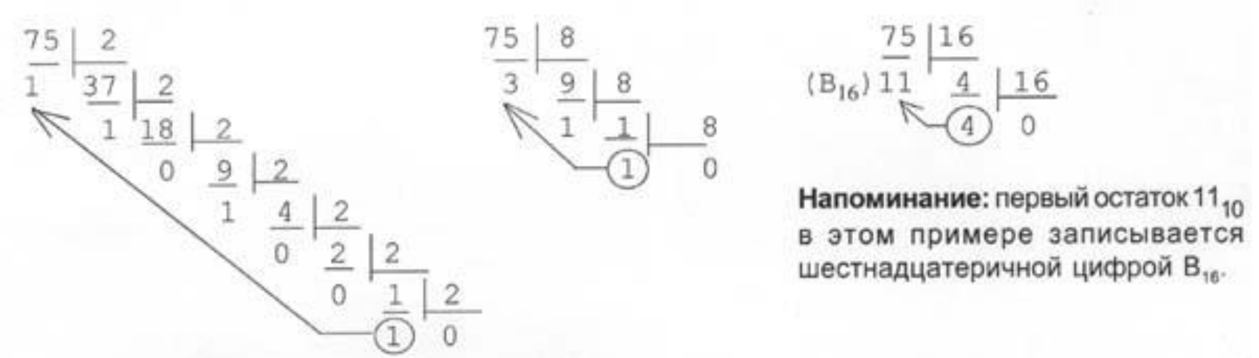
$$10101001{,}10111_2 = \underbrace{10}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{001}_{1},\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110}_{6}{}_2 = 251{,}56_8$$

$$10101001{,}10111_2 = \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{1001}_{9},\ \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{1000}_{8}{}_2 = A9{,}B8_{16}.$$

2.3. Понятие об алгоритме преобразования информации из двоичной в десятичную системы счисления и обратно.

2.3.1. Как перевести целое число из десятичной системы в любую другую позиционную систему счисления?

- Для перевода целого десятичного числа N в систему счисления с основанием q необходимо
  - N разделить с остатком ("нацело") на q, записанное в той же десятичной системе.
  - Затем неполное частное, полученное от такого деления, нужно снова разделить с остатком на q, и т.д., пока последнее полученное неполное частное не станет равным нулю.
  - Представлением числа N в новой системе счисления будет последовательность остатков деления, изображенных одной q-ичной цифрой и записанных в порядке, обратном порядку их получения .
- Пример: Переведем число 75 из десятичной системы:



