

Тема №3

Електроємкость

Задача 1 Задача 3 Задача 2

Задача 4

Задача 5

Задача 6

Задача 7

Задача 8

Теоретическое введение

Электроемкость

Потенциал уединенного проводника и его заряд связаны соотношением

$$q = C\varphi,$$

где C – емкость уединенного проводника.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора,

d – расстояние между пластинами.

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rR}{R - r},$$

где r и R – радиусы внутренней и внешней сфер. В частном случае, когда $R = \infty$,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r \text{ - емкость уединенного шара.}$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)},$$

где L – высота коаксиальных цилиндров,

r и R – радиусы внутреннего и внешнего

цилиндров.

Емкость системы

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots -$$

конденсаторов при параллельном соединении

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots -$$

конденсаторов,

при последовательном соединении конденсаторов.



Энергия уединенного заряженного проводника может быть найдена по одной из следующих формул

$$W = \frac{qU}{2}, W = \frac{CU^2}{2}, W = \frac{q^2}{2C}.$$

В случае плоского конденсатора энергия

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d}, W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2}, W = \frac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора,

σ – поверхностная плотность заряда на пластинах,

U – разность потенциалов между пластинами,

d – расстояние между ними.

Величина

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

называется объемной плотностью энергии.

Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$



Задача 1

Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S=1\text{ м}^2$, расстояние между ними $d = 1,5\text{ мм}$.
Найти емкость C этого конденсатора.



Задача 1

Дано:

$$S = 1 \text{ м}^2$$

$$d = 1,5 \text{ мм}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м}$$

$$C = ?$$

Решение:

Полное
напряжение

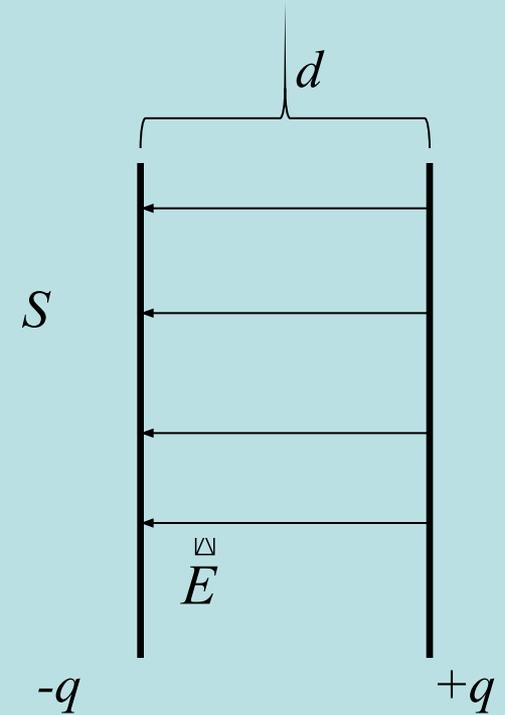
$$U = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0},$$

где d – расстояние между пластинами.

полный заряд пластины:

$$q = \sigma S, \quad \text{поэтому}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$



Вычисления:

$$C = \frac{1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ (Ф)}$$

Ответ: емкость плоского воздушного конденсатора равна $C=5,9$ нФ.



Задача 2

Конденсатор предыдущей задачи заряжен до разности потенциалов $U=300\text{В}$.
Найти поверхностную плотность заряда на его пластинах.



Задача 2

Дано:

$$U_0 = 300B$$

$$S = 1 \text{ м}^2$$

$$\varepsilon = 1$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$d = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

σ - ?

Решение:

Напряженность поля в плоском конденсаторе выражается формулой

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

$$U = \int_0^x E dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^x dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x.$$

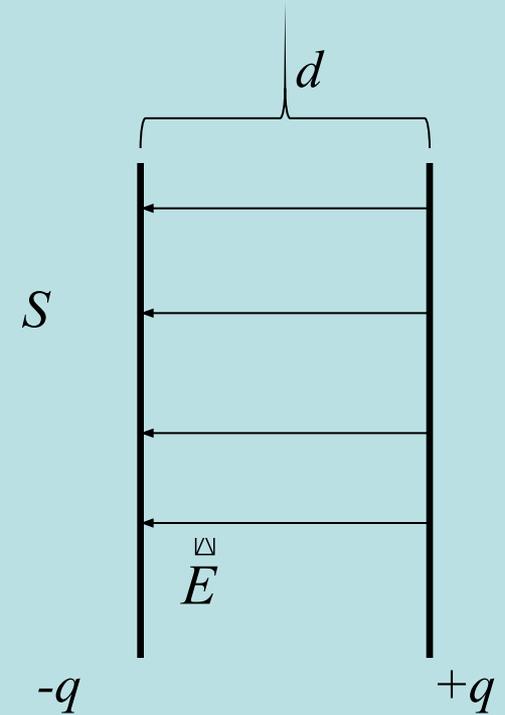
Полная разность потенциалов U_0 между электродами равна

$$U_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \Rightarrow \sigma = \frac{U_0 \varepsilon_0}{d}.$$

Вычисления:

$$\sigma = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 300}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right)$$

Ответ: поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma = 1,77 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$.



