Планиметрия в вопросах и ответах

Асташова Ирина Викторовна, доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет МЭСИ РЭУ имени Г. В. Плеханова.
E-mail: ast@diffiety.ac.ru

УНИВЕРСИТЕТСКИЕ СУББОТЫ
РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Г.В. ПЛЕХАНОВА
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

План лекции

1. Треугольник. Основные соотношения между элементами треугольника. Формулы площади.

2. Трапеция. Решение задач, связанных с существованием подобных треугольников в трапеции.

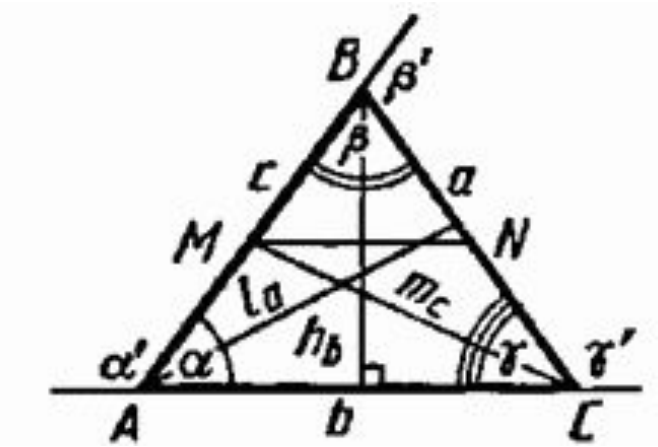
3. Окружность. Зависимость между хордами, дугами. Свойства касательной.

УНИВЕРСИТЕТСКИЕ СУББОТЫ

РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Г.В. ПЛЕХАНОВА

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

Треугольник: основные обозначения



- a, b, c – стороны против вершин A, B, C
- α, β, γ – углы при вершинах A, B, C; α', β', γ' – внешние углы
- l_a – биссектриса, проведенная к стороне a
- h_b – высота, опущенная на сторону b
- m_c – медиана, проведенная к стороне c
- R – радиус описанной окружности
- r – радиус вписанной окружности
- $P = a + b + c$ – периметр, $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр
- S – площадь

Треугольник: основные соотношения

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

Формулы площади

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Четыре замечательные точки треугольника

- **Три медианы треугольника** пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.
- **Три биссектрисы треугольника** пересекаются в одной точке, которая служит центром окружности, вписанной в треугольник.
- **Три серединных перпендикуляра** к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая служит центром окружности, описанной около треугольника.
- **Три высоты треугольника** или их продолжения пересекаются в одной точке.

Формулы для биссектрисы и медианы треугольник а

Формулы для биссектрисы треугольника

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$$

Формула для медианы треугольника

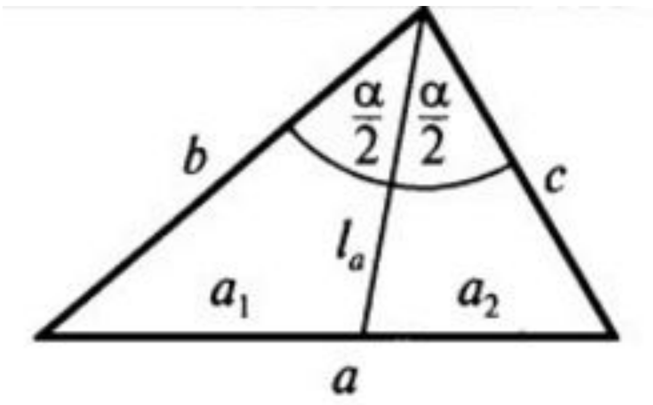
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

