

Об авторах



Автор презентации:

- Котов Александр Ильич

Оформление презентации:

- Котова Нина Александровна

Системы случайных величин. (Краткое напоминание)

- Совокупность двух случайных величин $\{X, Y\}$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ и рассматриваемых совместно называется системой двух случайных величин или случайным вектором или двумерной случайной величиной.

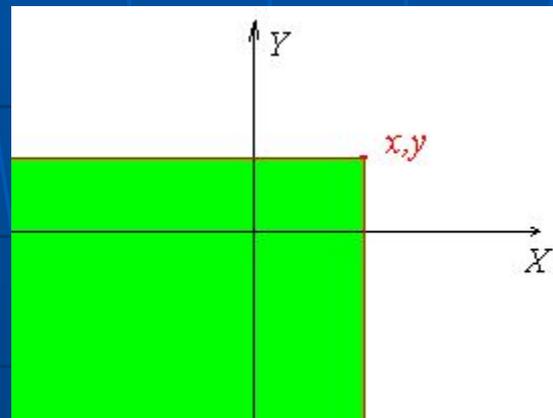
(аналогично определяется система трех и более случайных величин)

Функция распределения

Функцией распределения $F(x,y)$ системы двух случайных величин $\{X,Y\}$ называется вероятность совместного выполнения двух событий: $(X < x)$ и $(Y < y)$, то есть

$$F(x,y) = P((X < x) \cap (Y < y))$$

Геометрически $F(x,y)$ характеризует вероятность попадания точки (X,Y) в область, закрашенную на рисунке в зелёный цвет (исключая границу, окрашенную красным цветом)



- Дискретным случайным вектором называется такой случайный вектор, который может принимать значения только из заранее известной таблицы – конечной или бесконечной.
- Двумерная случайная величина называется непрерывной, если она принимает любое значение из некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$ и существует функция $p(x,y) \geq 0$ такая, что выполнены два условия:

$$\forall S \subset D \quad P((X, Y) \in S) = \iint_D p(x, y) dS$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \right) dy = 1$$

- Функция $p(x,y)$ называется функцией плотности распределения. Равносильным определением функции плотности является
$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$
 где производные понимаются как обобщенные .

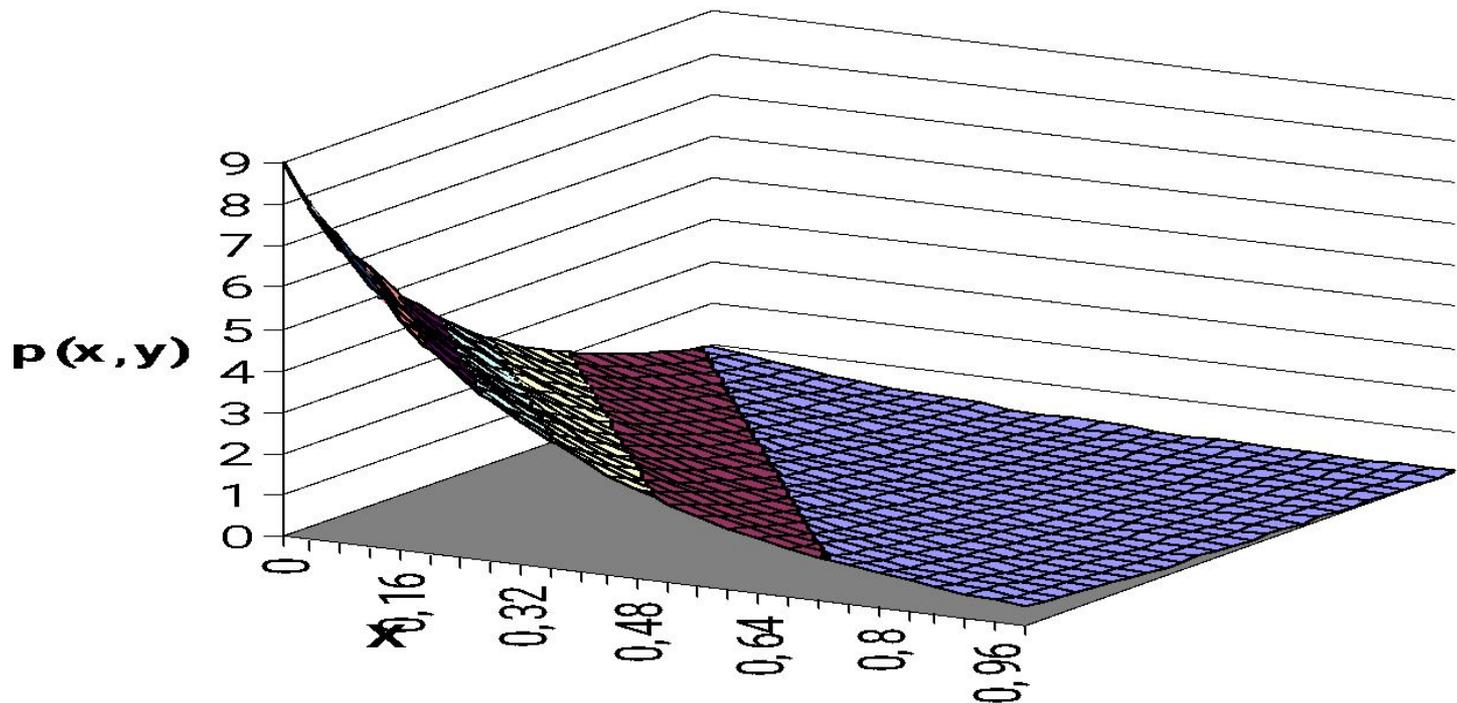
Условные обозначения:

