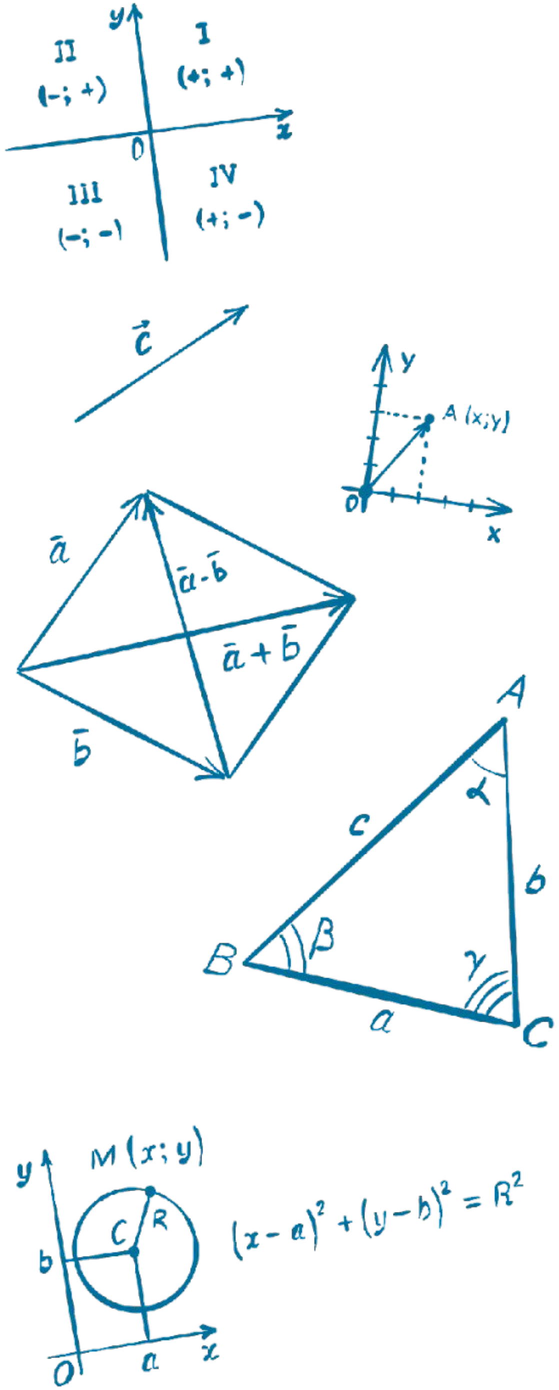


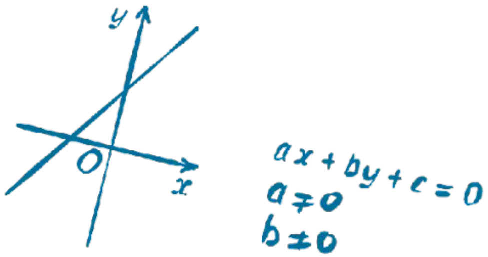
9 клас

Геометрія

Скалярний добуток векторів

www.matnova.com.ua

01.04.2022

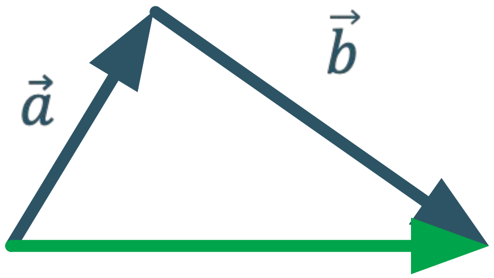


Дії над векторами

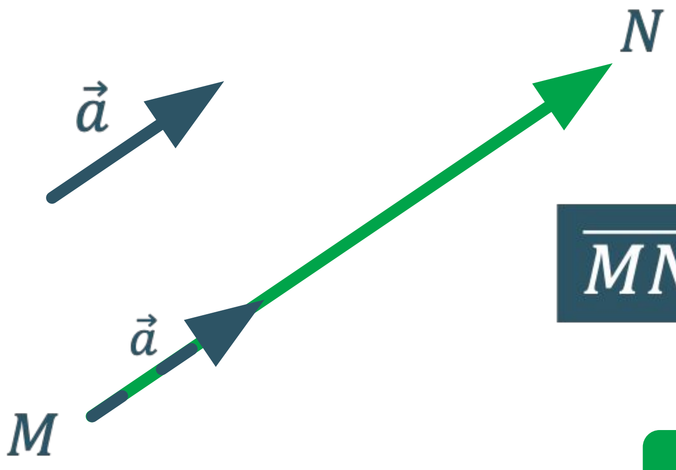
УМІЄМО

ДОДАВАТИ ВЕКТОРИ

МНОЖИНИ ВЕКТОР НА ЧИСЛО



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$\overrightarrow{MN} = 3\vec{a}$

РЕЗУЛЬТАТ

Вектор

Вектор

НАВЧИМОСЯ

МНОЖИТИ ВЕКТОР НА ВЕКТОР

Результатом множення вектора на вектор є число, тому такий добуток будемо називати скалярним

Скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами

Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів

$$\vec{a}(x_1; y_1) \cdot \vec{b}(x_2; y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

НАПРИКЛАД

1) $\vec{a}(-3; 4)$ і $\vec{b}(4; 2)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = -4$

2) $\vec{m}(0; 7)$ і $\vec{n}(-1; 5)$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0 \cdot (-1) + 7 \cdot 5 = 35$

Скалярний квадрат вектора

Скалярний добуток векторів:

$$\vec{a}(x_1; y_1) \cdot \vec{b}(x_2; y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Знайдемо скалярний квадрат вектора, заданого координатами:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 x_1 + y_1 y_1 = x_1^2 + y_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

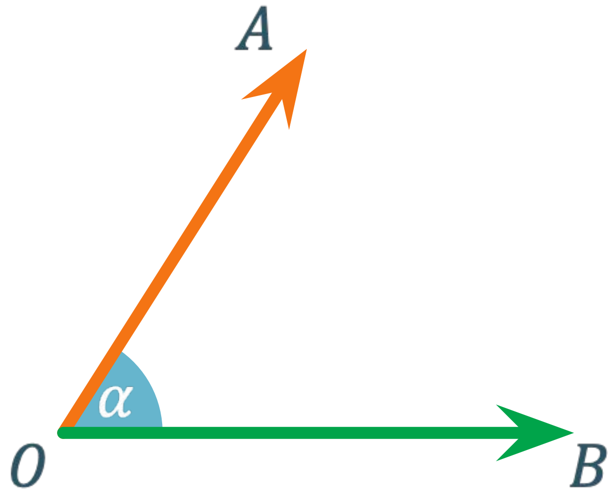
Властивості скалярного добутку векторів

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та будь-якого числа m виконуються рівності:

1	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	переставна властивість
2	$(m\vec{a})\vec{b}=m(\vec{a}\vec{b})$	сполучна властивість
3	$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$	розподільна властивість

Кут між векторами

Вектори мають спільний початок

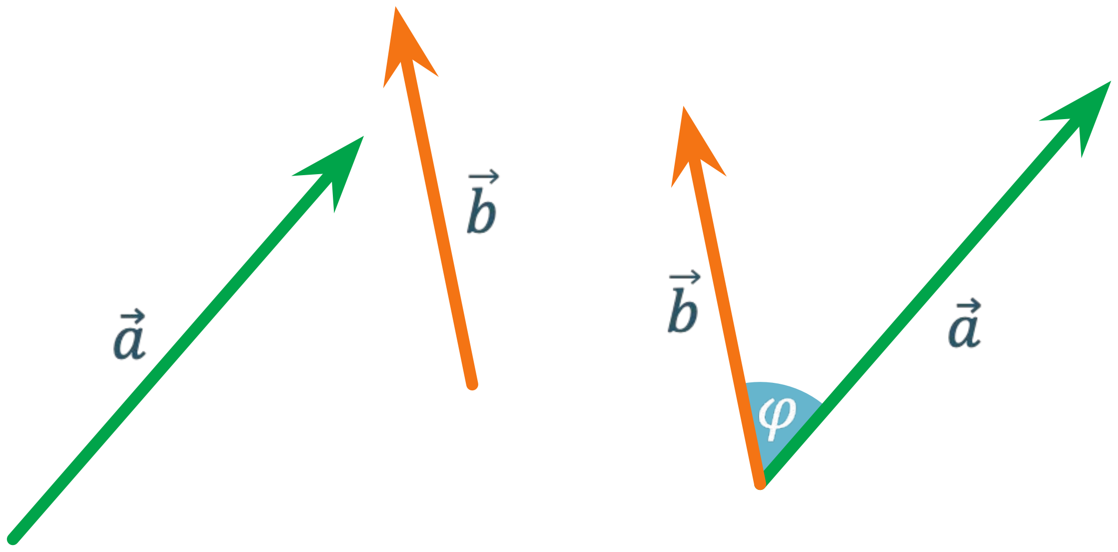


AOB – кут між векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$

$\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$

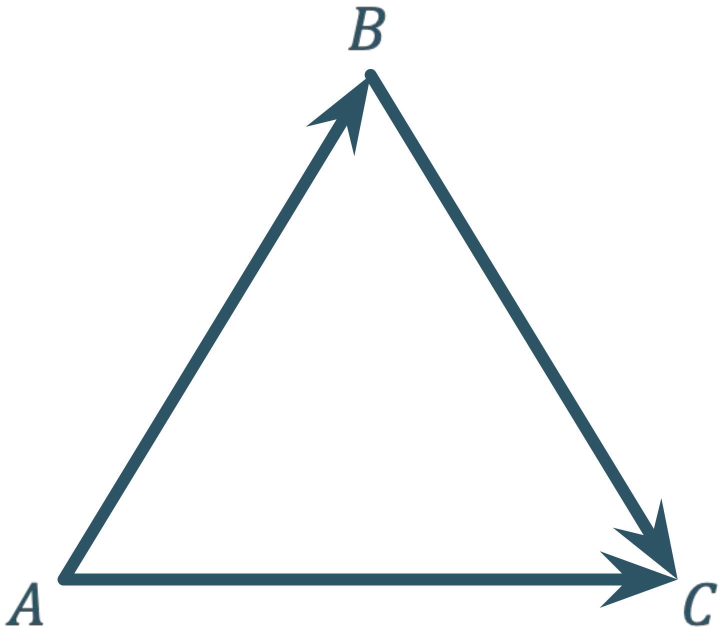
$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$