УНИВЕРСИТЕТСКИЕ СУББОТЫ

РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Г.В. ПЛЕХАНОВА

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

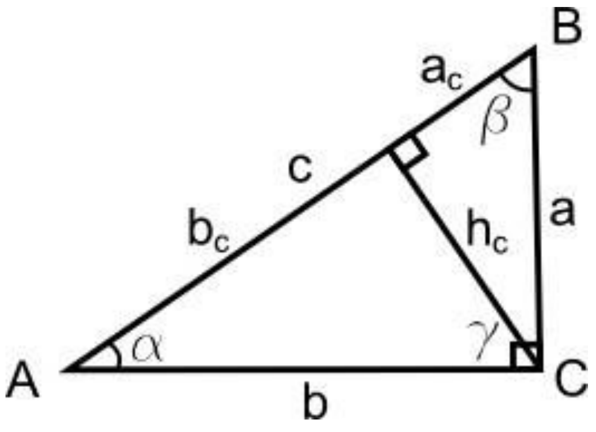
Основное свойство биссектрисы треугольника



Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}.$$

Соотношения в прямоугольном треугольнике



Пусть в треугольнике ABC $\gamma = 90°$. Обозначим через a_c и b_c проекции катетов a и b на гипотенузу. Тогда:

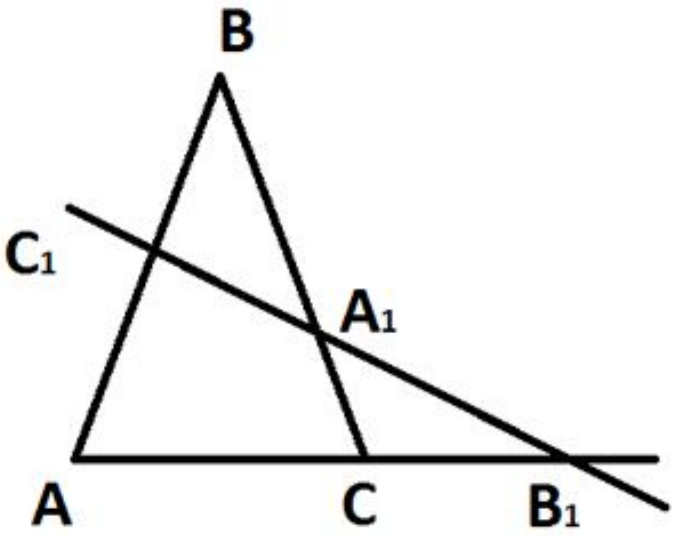
- $h_c^2 = a_c b_c$;
- $a^2 = a_c c$, $\quad b^2 = b_c c$;
- $a^2 + b^2 = c^2$;
- $m_c = c/2 = R$.

УНИВЕРСИТЕТСКИЕ СУББОТЫ

РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Г.В. ПЛЕХАНОВА

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

Теорема Менелая



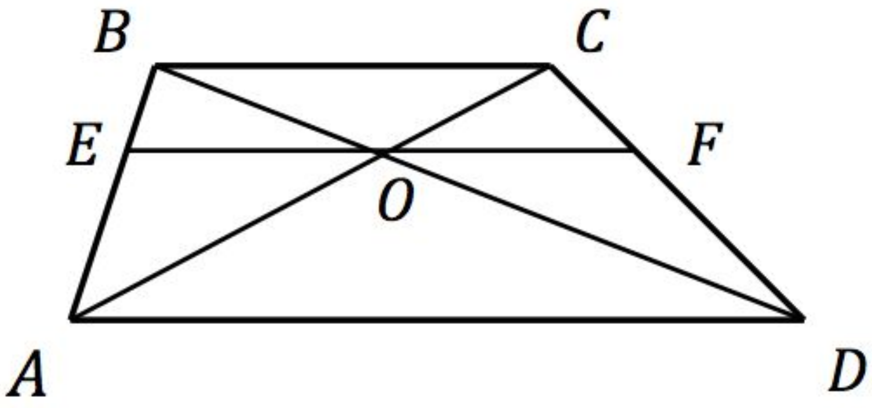
Пусть прямая A_1B_1 пересекает стороны BC и AB треугольника ABC в точках A_1 и C_1 соответственно, а продолжен… B_1. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Теорема Менелая: задача

В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 3 : 2$ и $AN : NC = 4 : 5$. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?

