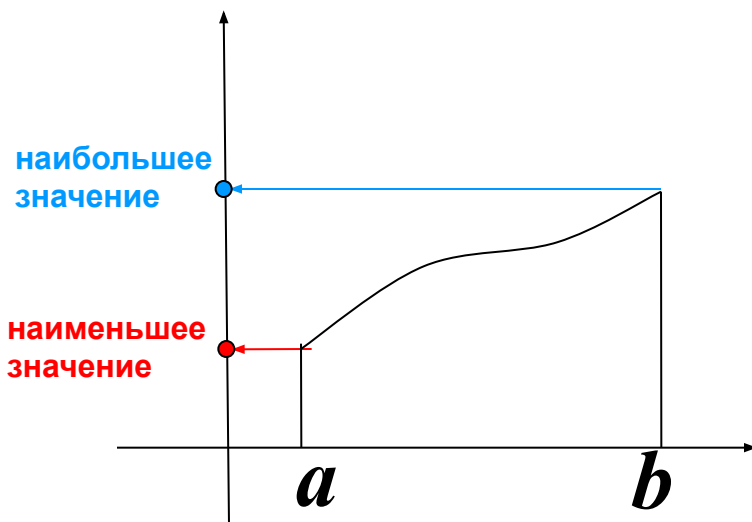


Наибольшее и наименьшее значение функции

функция возрастает



Предположим, что функция  $f$  не имеет на отрезке  $[a; b]$  критических точек.

Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке.

Значит,

наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$  — это значения в концах  $a$  и  $b$ .

функция убывает

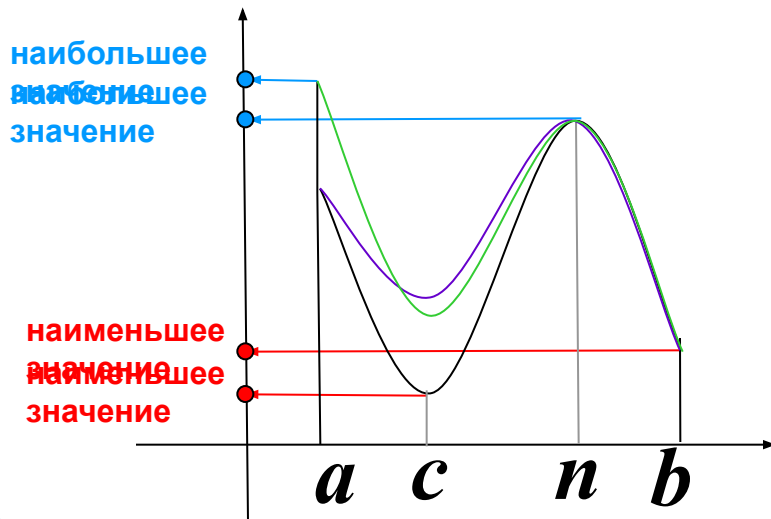
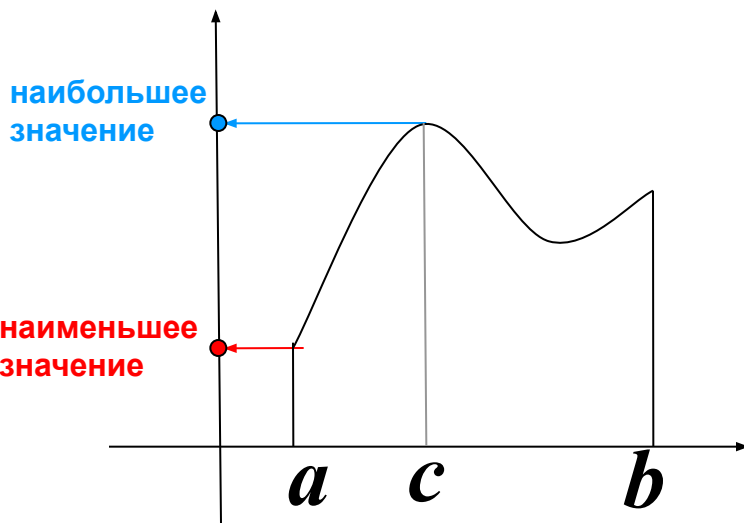


## Примеры

Пусть теперь функция  $f$  имеет на отрезке  $[a; b]$  конечное число критических точек.