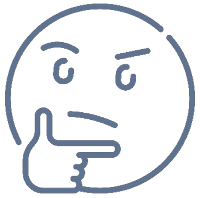
Вектори не мають спільного початку



α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

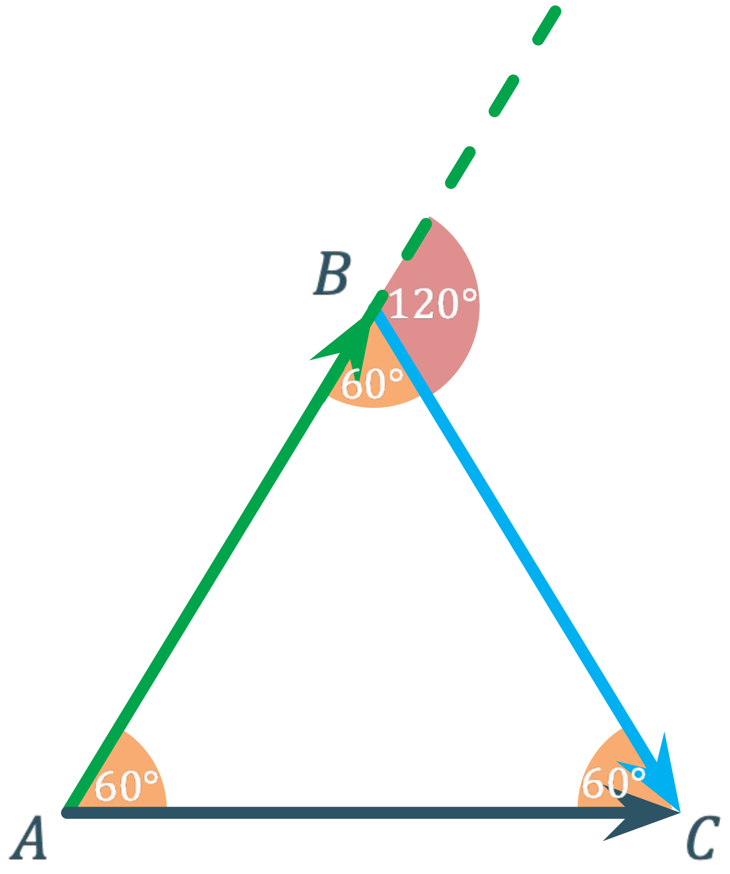
Кутом між двома ненульовими векторами, які не мають спільного початку, називається кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок



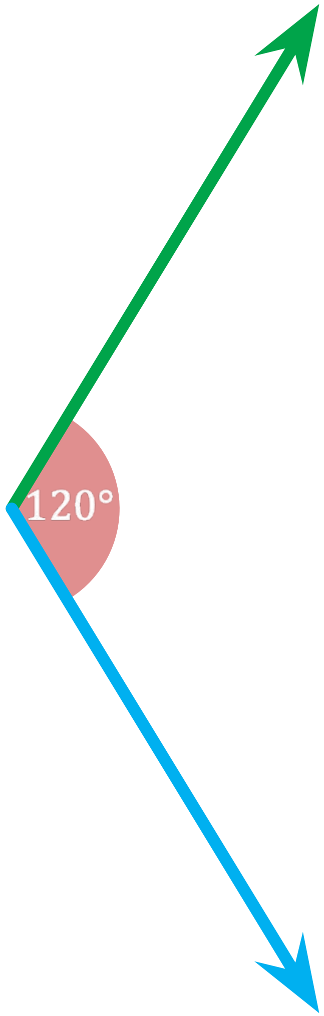


Якщо трикутник ABC рівносторонній, то якою буде градусна міра кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$?