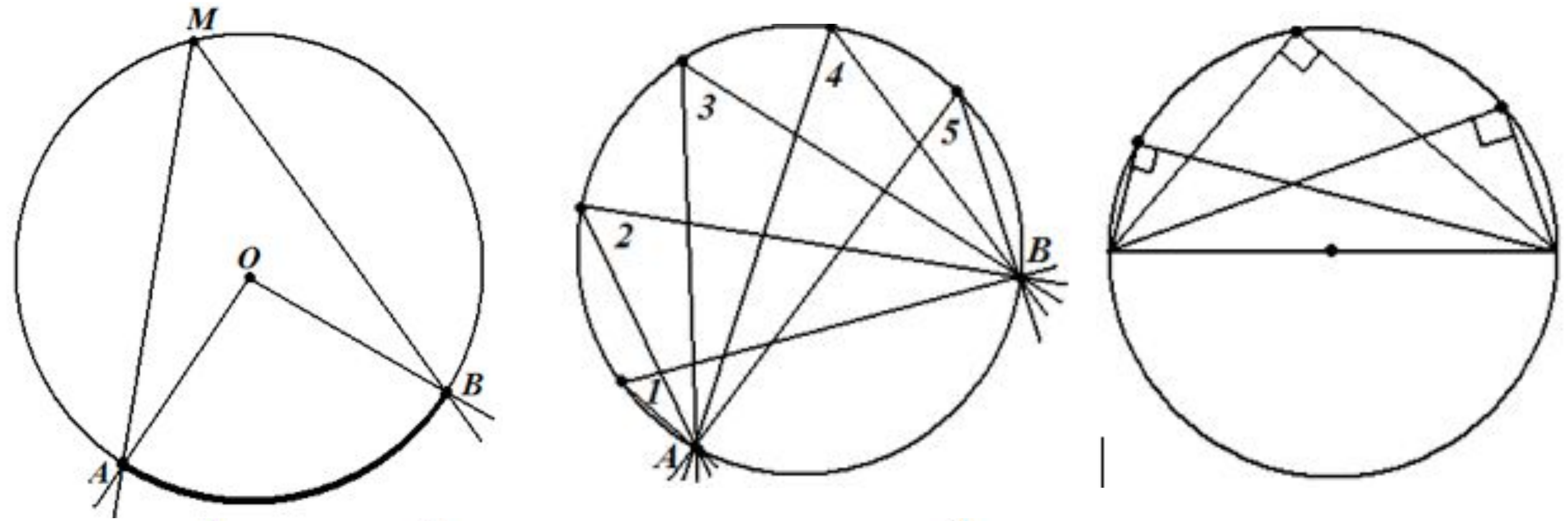
Подобные треугольник и в трапеции



Пусть в трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* диагонали пересекаются в точке *O*, и через точку *O* проведена прямая *EF*, параллельная основаниям трапеции. Тогда:

- $\Delta AOD \sim \Delta COB$;
- $\Delta BOE \sim \Delta BDA$, $\Delta COF \sim \Delta CAD$;
- $\Delta AOE \sim \Delta ACB$, $\Delta DOF \sim \Delta DBC$;
- $EO = OF$.

