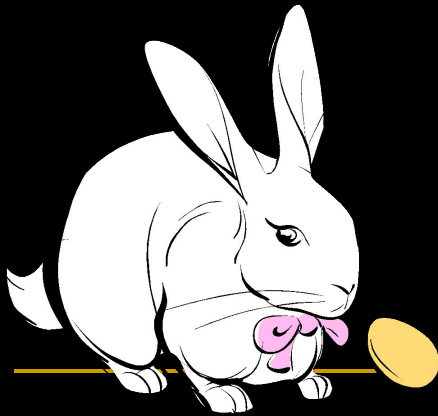


# Занятие 4

## Дисперсионный анализ ANOVA (продолжение)



Сложная «омнибусная» гипотеза АНОВЫ:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_k$$

Похожа на стрельбу из дробовика: не нужно особенно точно целиться, непонятно, какая дробинка попала в какую мишень – какая из маленьких гипотез не верна.



Что делать, если мы изначально хотим **проверить не все эти гипотезы?** Хотим выстрелить из винтовки в строго определённую мишень?



## A priori Tests (ANOVA) = Planned comparisons

Вся мощность теста направляется на одну гипотезу, остальные игнорируются.



**Важно:** то, какую гипотезу тестировать, выбирают **ЗАРАНЕЕ**, до проведения какого-либо анализа! В идеале – ещё при постановке исследования.

Процедура тестирования – почти как t-критерий Стьюдента.

## A priori Tests

Обычно используются для тестирования комплексных (а не парных) гипотез.

Dr. J разработал новую диету и собирается протестировать её эффективность. Из 20 добровольцев **группа 1** ( $n=5$ ) соблюдает новую диету; **группа 2** ( $n=5$ ) занимается на тренажёре; **группа 3** ( $n=5$ ) занимается аэробикой; **группа 4** ( $n=5$ ) бегают по утрам.



## A priori Tests

Зависимая переменная – число грамм, на которое изменилась масса тела добровольцев за 3 месяца.

Можно было бы провести ANOVA затем апостериорный тест, но нас интересует лишь сравнение диеты Dr. J с разными видами физических упражнений.



## A priori Tests

$$H_0 : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{3}$$

$$H_0 : \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 = 0$$

«**Контраст**» = «сравнение» (contrast, comparison) – линейная комбинация средних значений.

Коэффициенты сравнения – константы, на которые умножены средние. В сумме = нулю:  $\sum C_j = 0$

Из наших 4-х групп рассчитываем

$$C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + C_3\mu_3 + C_4\mu_4$$

## A priori Tests

$$H_0 : \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 - \frac{1}{3}\mu_4 \neq 0$$

Статистика =  $\frac{\text{параметр **выборки** – параметр **популяции**}{\text{стандартная **ошибка** параметра выборки}}$

Статистика =  $\frac{\text{выборочное сравнение}}{\text{стандартная **ошибка** выборочного сравнения}}$

Она имеет t-распределение – почти как двухвыборочный критерий Стьюдента

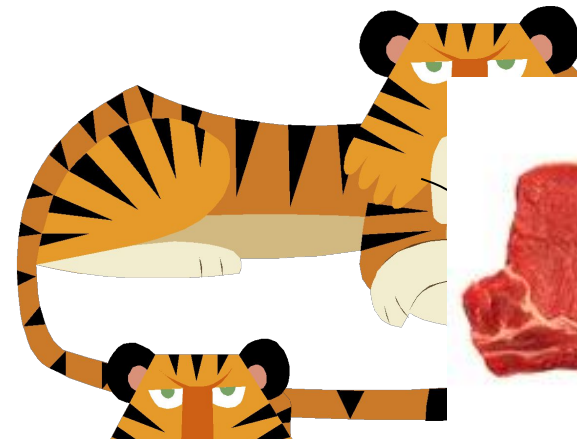
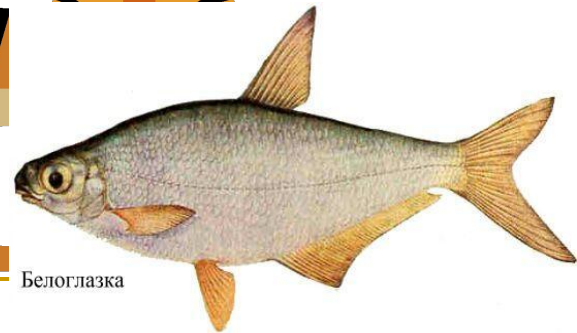
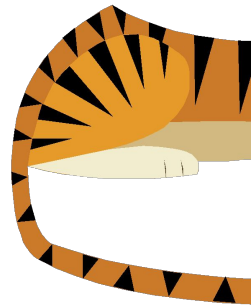
## A priori Tests