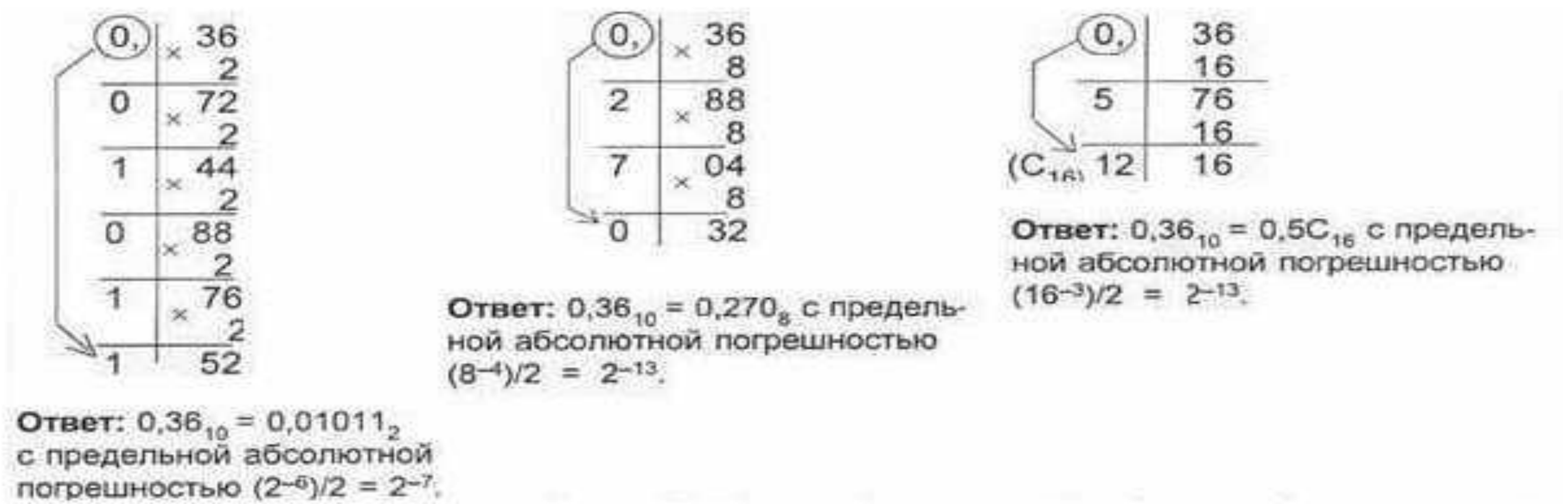
- Ответ: 75 = 1 001 011 = 113 = 4B

2.3.2. Как перевести правильную десятичную дробь в любую другую позиционную систему счисления?

- Для перевода правильной десятичной дроби F в систему счисления с основанием q необходимо
  - F умножить на q, записанное в той же десятичной системе,
  - затем дробную часть полученного произведения снова умножить на q, и т. д., до тех пор, пока дробная часть очередного произведения не станет равной нулю, либо не будет достигнута требуемая точность изображения числа F в q-ичной системе.
  - Представлением дробной части числа F в новой системе счисления будет последовательность целых частей полученных произведений, записанных в порядке их получения и изображенных одной q-ичной цифрой.
- Если требуемая точность перевода числа F составляет k знаков после запятой, то **предельная абсолютная погрешность** при этом равняется $q^{-(k+1)} / 2$

2.3.2. Как перевести правильную десятичную дробь в любую другую позиционную систему счисления?

- Пример. Переведем число 0,36 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и



- Для чисел, имеющих как целую, так и дробную части, перевод из десятичной системы счисления в другую осуществляется *отдельно для целой и дробной частей*.

2.3.3. Как перевести число из двоичной (восьмеричной, шестнадцатеричной) системы в десятичную?

- Перевод в десятичную систему числа x, записанного в q-ичной системе счисления (q = 2, 8 или 16) в виде

$$x_q = (a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_q$$

- сводится к вычислению значения многочлена

$$x_{10} = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \ldots + a_{-m} q^{-m}$$

- средствами десятичной арифметики.
- Примеры:

Разряды 3 2 1 0 -1

Число $1\,0\,1\,1,\,1_2 = 1*2^3+1*2^1+1*2^0+1*2^{-1} = 11{,}5_{10}$.

Разряды 2 1 0 -1

Число $2\,7\,6,\,5_8 = 2*8^2+7*8^1+6*8^0+5*8^{-1} = 190{,}625_{10}$.

Разряды 2 1 0

Число $1\,F\,3_{16} = 1*16^2+15*16^1+3*16^0 = 499_{10}$.

2.4. Частные случаи преобразования информации из двоичной системы счисления в восьмеричную, шестнадцатеричную и обратно. Основные процессы преобразования информации.

Запись первых двух десятков целых чисел:

10-я	2-я	8-я	16-я
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9

10-я	2-я	8-я	16-я
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13

2.4.1. Арифметические операции в позиционных системах счисления

- Основные арифметические операции:
  - сложение,
  - вычитание,
  - умножение,
  - деление.
- Правила выполнения десятичной системы — сложение, вычитание, умножение столбиком и деление углом применимы и ко всем другим позиционным системам счисления.

2.4.2. Сложение

- Двоичная система

+	0	1
0	0	1
1	1	10

- Восьмеричная система

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

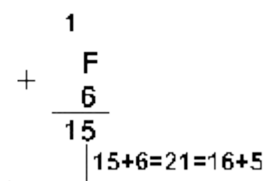
- Шестнадцатеричная систе

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

2.4.2. Сложение. Пример

- Сложим числа 15 и 6.

- Шестнадцатеричная: $F_{16}+6_{16}$



- Ответ: $15+6=21_{10}=10101_2=25_8=15_{16}$
- Проверка. Преобразуем полученные суммы к десятичному виду:
- $10101_2=2^4+2^2+2^0=16+4+1=21$,
- $25_8=2 \cdot 8^1+5 \cdot 8^0=16+5=21$, $15_{16}=1 \cdot 16^1+5 \cdot 16^0=16+5=21$.

2.4.2. Сложение. Пример

- $F+1=10_{16}$
- $FF+1=100_{16}$
- $7+1=10_8$
- $17+1=20_8$

2.4.3. Вычитание

- Вычтем число 59,75 из числа 201,25.