Кут між векторами



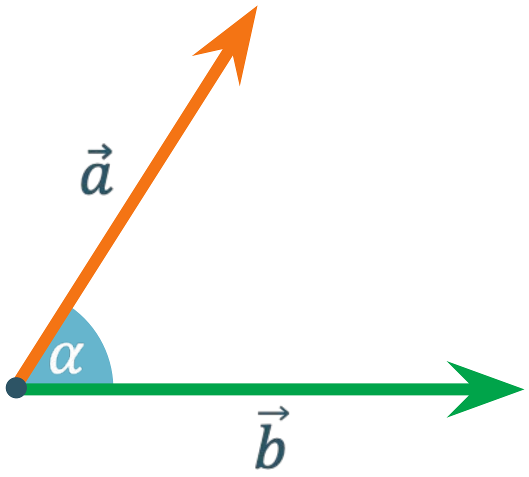
$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120°$



Якщо трикутник ABC рівносторонній, то якою буде градусна міра кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$

Кут між векторами

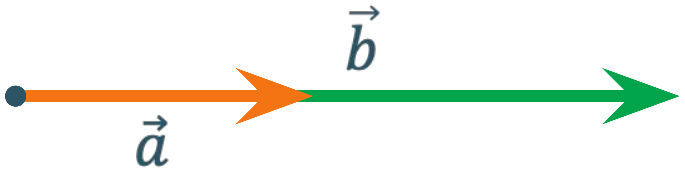
Неколінеарні вектори



$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$

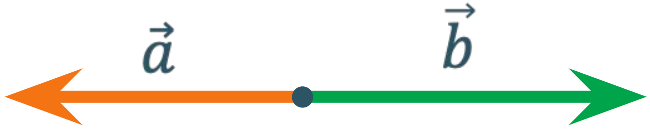
Колінеарні вектори

Співнапрямлені



$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$

Протилежно напрямлені



$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$0° \le \angle(\vec{a}, \vec{b}) \le 180°$$

Теорема про скалярний добуток

Теорема *(про скалярний добуток векторів)*

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \varphi$$

Якщо кут між двома векторами відомий, то їх скалярний добуток можна виразити через довжини цих векторів

Теорема про скалярний добуток

Наслідок *(властивість і ознака перпендикулярних векторів)*

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$

Ненульові вектори $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

Теорема *(про скалярний добуток векторів)*

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:

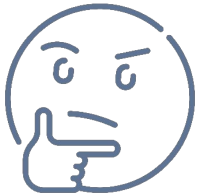
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

Косинус кута між векторами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

Косинус кута φ між ненульовими **векторами** $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ можна обчислити за формулою:

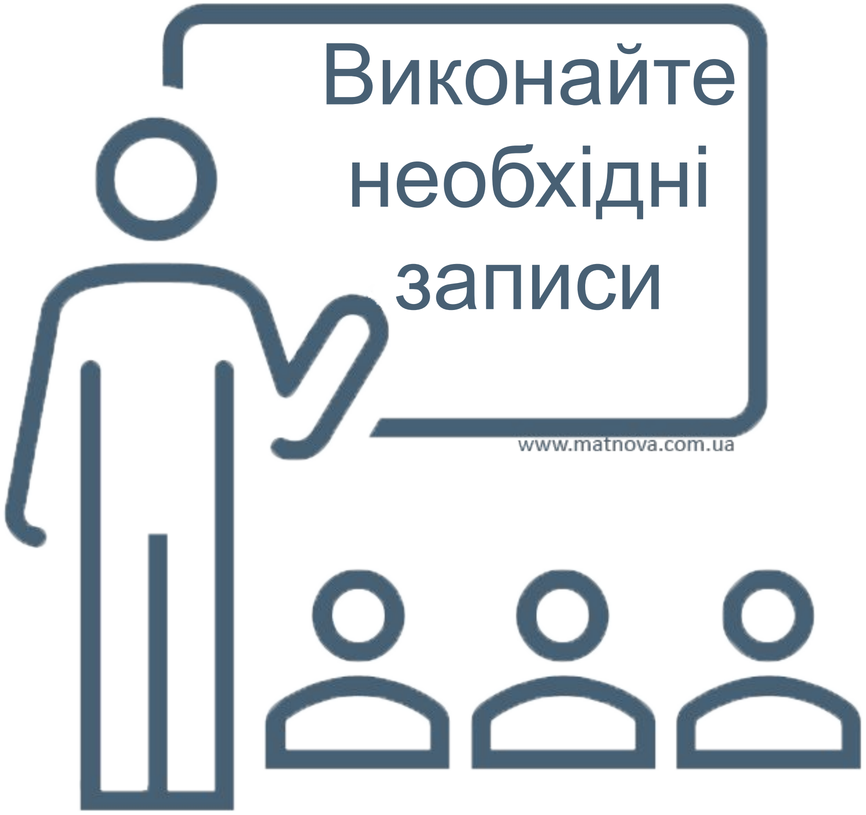
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



Використовуючи теорему про скалярний добуток векторів, як можемо виразити косинус кута між векторами?