Ещё один пример:

У нас 4 группы тигров, их кормили: овощами; фруктами; рыбой; мясом.

Вопрос: отличалась ли масса тигров, питавшихся животной и растительной едой?

$$H_0 : \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$



Белолазка



# Planned comparisons

Data: тигры и еда.sta (10v by 48c)

	1	2	3
	масса тела	тип еды	ПОЛ
1	151	овоци	самец
2	135	овоци	самец
3	137	овоци	самец
4	118	овоци	самец
5	132	овоци	самец
6	135	овоци	самец
7	131	овоци	самец
8	137	овоци	самец
9	121	овоци	самка
10	140	овоци	самка
11	152	овоци	самка
12	133	овоци	самка
13	151	овоци	самка

General ANOVA/MANOVA: тигры и еда

Quick

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA
- Repeated measures ANOVA

Specification method:

- Quick specs dialog
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Multiple dependent variables can be specified for any type of analysis.

Use One-way ANOVA to analyze designs with a single categorical independent variable (factor).

OK

Cancel

Options

Open Data

SELECT CASES

Weighted moments

DF =

W-1 N-1

ANOVA Results 1: тигры и еда

Profiler Resids Matrix Report

Quick Summary Means **Comps**

Effect:

"тип еды"

Planned comparisons of LS means

Display least squares means

**Contrasts for LS means** Compute

Enter contrasts separately or together

- Separately for each factor
- Together (contrast vectors)

Contrasts for dependent variables

- No
- Yes

In multivariate designs, contrasts can be specified for the dependent variables. Press F1 for more help.

For post-hoc comparison, click on the More results button, and then use the Post-hoc tab.

More results Modify Close

Options

Specify Contrasts for this Factor: тигры и е...

тип еды	1.	2.	3.
ОВОЩИ	-1		
Фрукты	-1		
мясо	1		
рыба	1		

Quick Fill (Insert Value)

-2 -1 0 1 2

Cell  Row  Column

Enter at least one set (column) of contrasts. Select a Predefined set, or enter a custom set (type them in or use Quick Fill); to ignore a level enter a zero; to compare levels assign integers with opposite signs; to collapse over levels assign all 1's

и еда)

Contrast Estimates (тигры и еда)						
Dependent variable: масса тела						
Contrast	Estimate	Std.Err	t	p	-95,00% Cnf.Lmt	+95,00% Cnf.Lmt
CNTRST1	80,00000	3,991417	20,04301	0,00	72,01319	87,98681

мы отвергаем  $H_0$ .

Масса тигров, питавшихся растительной и животной едой, различалась

## Planned comparisons:

**МОЩНОСТЬ** такого теста **ВЫШЕ**, чем последовательное использование АНОВЫ и методов множественного сравнения!



# Repeated measures ANOVA

## Сравнение связанных групп

Преподаватель решил узнать, как у его студентов продолжительность занятий зависит от дня недели (он поделил время на 15-минутные блоки).

*Time blocks (15-minute periods) spent studying*

<i>Person</i>	<i>Monday</i>	<i>Tuesday</i>	<i>Wednesday</i>	<i>Thursday</i>	<i>Person mean</i>
Pat	15	10	8	7	10
Bobby	10	11	4	7	8
Riki	4	9	7	0	5
Jean	10	10	7	1	7
Lynn	4	2	4	2	3
Jo	12	17	9	14	13
Means	9.167	9.833	6.500	5.167	



## Repeated measures ANOVA

Представим, что эти группы независимы и проведём ANOVA. Различия между ними недостоверны. Почему? Из-за большой внутригрупповой изменчивости?