- Ответ: $201{,}25_{10}-59{,}75_{10}=141{,}5_{10}=10001101{,}1_{2}=215{,}4_{8}=8D{,}8_{16}$
- Проверка. Преобразуем полученные разности к десятичному виду:
- $10001101{,}1_2=2^7+2^3+2^2+2^0+2^{-1}=141{,}5$; $215{,}4_8=2\cdot8^2+1\cdot8^1+5\cdot8^0+4\cdot8^{-1}=141{,}5$;
- $8D{,}8_{16}= 8\cdot16^1+D\cdot16^0+8\cdot16^{-1}=141{,}5$.

2.4.3. Вычитание

- 10-1=F или 9 или 7 или 1 или ?
- 100-1=FF или 99 или 77 или 11 или ?

2.4.4. Умножение

- Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик
- **Таблицы умножения для двоичной и восьмеричной систем**

*	0	1
0	0	0
1	0	1

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

- Умножение в двоичной системе сводится к сдвигам множимого и сложениям

2.4.4.

- Умножение в 16-й с/с

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

2.4.4. Умножение. Пример

- Перемножим числа 115 и 51.

Десятичная: $115_{10} \cdot 51_{10}$	Двоичная: $1110011_2 \cdot 110011_2$	Восьмеричная: $163_8 \cdot 63_8$
$\begin{array}{r} 115 \\ \times\ \ 51 \\ \hline 115 \\ 575 \\ \hline 5865 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1110011 \\ \times\ \ 110011 \\ \hline 1110011 \\ 1110011 \\ 1110011 \\ \hline 1011011101001 \end{array}$	$\begin{array}{r} 163 \\ \times\ \ 63 \\ \hline 531 \\ 1262 \\ \hline 13351 \end{array}$

- Ответ: $115 \cdot 51 = 5865_{10} = 1011011101001_2 = 13351_{8.}$
- Проверка. Преобразуем полученные произведения к десятичному виду: $1011011101001_2 = 2^{12}+2^{10}+2^9+2^7+2^6+2^5+2^3+2^0 = 5865$;
- $13351_8 = 1 \cdot 8^4+3 \cdot 8^3+3 \cdot 8^2+5 \cdot 8^1+1 \cdot 8^0 = 5865$.

2.4.5. Деление

- Деление в любой позиционной системе счисления производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе.
- Пример. Разделим число 30 на число 6.

Десятичная: $30_{10} : 6_{10}$ **Двоичная:** $11110_2 : 110_2$ **Восьмеричная:** $36_8 : 6_8$

$$-\begin{array}{r|l} 30 & 6 \\ \underline{30} & 5 \\ 0 & \end{array} \qquad -\begin{array}{l|l} 11110 & 110 \\ \underline{110} & 101 \\ \;\;110 & \\ \;\;\underline{110} & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array} \qquad -\begin{array}{r|l} 36 & 6 \\ \underline{36} & 5 \\ 0 & \end{array}$$

- Ответ: $30:6=5_{10}=101_2=5_8$.

2.4.5. Деление. Пример

- Разделим число 35 на число 14.

Десятичная: $35_{10} : 14_{10}$

$$\begin{array}{r|l} -\,35 & 14 \\ \underline{28} & \overline{2{,}5} \\ -\,70 & \\ \underline{70} & \\ 0 & \end{array}$$

Двоичная: $100011_2 : 1110_2$

$$\begin{array}{r|l} -\,100011 & 1110 \\ \underline{1110} & \overline{10{,}1} \\ -\,1110 & \\ \underline{1110} & \\ 0 & \end{array}$$

- Восьмеричная: $43_8 : 16_8$

$$\begin{array}{r|l} -\,43 & 16 \\ \underline{34} & \overline{2{,}4} \\ -\,70 & \\ \underline{70} & \\ 0 & \end{array}$$

- Ответ: $35:14=2{,}5_{10}=10{,}1_2=2{,}4_8$
- Проверка. Преобразуем полученные частные к десятичному виду:
- $10{,}1_2=2^1+2^{-1}=2{,}5$; $2{,}4_8=2\cdot 8^0+4\cdot 8^{-1}=2{,}5$.