Розв’язування завдань

1



Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-4; 1)$ і $\vec{b}(0; 5)$

2) $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(4; 3)$

3) $\vec{a}(-5; 3)$ і $\vec{b}(-2; 7)$

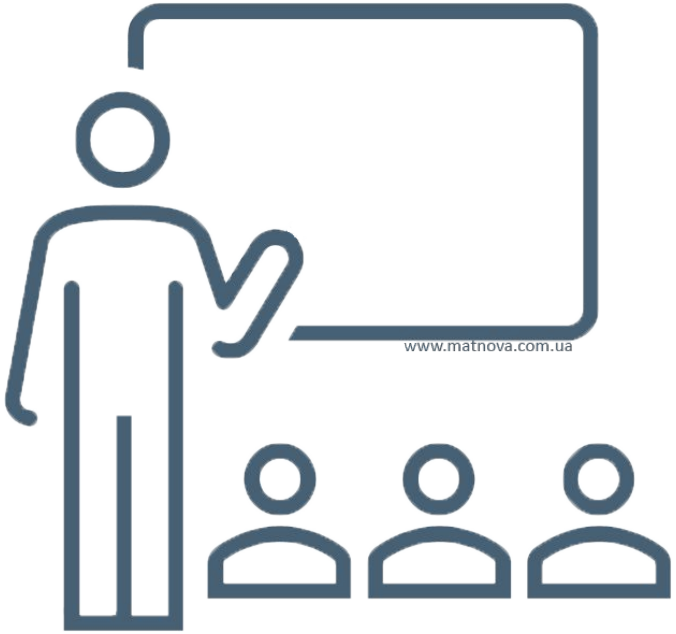
№1

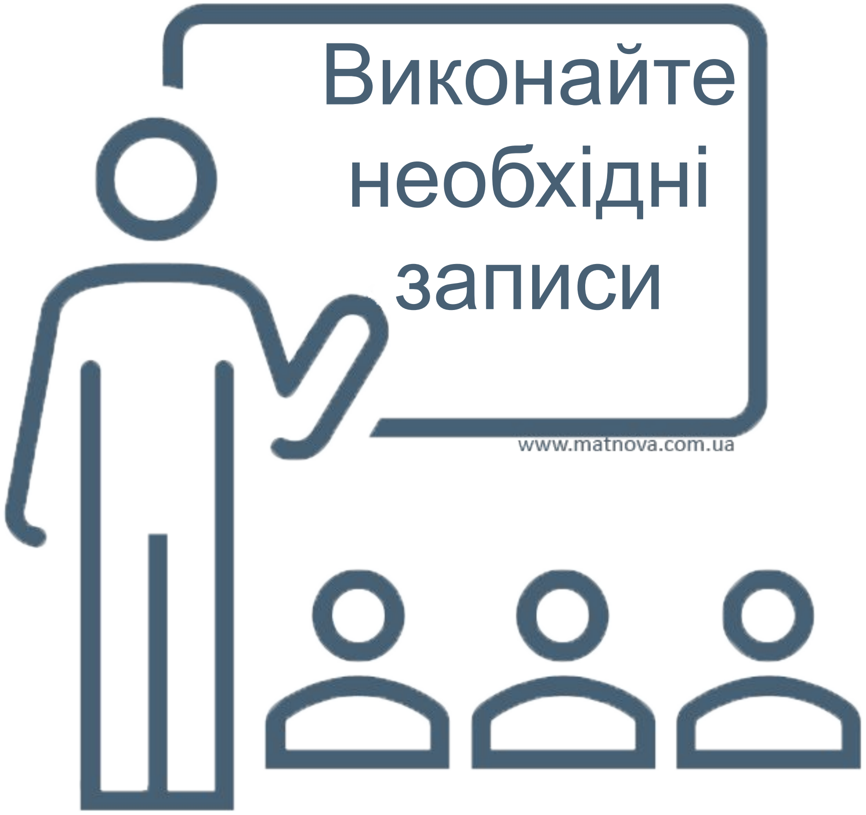
Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-4; 1)$ і $\vec{b}(0; 5)$
2) $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(4; 3)$
3) $\vec{a}(-5; 3)$ і $\vec{b}(-2; 7)$

Розв’язання:

1) $\vec{a}(-4; 1) \cdot \vec{b}(0; 5) = -4 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5$
2) $\vec{a}(2; -1) \cdot \vec{b}(4; 3) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = 8 - 3 = 5$
3) $\vec{a}(-5; 3) \cdot \vec{b}(-2; 7) = -5 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 = 10 + 21 = 31$





Який з векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 7$

$\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$

Який з векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$?

№2

Який з векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$?