Студенты по усердию **сильно различаются между собой!**



Как элиминировать межиндивидуальные различия (between-subjects effect)?

## Repeated measures ANOVA

Вычтешь из каждого измерения среднее значение для каждого студента!

*Deviations from person's own mean*

<i>Person</i>	<i>Monday</i>	<i>Tuesday</i>	<i>Wednesday</i>	<i>Thursday</i>	<i>Mean</i>
Pat	5	0	-2	-3	0
Bobby	2	3	-4	-1	0
Riki	-1	4	2	-5	0
Jean	3	3	0	-6	0
Lynn	1	-1	1	-1	0
Jo	-1	4	-4	1	0
Mean	1.500	2.167	-1.167	-2.500	

Вот теперь измерения стали независимы («исправленные»), и дальше можно сравнить их ANOVA (от обычной ANOVA отличается число степеней свободы внутри измерений –  $df_w = (k - 1)(n - 1)$  )

## Repeated measures ANOVA

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

$H_1$ : нулевая гипотеза не верна

Обычная ANOVA:

$$F = \frac{\text{оценка дисперсии между группами}}{\text{оценка дисперсии внутри групп}} \quad F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

*Repeated measures ANOVA:*

$$F = \frac{\text{оценка дисперсии между измерениями}}{\text{«ошибка»}} \quad F = \frac{MS_B}{MS_{err}}$$

Изменчивость:

1. Между **измерениями**;
2. Между **особями** (получается из средних значений для особей);
3. «ошибка» (внутри «исправленных» измерений) – error, residual

---

## Repeated measures ANOVA

Теперь  $H_0$  будет отвергнута, т.е., преподаватель сможет утверждать, что усердие его учеников зависит от дня недели.



Мощность дисперсионного анализа для повторных измерений выше, чем обыкновенного дисперсионного анализа (в случае связанных выборок).

---



## Repeated measures ANOVA

Другой пример: к тиграм-самцам пришёл новый слугитель, а потом – новая уборщица. И возможно, они стали по-другому питаться. Мы хотим узнать, менялась ли их масса.

Мы анализируем влияние служителя на массу тигров-самцов.  
*Зависимая переменная* – масса.

*Но:* для каждой особи по 3 измерения (3 столбика в таблице).



Каждый тигр **ТРИ** раза участвует в наблюдениях.

	ДО	СЛУЖ	УБОР
1 тигр	356	↔ 363	200
2 тигр	351	↔ 361	182
3 тигр	353	↔ 358	193
4 тигр	355	↔ 356	194
5 тигр	354	359	184
6 тигр	355	355	173