Наибольшее и наименьшее значения функция  $f$  может принимать в критических точках функции или в точках  $a$  и  $b$ .

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.



1.

Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 27x$  на отрезке  $[0; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(0) = 0$$

$$y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$2) y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$$

$$x = 3 \in [0; 4]$$

$$x = -3 \notin [0; 4]$$

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ	-	5	4			
-------	---	---	---	--	--	--

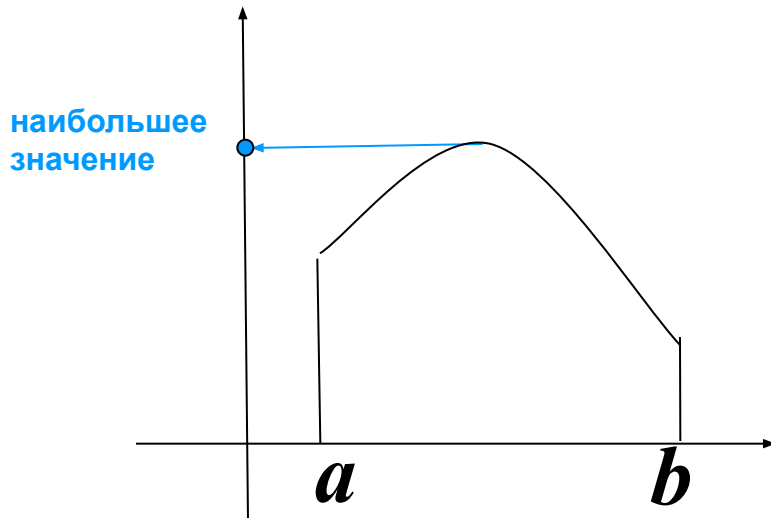
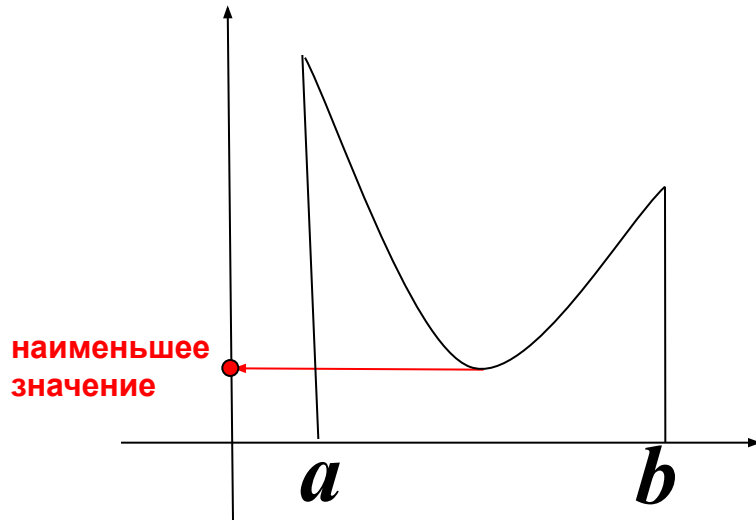
Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

<b>Этапы</b>	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$							
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$							
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$							
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$							
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	<table border="1" data-bbox="672 1172 1626 1286"><tr><td data-bbox="672 1172 909 1286">Ответ</td><td data-bbox="909 1172 1045 1286">-</td><td data-bbox="1045 1172 1161 1286">5</td><td data-bbox="1161 1172 1277 1286">4</td><td data-bbox="1277 1172 1392 1286"></td><td data-bbox="1392 1172 1508 1286"></td><td data-bbox="1508 1172 1626 1286"></td></tr></table>	Ответ	-	5	4			
Ответ	-	5	4					

Предположим, что функция  $f$  имеет на отрезке  $[a; b]$  **одну** точку экстремума.

Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.

Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.



## Другой способ решения

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	1) $y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$ <div data-bbox="1335 743 1850 1029" style="border: 1px solid lightblue; padding: 5px; color: red;">Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить</div>
<del>4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее</del>	<div data-bbox="691 1043 1309 1158" style="border: 1px solid lightcoral; padding: 5px; display: inline-block;"><b>Ответ</b> - <b>5</b> <b>4</b></div> <div data-bbox="1335 1033 1850 1229" style="border: 1px solid lightblue; padding: 5px; color: red;">на вычислениях значений функции в концах отрезка.</div> <p>Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.</p>

2. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^3 - 3x + 4$  на отрезке  $[-2; 0]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(0) = 4$$

$$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = 2$$

$$2) y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$$x = 1 \notin [-2; 0]$$

$$x = -1 \in [-2; 0]$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Ответ

6



3. Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $[1; 4]$

Значения функции в концах отрезка.

$$1) y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3$$

$$y(4) = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 4 + 3 = 39$$

$$2) y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)(x - \frac{1}{3})$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

$$x_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \in [1; 4]$$

$$x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \notin [1; 4]$$

$$y(1) = 3$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку. Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ

3

4. Найдите наибольшее значение функции  $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$  на отрезке  $[-3; 3]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9(-3) - 7 = -9 + 27 - 7 = 11$$

$$y(3) = \frac{3^3}{3} - 9 \cdot 3 - 7 = 9 - 27 - 7 = -25$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3x^2}{3} - 9 = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x = 3 \in [-3; 3]$$

$$x = -3 \in [-3; 3]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(-3) = 11$$

$$y(-3) = -25$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

В 11	1	1				
------	---	---	--	--	--	--

5. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$  на отрезке  $[1; 9]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наибольшее из полученных значений.

Ответ

1

6. Найдите наименьшее значение функции  $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$  на отрезке  $[1; 9]$

Значения функции в концах отрезка.

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = (3^2)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 27 - 27 + 1 = 1$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3x + 1$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4 \in [1; 9]$$

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(4) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = (2^2)^{\frac{3}{2}} - 12 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

Ответ

-


3

8. Найдите наибольшее значение функции  $y = x + \frac{36}{x}$  на отрезке  $[1; 9]$

$$y = x + 36 \cdot \frac{1}{x}$$

ООФ:  $x \neq 0$

Значения функции в концах отрезка.



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наибольшее из полученных значений.

$y(1) = 1 + 36 \cdot \frac{1}{1} = 37$  **Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде**

$$y(9) = 9 + 36 \cdot \frac{1}{9} = 9 + 4 = 13$$

$$y' = 1 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-6)(x+6)}{x^2}$$

$$x = 6 \in [1; 9]$$

$$x = -6 \notin [1; 9]$$

$$x = 0 \notin D(y)$$


$$y(6) = 6 + 36 \cdot \frac{1}{6} = 6 + 6 = 12$$

Ответ

3

7

--	--	--	--	--	--	--


$$(\cos x)' = -\sin x$$

14. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7\cos x + 16x - 2 \text{ на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$$

1. Найти  $f'(x)$

$$y' = -7\sin x + 16$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\emptyset \text{ т.к. } \sin x \in [-1; 1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16 \cdot \left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16 \cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Ответ

5

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что  $y' > 0$ . Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке  $x=0$ .

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.



$$(\sin x)' = \cos x$$

15. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7 \text{ на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$$

1. Найти  $f'(x)$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$$10\cos x = \frac{36}{\pi}$$

$$\cos x = \frac{36}{10\pi}$$

$$\emptyset \text{ т.к. } \cos x \in [-1; 1]$$

Критических точек нет. Тогда наибольшее значение функция будет принимать в одном из концов отрезка.