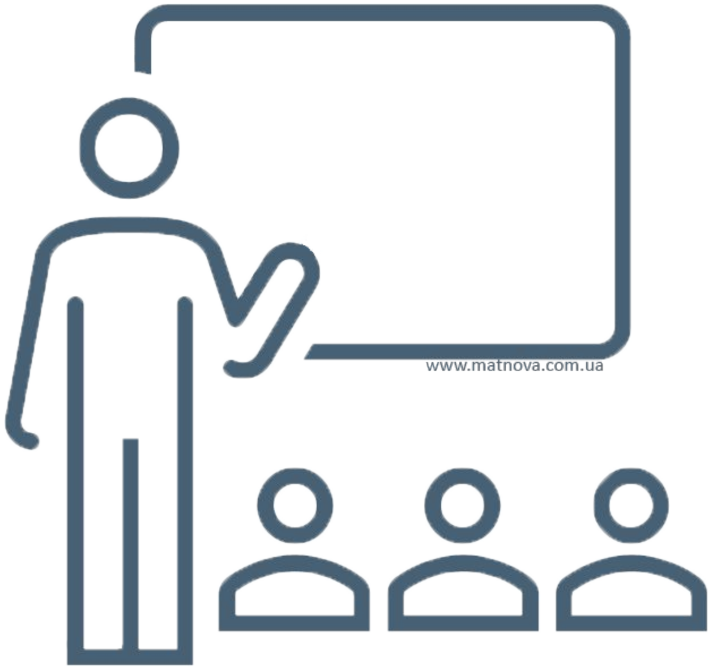
$\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$ $\qquad$ $\vec{a} \cdot \vec{c} = 7$

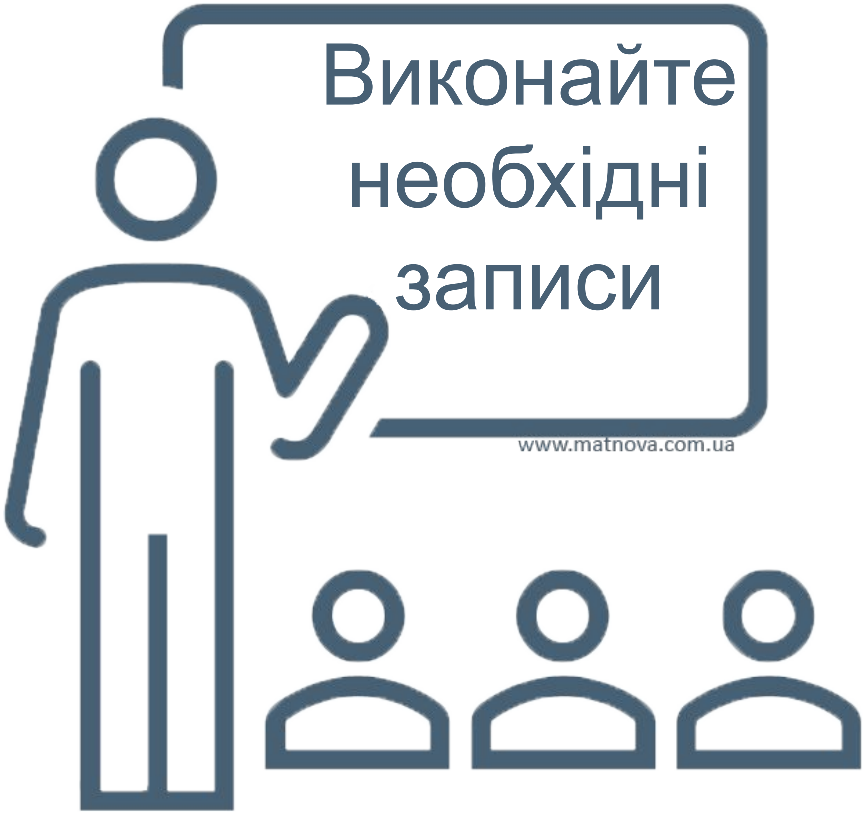
$\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$

Розв'язання:

Так як $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{d}$

Відповідь: $\vec{a} \perp \vec{d}$





Дано вектори $\vec{m}(3; -2)$ і $\vec{n}(x; 4)$. При якому значенні x $\vec{m} \cdot \vec{n} = -2$?

Дано вектори $\vec{m}(3; -2)$ і $\vec{n}(x; 4)$. При якому значенні x $\vec{m} \cdot \vec{n} = -2$?

№3

Дано вектори $\vec{m}(3; -2)$ і $\vec{n}(x; 4)$. При якому значенні x $\vec{m} \cdot \vec{n} = -2$?

Розв'язання:

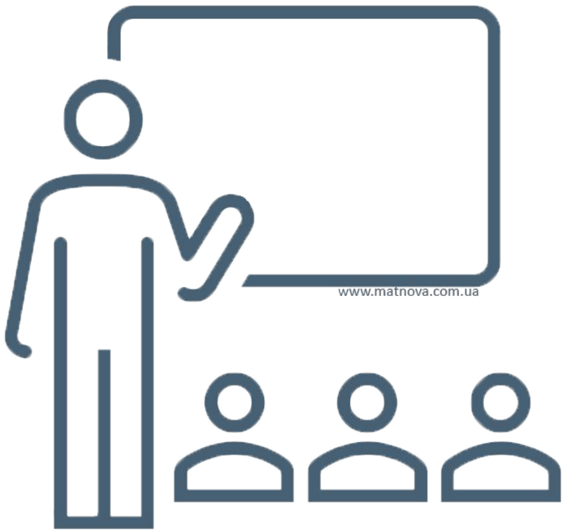
$$\left.\begin{aligned} \vec{m} \cdot \vec{n} &= -2 \\ \vec{m} \cdot \vec{n} &= 3 \cdot x + (-2) \cdot 4 \end{aligned}\right| \rightarrow \mathbf{3x - 8 = -2}$$