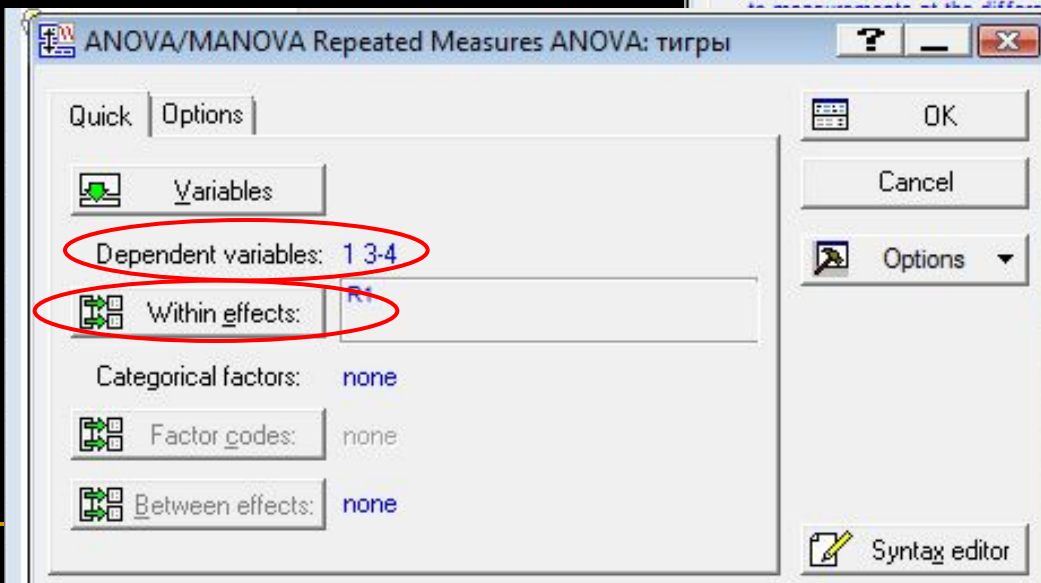
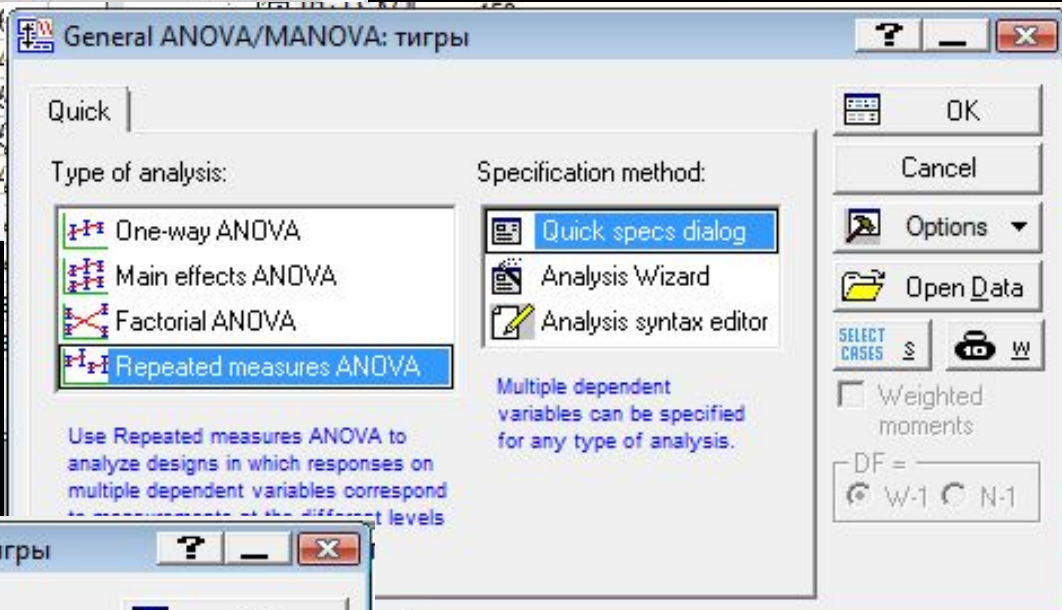


$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

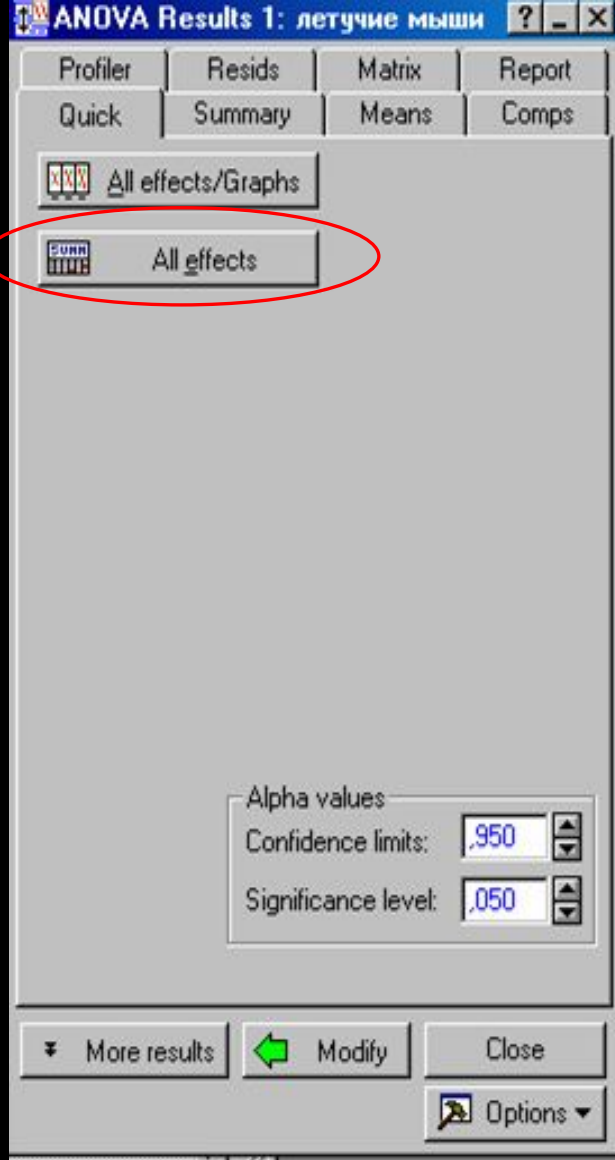
$$F = \frac{\text{оценка дисперсии между измерениями}}{\text{«ошибка»}}$$