Задача 3

Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $U_1 = 300 \text{ В}$, расстояние между ними $d=5 \text{ мм}$. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $S = 0,01 \text{ м}^2$. После отключения конденсатора от источника напряжения пространство между пластинами конденсатора заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов между пластинами после заполнения? Найти емкости конденсатора и поверхностные плотности заряда на пластинах до и после заполнения.



Задача 3

Дано:

$$S = 0,01 \text{ м}^2$$

$$d = 5 \text{ мм}$$

$$U_1 = 300 \text{ В}$$

$$\varepsilon_2 = 2,6$$

$$\varepsilon_1 = 1$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$U_2 - ?;$$

$$C_1 - ?; C_2 - ?;$$

$$\sigma_1 - ?; \sigma_2 - ?$$

Решение:

$$q_1 = q_2$$

$$\sigma = \frac{q}{S} - \text{const.}$$

$$\text{Т.к. } E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{U}{d},$$

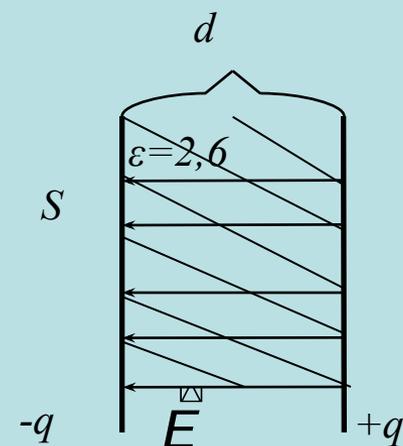
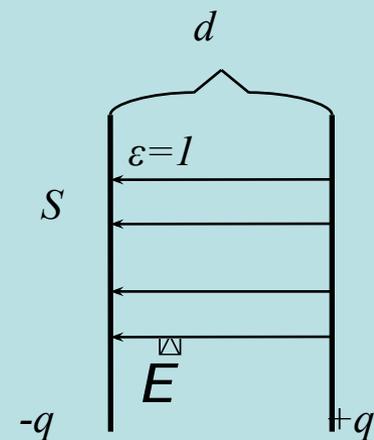
$$\sigma d = U_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1, \quad \sigma d = U_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 .$$

$$U_1 \varepsilon_1 = U_2 \varepsilon_2,$$

$$U_2 = \frac{U_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d}.$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{q}{S} = \frac{CU}{S}.$$



Ответ: до и после заполнения эбонитом имеем

$$U_2 = 115 \text{ В}; C_2 = 46 \text{ нФ}; C_1 = 17,7 \text{ нФ}; \sigma_1 = \sigma_2 = 531 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$



Задача 4

Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d=1$ см друг от друга, приложена разность потенциалов $U=100$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка кристаллического бромистого таллия ($\varepsilon = 173$) толщиной $d_0 = 9,5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения пластинку кристалла вынимают. Какова будет после этого разность потенциалов между пластинами конденсатора?



Задача 4

Дано

$$\dot{d} = 0,01 \text{ м}$$

$$U_1 = 100 \text{ В}$$

$$\varepsilon_{01} = 173$$

$$d_0 = 9,5 \text{ мм}$$

$$U_2 = ?$$

Решение:

$$U_1' = \frac{q}{C_1}, \quad U_2' = \frac{q}{C_2}.$$

$$U_1 = U_1' + U_2'.$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}.$$

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i},$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d - d_0}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_0}{\varepsilon_{01} \varepsilon_0 S}.$$

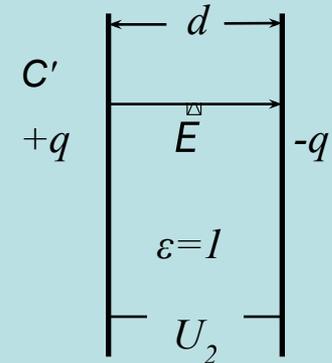
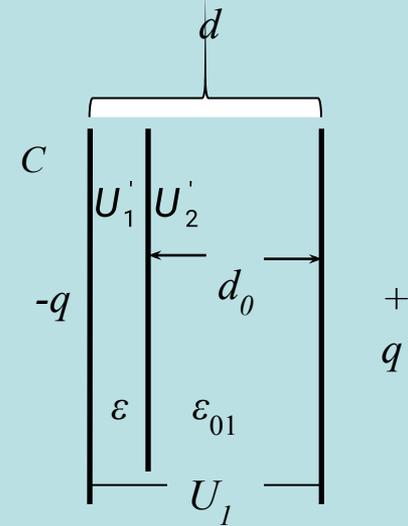
$$C = \frac{\varepsilon_{01} \varepsilon_0 S}{d \varepsilon_{01} - d_0 (\varepsilon_{01} - 1)}. \quad (1)$$