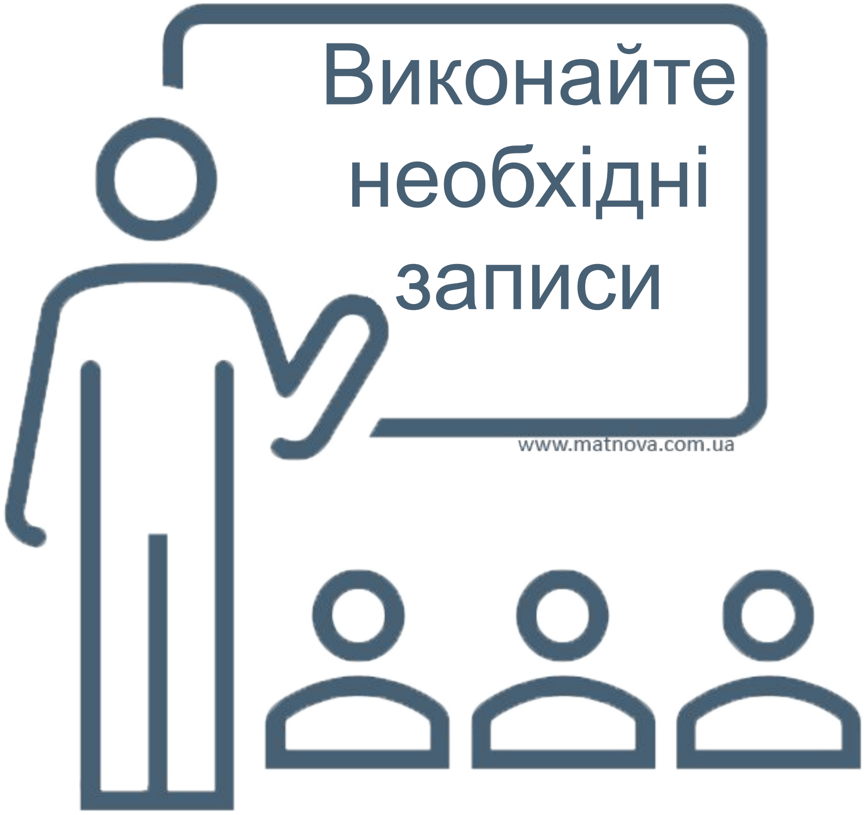
$3x - 8 = -2$

$3x = 6$

$x = 2$

Відповідь: 2





Дано: $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \eta$. Знайдіть $\vec{m} \cdot \vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}| = 7;\ |\vec{n}| = 2;\ \eta = 30°$

2) $|\vec{m}| = 4;\ |\vec{n}| = 5;\ \eta = 180°$

3) $|\vec{m}| = 8;\ |\vec{n}| = 1;\ \eta = 60°$

4) $|\vec{m}| = 2;\ |\vec{n}| = 4;\ \eta = 135°$

№4

Дано: $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \eta$. Знайдіть $\vec{m} \cdot \vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}| = 7$; $|\vec{n}| = 2$; $\eta = 30°$
2) $|\vec{m}| = 4$; $|\vec{n}| = 5$; $\eta = 180°$
3) $|\vec{m}| = 8$; $|\vec{n}| = 1$; $\eta = 60°$
4) $|\vec{m}| = 2$; $|\vec{n}| = 4$; $\eta = 135°$

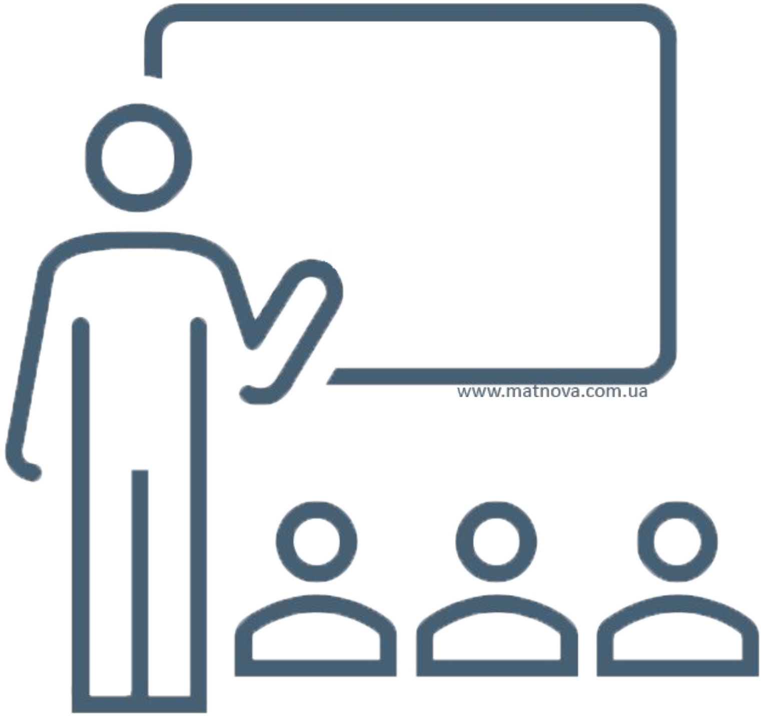
Розв’язання:

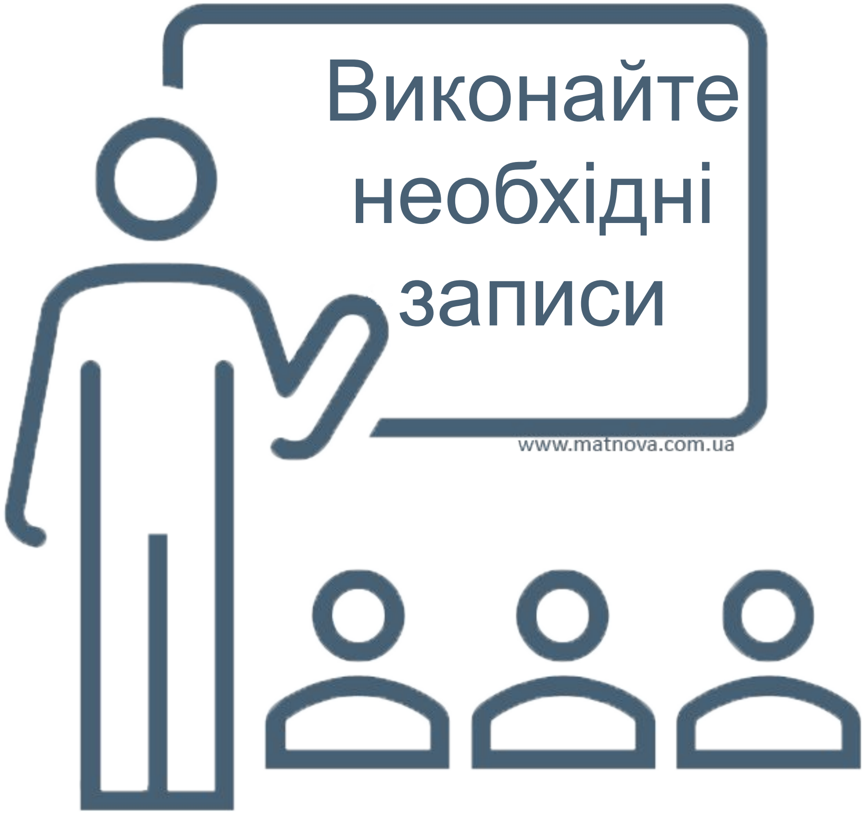
1) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 7 \cdot 2 \cdot \cos 30° = 7 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

2) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 180° = 4 \cdot 5 \cdot (-1) = -20$

3) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 8 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4$

4) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 4 \cdot \cos 135° = 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$





При якому значенні x вектори $\vec{m}(-2; 4)$ і $\vec{n}(x; 4)$ будуть взаємно перпендикулярними?

При якому значенні x вектори $\vec{m}(-2;4)$ і $\vec{n}(x;4)$ будуть взаємно перпендикулярними?

№5

При якому значенні x вектори $\vec{m}(-2;4)$ і $\vec{n}(x;4)$ будуть взаємно перпендикулярними?

Розв'язання:

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли сума добутків їх відповідних координат дорівнює нулю, отже:

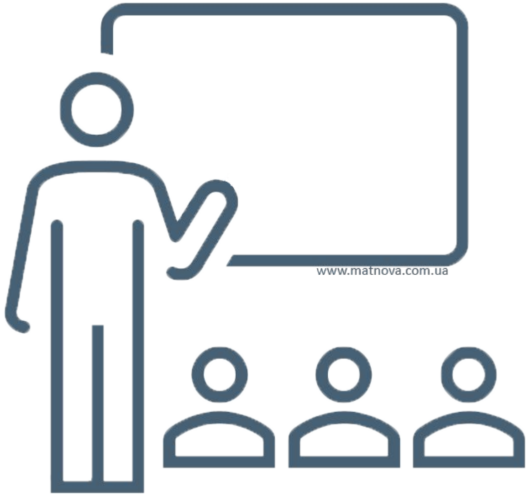
$$\vec{m}\cdot\vec{n} = -2x + 16$$

$$-2x + 16 = 0$$

$$-2x = -16$$

$$x = 8$$

Відповідь: $\vec{m} \perp \vec{n}$, якщо $x = 8$



Відповідаємо

Що ми називаємо скалярним добутком векторів заданих своїми координатами?

Що ми називаємо скалярним квадратом вектора? Чому він дорівнює?

Що ми називаємо кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$?

Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомі їх довжини і кут між ними?

Сформулюйте ознаку і властивість перпендикулярних векторів

Як знайти косинус кута між векторами?

Бажаю творчих успіхів!