Data: тигры\* (10v by 48c)

	1	2	3	4	5
	вес тигра, кг	пол тигра	ес (новый сотрудник)	вес уборщица	Вес
1	567	самец		589	345
2	653	самец			
3	465	самец			
4	547	самец			
5	564	самец			
6	457	самец			



В Statistica каждый столбик измерений называется dependent variable



изменчивость между особями

Repeated Measures Analysis of Variance (тигры)

Sigma-restricted parameterization  
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	8433647	1	8433647	84,37399	0,000000
Error	3098622	31	99956		
R1	352664	2	176332	87,51863	0,000000
Error	124917	62	2015		

между наблюдениями

«ошибка» - внутри «исправленных» наблюдений

Отвергаем  $H_0$ :

Масса тигров в среднем достоверно изменялась после прихода нового служителя и новой уборщицы.

# Repeated measures ANOVA

## **i** Repeated-measures ANOVA computation summary

- $SS_{\text{between occasions}} = \sum (\bar{X}_j - \bar{X}_G)^2$
- $SS_{\text{between subjects}} = \sum (\bar{X}_i - \bar{X}_G)^2$
- $SS_{\text{residual}} = \sum (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X}_G)^2$
- $SS_{\text{total}} = \sum (X_{ij} - \bar{X}_G)^2$
- $df_{\text{between occasions}} = k - 1$
- $df_{\text{between subjects}} = n - 1$
- $df_{\text{residual}} = (k - 1)(n - 1)$
- $df_{\text{total}} = nk - 1$
- complete the summary table

## Repeated measures ANOVA

Отвергаем  $H_0$ :

Масса тигров в среднем достоверно изменилась после прихода нового служителя и новой уборщицы.

А теперь можно провести апостериорный (post-hoc) тест!  
И выяснить, кто и как повлиял на массу тигров.



# Main effect ANOVA

(Two-way, multi-way designs)

Мы изучали земляных белок из Африки. Ловили их, взвешивали, измеряли зубы, голову. Определяли пол, возраст.

А теперь хотим знать, как разные факторы влияют на размер и вес белок.



**Фактор 1:** пол.

**Фактор 2:** возраст.

**Зависимая переменная:** масса тела.

---

## Main effect ANOVA:

1. Мы исследуем действие на выборку **ДВУХ** (трёх, четырёх) категориальных **факторов** (independent variables).
  2. Факторы **НЕЗАВИСИМЫ**.
  3. **Зависимая** переменная **ОДНА**.
-



## Main effect ANOVA

	1 год	2 года	≥3 года
самцы	440	892	1575
	438	868	849
	429	855	759
	502	866	1602
	602	932	1327
самки	308	737	1000,5
	328	798,5	901
	326	876	958
	326	810	1032
	325	861	883

Получилось 6 групп белок – 6 ячеек (cells) в таблице.

Заметим, что во **ВСЕХ** ячейках должны выполняться условия соответствия нормальному распределению и равенства дисперсий.