- СВ – случайная величина.
- НСВ - непрерывная случайная величина.
- ДСВ – дискретная случайная величина.
- ССВ – система случайных величин.
- НССВ – система непрерывных случайных величин.
- ДССВ - система дискретных случайных величин.
- ФР – функция распределения.
- ПР – плотность распределения.

Пример непрерывного распределения случайного вектора.

Система двух независимых непрерывных случайных величин, распределенных по показательному закону:

$$p(x, y) = \begin{cases} 9e^{-3x}e^{-3y} & x \in (x \geq 0) \cap (y \geq 0) \\ 0 & x \notin ((x \geq 0) \cap (y \geq 0)) \end{cases}$$

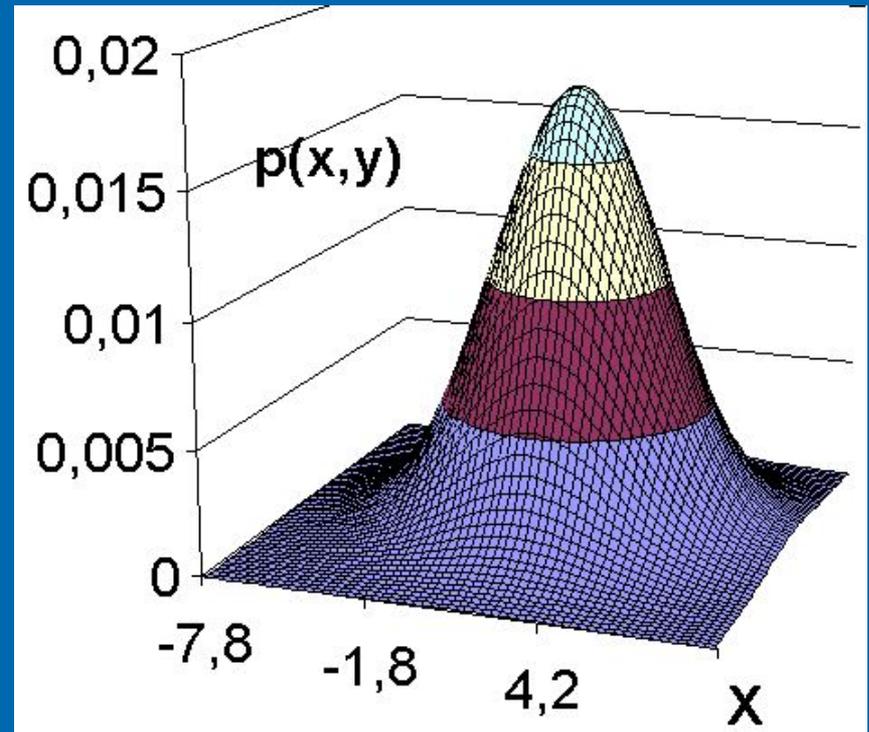


Еще один пример непрерывного распределения случайного вектора.

Система двух независимых нормально распределенных непрерывных случайных величин :

$$X \in N(2,3) \quad Y \in N(2,3)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{18\pi} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}} e^{-\frac{(y-2)^2}{18}}$$



Пример распределения дискретного случайного вектора.