Вписанный угол

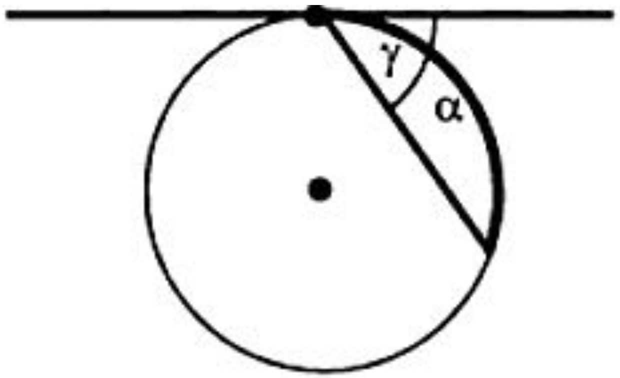


$\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cup AB \qquad \angle 1 = \dots = \angle 5 = \frac{1}{2}\cup AB$

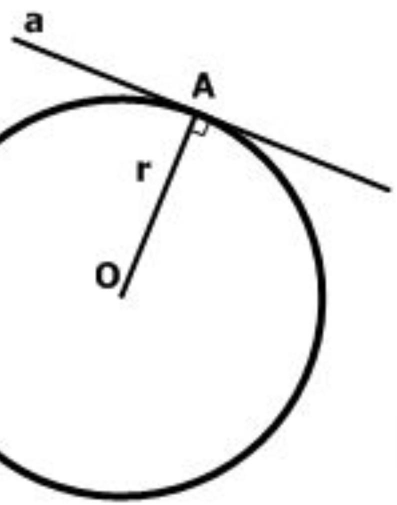
Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается. В частности:

- вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны;
- вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

Угол между касательной и хордой



$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

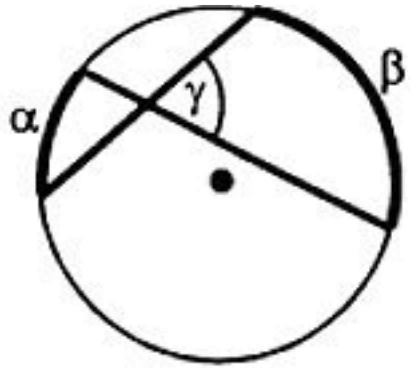


- **Угол между касательной и хордой**, проходящей через точку касания, равен половине дуги, которую стягивает хорда. В частности, угол между касательной и диаметром, проходящим через точку касания, равен 90°.