$$U_1 = \frac{q}{C} \Rightarrow q = CU_1. \quad (2) \quad \text{Подставим (1) в (2),} \quad q = \frac{\varepsilon_{01} \varepsilon_0 S U_1}{d \varepsilon_{01} - d_0 (\varepsilon_{01} - 1)}.$$

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad q = q'$$

$$U_2 = \frac{q}{C'} = \frac{\varepsilon_{01} \varepsilon_0 S U_1 d}{(d \varepsilon_{01} - d_0 (\varepsilon_{01} - 1)) \varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_{01} U_1 d}{d \varepsilon_{01} - d_0 (\varepsilon_{01} - 1)}.$$

$$U_2 = \frac{100 \cdot 173 \cdot 0,1}{173 \cdot 0,01 - 172 \cdot 9,5 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^3 \text{ (В)}.$$

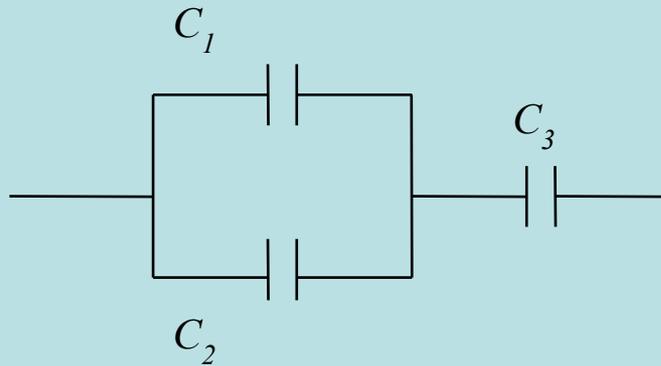


Ответ: разность потенциалов станет 1,8 кВ.



Задача 5

Найти емкость C системы конденсаторов, изображенной на рисунке. Емкость каждого конденсатора $C=0,5$ мкФ.



Задача 5

Дано:

$$C=0,5 \text{ мкФ}$$

$C - ?$

Решение:

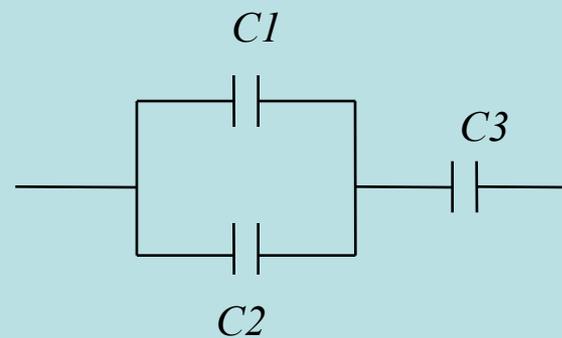
$$C_{\text{рез.б.}} = C_1 + C_2,$$

$$\frac{1}{C_{\text{рез.}}} = \frac{1}{C_{\text{рез.б.}}} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{\text{рез.}}} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$C_{\text{рез.}} = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{2 C^2}{3 C} = \frac{2}{3} C.$$

$$C = \frac{2}{3} \cdot 0,5 = \frac{1}{3} (\text{мкФ}).$$



Ответ: емкость системы конденсаторов составляет $\frac{1}{3}$ мкФ.



Задача 6

При помощи электрометра сравнивали между собой емкости двух конденсаторов. Для этого заряжали их до разностей потенциалов $U_1=300$ В и $U_2=100$ В и соединяли оба конденсатора параллельно. Измеренная при этом разность потенциалов между обкладками конденсатора оказалось равной $U=250$ В. Найти отношение емкостей $\frac{C_1}{C_2}$.