Хитрости арифметики

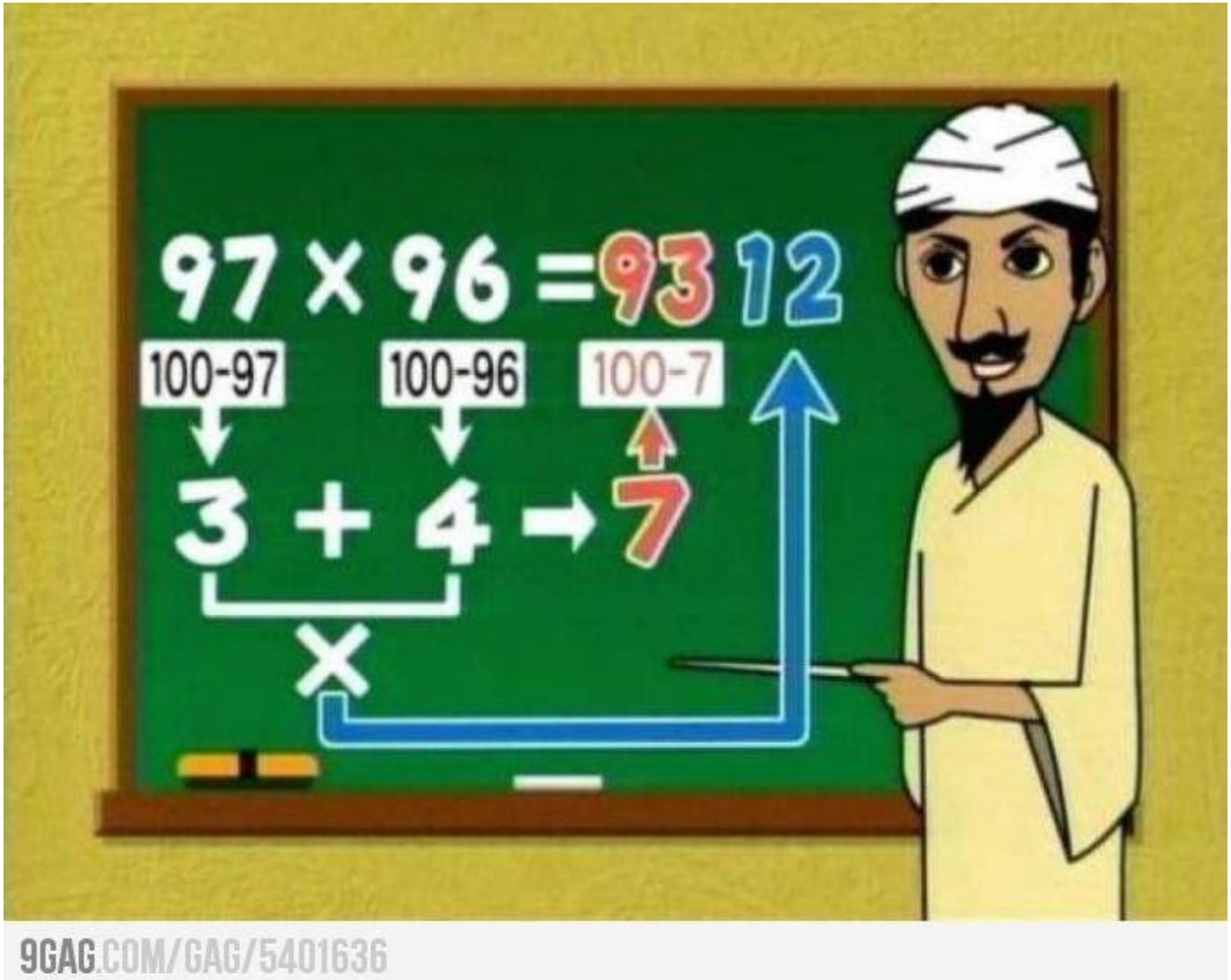
9 x 1 = 09
9 x 2 = 18
9 x 3 = 27
9 x 4 = 36
9 x 5 = 45
9 x 6 = 54
9 x 7 = 63
9 x 8 = 72
9 x 9 = 81
9 x 10 = 90