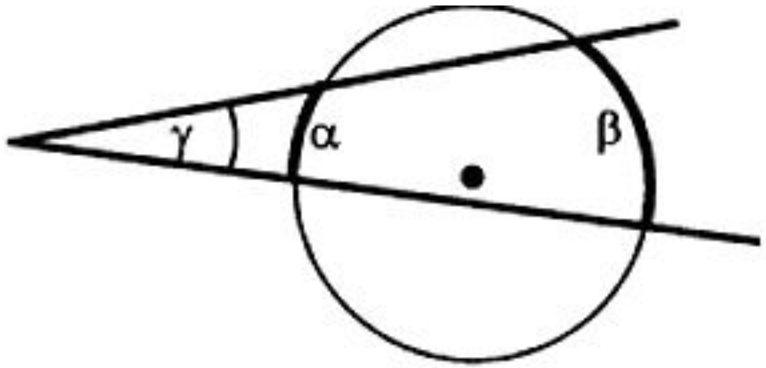
УНИВЕРСИТЕТСКИЕ СУББОТЫ

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

Углы между хордами и секущими



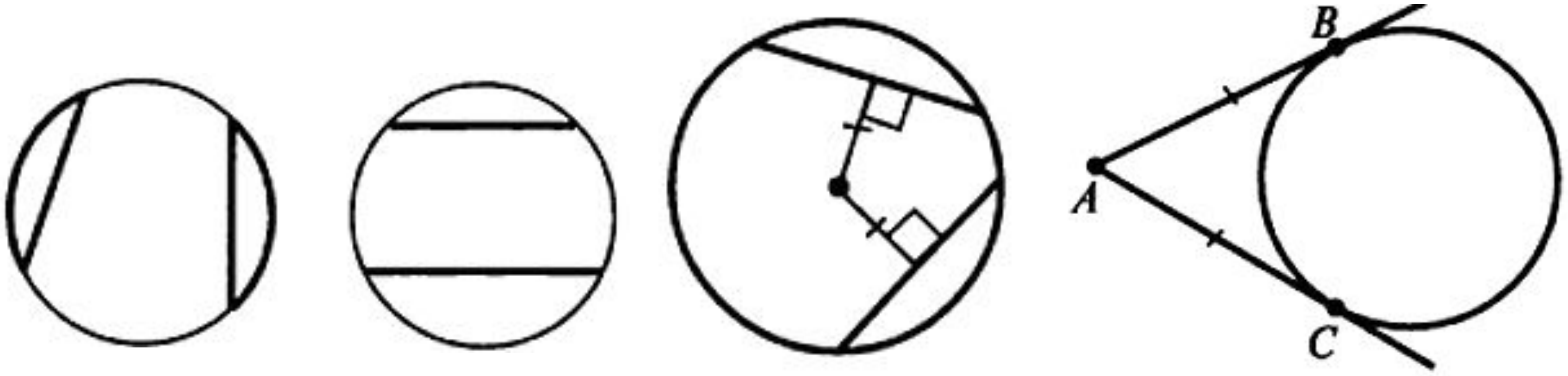
$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

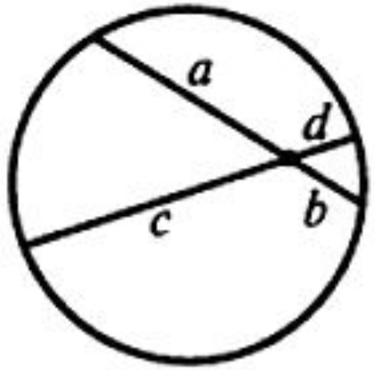
- **Угол между пересекающимися хордами** равен полусумме дуг, заключённых между концами этих хорд.
- **Угол между секущими**, проведёнными из точки вне окружности, равен полуразности дуг, заключенных между этими секущими.

Равные дуги, касательные и хорды

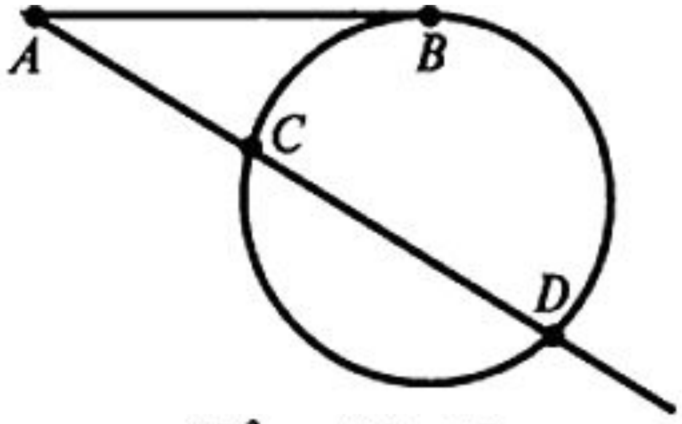


- Равные хорды стягивают равные дуги, и наоборот.
- Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.
- Равные хорды равноудалены от центра окружности, и наоборот.
- Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.

Отрезки в окружности



$$ab = cd$$



$$AB^2 = AC \cdot AD$$

- Произведения отрезков каждой из двух пересекающихся хорд равны.
- Квадрат касательной к окружности равен произведению секущей, проведенной из той же точки, на ее внешнюю часть.

По итогам лекции

Тестовые вопросы

1. Совпадают ли медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины треугольника? Приведите примеры.
2. Напишите формулы, выражающие, биссектрису, медиану и высоту через стороны треугольника.
3. Напишите 5 формул площади треугольника.
4. Сформулируйте признаки подобия треугольников.
5. Сформулируйте свойства медиан и биссектрис.
6. Сформулируйте свойства перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.
7. Сформулируйте теорему Менелая.
8. В трапеции через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям, пересекающая боковые стороны в точках M и K. Докажите, что $MO = OK$.

Спасибо за внимание!