Система дискретных случайных величин задана таблицей распределения. В таблице указаны вероятности событий, заключающихся в том, что случайный вектор примет соответствующее значение.

$Y \backslash X$	2	4	6	8	10
3	0,0904	0,0565	0,0113	0	0
6	0,0452	0,113	0,0565	0,0226	0,0113
9	0,0226	0,0678	0,113	0,0791	0,0226
12	0	0,0113	0,0565	0,1356	0,0847

Сумма вероятностей в таблице точно равна единице.

□ Функции $F_1(x)=F(x,+\infty)$ и $F_2(x)=F(+\infty,y)$ называются частными (маргинальными) функциями распределения составляющих систему случайных величин.

□ Для систем непрерывных случайных величин определяются частные (маргинальные) функции плотности:

$$p_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} \quad p_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy}$$

□ Условными функциями распределения называются функции:

$$F_y(x)=P((X<x)\cap(Y=y)) \quad \text{и} \quad F_x(y)=P((Y<y)\cap(X=x))$$

□ Для систем непрерывных случайных величин определяются условные плотности распределения:

$$p_y(x) = \frac{\partial F_y(x)}{\partial x} \quad p_x(y) = \frac{\partial F_x(y)}{\partial y}$$

Имеют место следующие равенства:

$$\square p(x,y) = p_y(x)p_2(y)$$

$$\square p(x,y) = p_x(y)p_1(y)$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y p(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x}$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}, y) dy \right) d\bar{x} \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, \bar{y}) dx \right) d\bar{y}$$

Зависимость и независимость случайных величин, входящих в состав систем случайных величин.

- **Две случайные величины, входящие в систему случайных величин называются независимыми, если условная функция распределения одной из них не зависит от значения, принимаемого другой случайной величиной.**

Теорема: Для того, чтобы две случайных величины были независимыми необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы случайных величин могла быть представлена в виде произведения двух частных функций распределения:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Зависимость и независимость случайных величин, входящих в состав систем случайных величин (продолжение)

Теорема: Для того, чтобы две непрерывные случайные величины были независимыми необходимо и достаточно, чтобы плотность распределения системы непрерывных случайных величин могла быть представлена в виде произведения двух частных плотностей распределения:

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$$

В этом случае:

$$p_y(x) = p_1(x) \quad p_x(y) = p_2(y)$$

Числовые характеристики систем случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции.

- Ковариацией $\text{cov}(X, Y)$ (или K_{xy}) двух случайных величин называется их центральный смешанный момент:

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$$

- Для систем непрерывных случайных величин имеют место формулы:

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Ex) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (y - EY) p(x, y) dy \right) dx$$

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} yp(x, y) dy \right) dx - (EX) \cdot (EY)$$

Для систем дискретных случайных величин имеют место формулы:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum (x_i - EX)(y_j - EY)p_{ij}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \sum x_i y_j p_{ij} - EX \cdot EY$$

Здесь суммирование ведется по всем «клеткам» таблицы распределения. Индекс i – номер значения ДСВ X , а индекс j – номер значения ДСВ Y .

- **Вспомните задачу номер 8 из контрольной работы по теории вероятностей!**

Коэффициентом корреляции $r(X, Y)$ двух случайных величин называется величина

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

Если ковариация равна нулю, то X и Y называются некоррелированными.

Если две случайные величины независимы, то они и некоррелированные. Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости.

Регрессия.

Условным математическим ожиданием

случайной величины Y – $E_x Y$ называется ее математическое ожидание, вычисленное по условному закону распределения, при условии, что случайная величина X приняла значение x . Например, для систем непрерывных случайных величин X, Y имеет место формула:

$$E_x Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_x(y) dy$$

Регрессия (продолжение).

- Условное математическое ожидание случайной величины Y - E_{xY} при заданном значении x называется регрессией Y на x .
- График зависимости E_{xY} от величины x называется линией регрессии, или кривой регрессии Y на x .
- Регрессия X на y определяется аналогично.
- Для независимых случайных величин линии регрессии параллельны координатным осям. Обратное утверждение неверно.
- Если случайная величина Y есть неслучайная функция СВ X , то линия регрессии Y на x будет просто графиком этой неслучайной функции.

Литература.

- 1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М. Наука, 1976.
- 2. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М. Наука, 1988.
- 3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.:Высш.шк.,2001
- 4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш.шк.,2001
- 5. Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей М.:Высш. шк.,2002
- 6. Курзнев В.А. Основы математической статистики для управленцев. СПб, СЗАГС 2002.