Можно было и раньше догадаться, что наибольшее значение будет именно в левом конце отрезка! Как?

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi} \cdot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = -10 \cdot \frac{1}{2} + 30 + 7 = 32$$

Синус – нечетная функция

Формула приведения

$$y(0) = 10 \sin\left(\sin 0 - \frac{5\pi}{6}\right) + 7 = 10 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -10 \sin \frac{\pi}{2} = -10$$

Ответ


3

2

= -sin

$\frac{\pi}{6}$

= - $\frac{1}{2}$


$$(\cos x)' = -\sin x$$

1. Найти  $f'(x)$

$$y' = -5 \sin x - 6$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-5 \sin x - 6 = 0$$

$$\sin x = -\frac{6}{5}$$

$$\emptyset \text{ т.к. } \sin x \in [-1; 1]$$

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 5 \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 4 = 9\pi + 4$$

$$y(0) = 5 \cos 0 - 0 + 4 = 9$$

Функция на всей области определения убывает. Нетрудно догадаться, что  $y' < 0$ . Тогда наименьшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке  $x=0$ .

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наименьшее.

Ответ

9



17. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

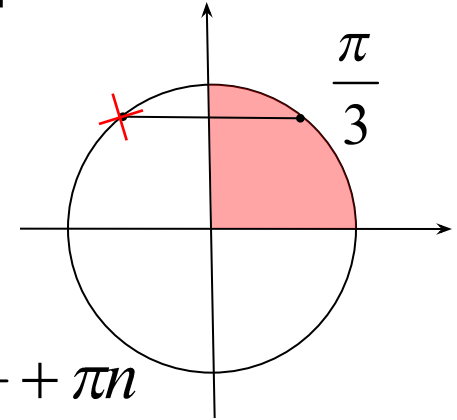
1. Найти  $f'(x)$   $y' = -12 \sin x + 6\sqrt{3}$

2. Найти критические точки,  $-12 \sin x + 6\sqrt{3} = 0$

взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$$



$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos \frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \cos \frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

$$y(0) = 12 \cos 0 + 6\sqrt{3} \cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi$$

Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ответ

1

2

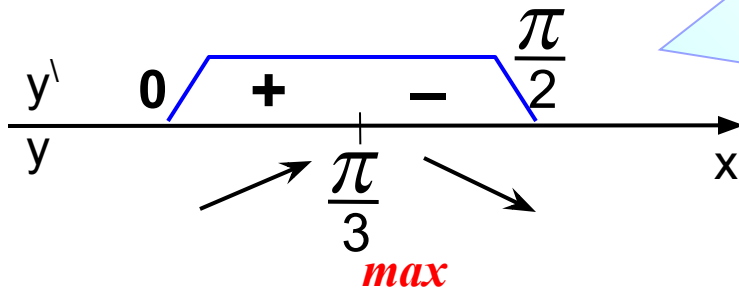
**17.** Найдите наибольшее значение функции  $y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

1. Найти  $f'(x)$   $y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$

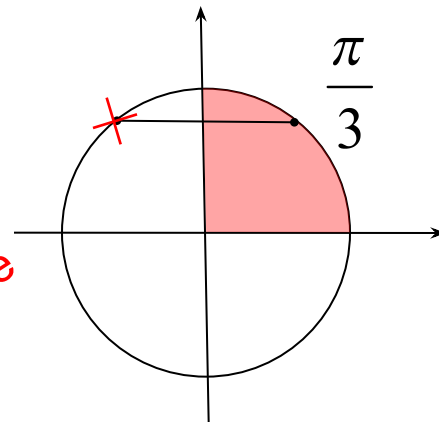
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Можно рассуждать иначе



Убедимся, что данная точка является точкой максимума на заданном промежутке. Значит, наибольшее значение функция достигает именно в этой точке. Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