Хитрости арифметики

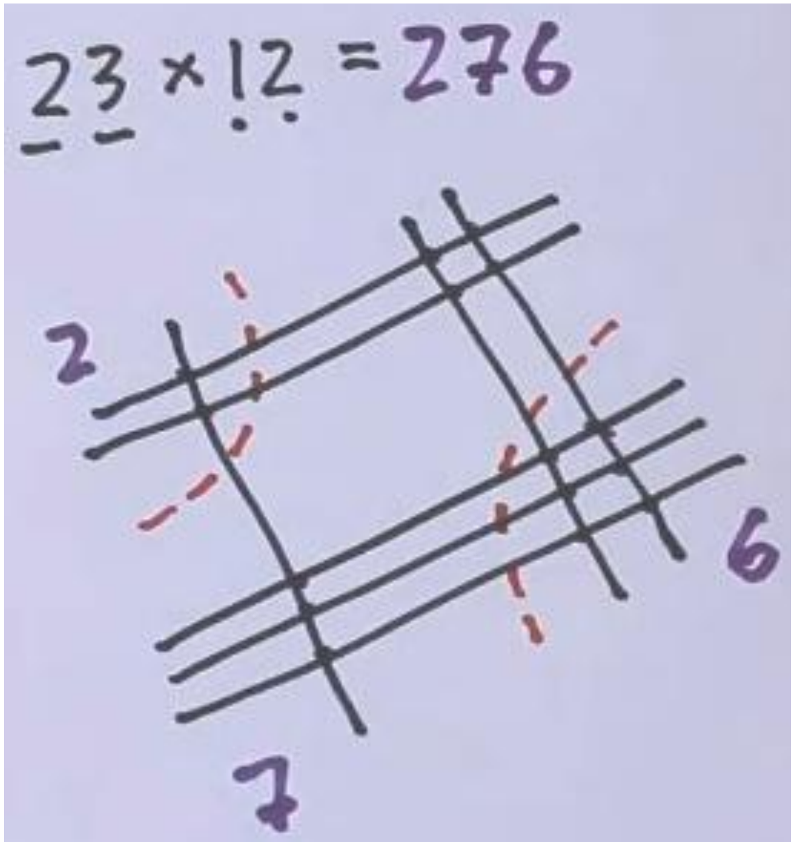
$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
$1234 \times 8 + 4 = 9876$
$12345 \times 8 + 5 = 98765$
$123456 \times 8 + 6 = 987654$
$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$
$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$
$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$

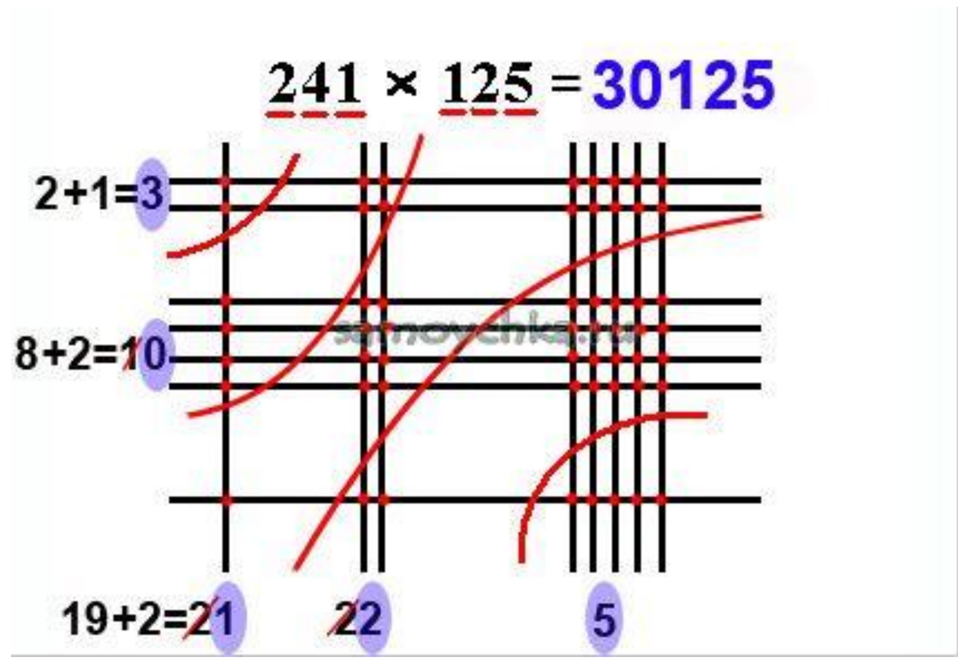
$1 \times 1 = 1$
$11 \times 11 = 121$
$111 \times 111 = 12321$
$1111 \times 1111 = 1234321$
$11111 \times 11111 = 123454321$
$111111 \times 111111 = 12345654321$
$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$
$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$
$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$

Хитрости арифметики



Хитрости арифметики





Русская деревенская школа конца XIX века во время урока арифметики Сергея Александровича Рачинского

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$$

Н. Богданов-Бельский.
Устный счет

Контрольный вопрос

- Для решения каких задач использовались самые большие числа в древней Руси, древнем Риме, древнем