Задача 6

Дано:

$$U_1 = 300 \text{ В}$$

$$U_2 = 100 \text{ В}$$

$$U = 250 \text{ В}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = ?$$

Решение:

$$q_1 = C_1 U_1, \quad q_2 = C_2 U_2.$$

$$q = q_1 + q_2.$$

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \quad (1)$$

$$q_1' = C_1 U, \quad q_2' = C_2 U,$$

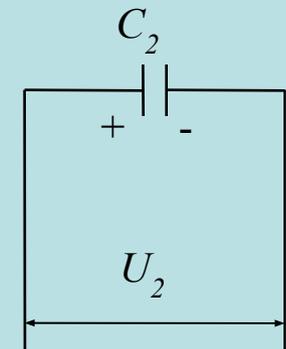
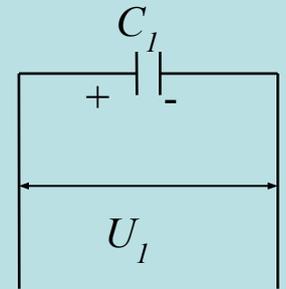
Подставив значения q_1 , q_2 , q_1' , q_2' в выражение (1), получим

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = C_1 U + C_2 U \quad \text{поделим на } C_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} U_1 + U_2 = \frac{C_1}{C_2} U + U \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U}.$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{250 - 100}{300 - 250} = 3.$$

Ответ: отношение емкостей конденсаторов



Задача 7

Пластины плоского конденсатора площадью $S = 0,01 \text{ м}^2$ каждая притягиваются друг к другу с силой $F=30 \text{ мН}$. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Найти заряды q , находящиеся на пластинах, напряженность E поля между пластинами и объемную плотность энергии поля.



Задача 7

Дано:

$$S = 0,01 \text{ м}^2$$

$$F = 30 \text{ мН}$$

$$\varepsilon = 6$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$q, E, w_0 - ?$$

Решени

е:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad (1) \quad \sigma = \frac{q}{S} \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и выразим q

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} \Rightarrow q = \sqrt{2\varepsilon\varepsilon_0 FS} \quad (3) \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (4)$$

Подставим в (4) выражение (2), получим

$$E = \frac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0} \text{ или } E = \sqrt{\frac{2F}{S\varepsilon\varepsilon_0}} \quad (5)$$

3) Объемная плотность энергии электрического поля определяется формулой

$$w_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (6)$$

Подставим (5) в (6) $w_0 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 F}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{F}{S}$.

$$E = \sqrt{\frac{1,77 \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 0,01}} = 333 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right)$$

$$w_0 = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 3 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right)$$

Ответ: заряд, находящийся на пластинах, $q = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$
равен
, напряженность поля между пластинами $E = 333 \cdot 10^3 \text{ В/м}$
составляет
, объемная плотность энергии электрического поля $w_0 = 3 \text{ Дж/м}^3$
равна



Задача 8

Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом $W=20$ мкДж. После того, как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую нужно было совершить против сил электрического поля, чтобы вынуть диэлектрик, $A=70$ мкДж. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика.



Задача 8

Дано

$$W = 20 \text{ мкДж}$$

$$A = 70 \text{ мкДж}$$

$\varepsilon - ?$

Решение:

$$W = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow q^2 = 2CW. \quad (1)$$

$$A = \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right). \quad (2)$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} \quad (3)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4)$$

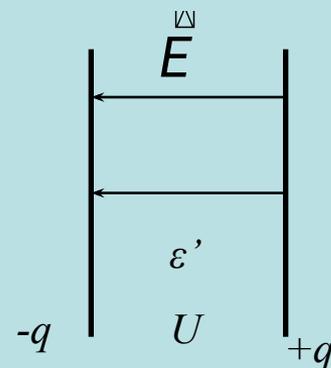
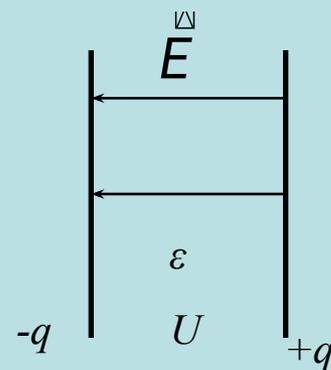
Подставим (3), (4), (1) в выражение, получаем

$$\Delta W = \frac{2\varepsilon \varepsilon_0 S W}{2d} \left[\frac{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} - \frac{\varepsilon_0 S}{d}}{\frac{\varepsilon \varepsilon_0^2 S^2}{d^2}} \right]$$

$$\Delta W = \frac{2\varepsilon \varepsilon_0 S W}{2d} \left[\frac{\varepsilon_0 S}{d} (\varepsilon - 1) \right] \frac{d^2}{\varepsilon \varepsilon_0^2 S^2}$$

$$\Delta W = W(\varepsilon - 1) \quad \varepsilon = \frac{\Delta W + W}{W}. \quad \varepsilon = \frac{A + W}{W}.$$

$$\varepsilon = \frac{20 + 70}{20} = 4,5.$$



Ответ: диэлектрическая проницаемость диэлектрика равна $\varepsilon = 4,5$.