Ответ

1

2

**18.** Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3} \cos x \quad \text{на отрезке} \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Найти  $f'(x)$

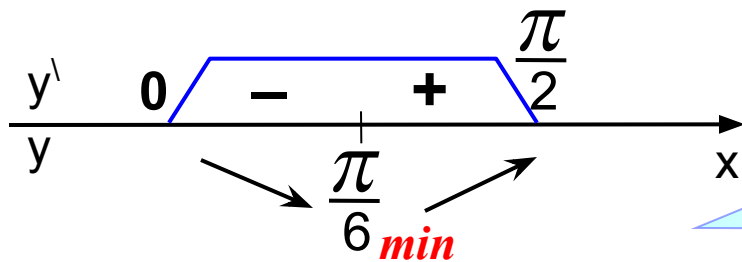
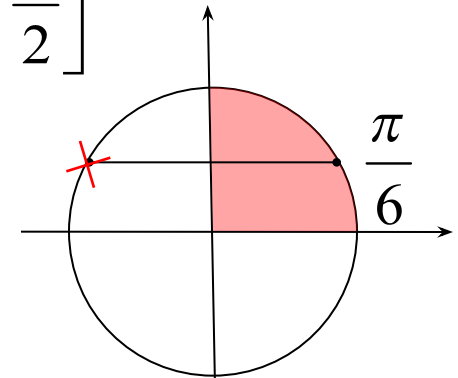
$$y' = -\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3} \sin x$$

2. Найти

критические точки,  
взять те, которые  
принадлежат  
данному отрезку.

$$-\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3} \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$




$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{14\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{6} = 11 - 7 = 4$$

Можно убедиться, что данная точка является точкой минимума на заданном промежутке.

Значит, наименьшее значение функции достигается именно в этой точке.

Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

заданный отрезок  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1. Найти  $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 + \pi - \pi + 5 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi - \pi + 5 = 9 - 2\pi$$

$$y(0) = -0 - 0 - \pi + 5 = 5 - \pi$$

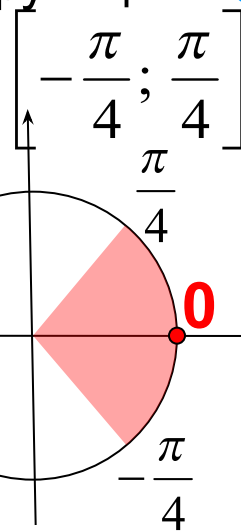
19. Найдите наименьшее значение функции

$y = 4tgx - 4x - 4\pi + 5$  на отрезке

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4$$

$$\frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$




Нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

3. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка.

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наименьшего.

Ответ

1



$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

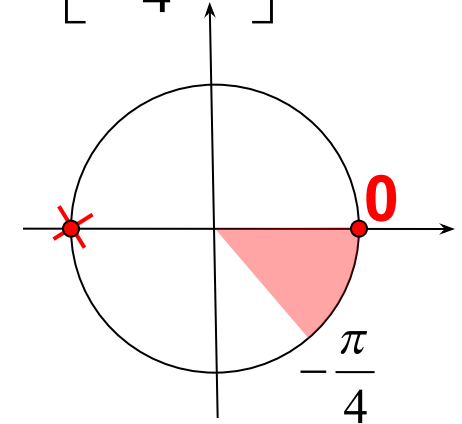
20. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3\operatorname{tg}x - 3x + 5 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

$$\frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 0$$

$$\cos^2 x = 1$$



1. Найти  $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

3. Вычислим значения функции в критических точках и в концах отрезка.

4. Из вычисленных значений сделаем выбор наибольшего значения, которые попадут в заданный отрезок

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 5 = -3 + \frac{3\pi}{4} + 5 = 2 + \frac{3\pi}{4}$$

$$y(0) = 3\operatorname{tg}0 - 0 + 5 = 5$$

Нам не нужны ВСЕ

значения, а только те, которые попадают в заданный отрезок

Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок

В 11

5