## Main effect ANOVA

Мы тестируем 2 эффекта – пола и возраста белок:

- ✓ main effect for rows
- ✓ main effect for columns.

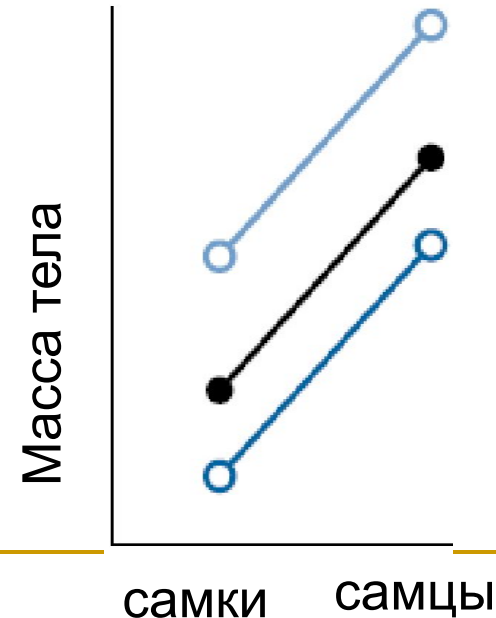
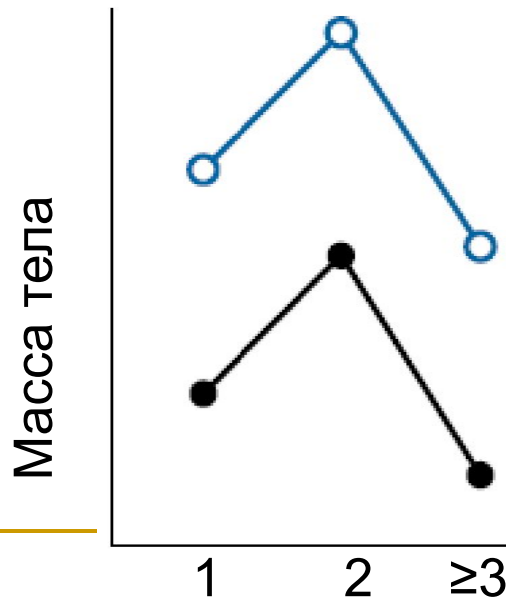
$$H_{0_R} : \mu_{males} = \mu_{females}$$

$$H_{0_C} : \mu_1 = \mu_2 = \mu_{\geq 3}$$



2 нулевые гипотезы, которые тестируются одновременно!

Примерный вид графического представления:



## Main effect ANOVA

Ещё пример:

Мы хотим изучить влияние питания на вес зверьков, отдельно для самцов и самок.

**Зависимая переменная** – масса тела.

**Фактор 1** (независимая переменная) – пол (1. самки; 2. самцы)

**Фактор 2** – тип еды (1. овощи; 2. фрукты; 3. мясо)



Data: тигры и еда (10v by 48c)

	1	2	3
	масса тела	тип еды	ПОЛ
2	135	овощи	самец
3	137	овощи	самец
4	118	овощи	самец
5	132	овощи	самец
6	135	овощи	самец
7	131	овощи	самец
8	137	овощи	самец
9	121	овощи	самка
10	140	овощи	самка
11	152	овощи	самка
12	133	овощи	самка
13	151	овощи	самка
14	132	овощи	самка
15	139	овощи	самка
16	96	овощи	самка
17	108	фрукты	самец
18	94	фрукты	самец
19	84	фрукты	самец
20	87	фрукты	самец
21	82	фрукты	самец
22	79	фрукты	самец
23	74	фрукты	самец
24	73	фрукты	самец
25	67	фрукты	самка
26	78	фрукты	самка
27	63	фрукты	самка
28	90	фрукты	самка
29	81	фрукты	самка

# Снова тигры

General ANOVA/MANOVA: тигры и еда

Quick

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA**
- Factorial ANOVA
- Repeated measures ANOVA

Specification method:

- Quick specs dialog**
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Multiple dependent variables can be specified for any type of analysis.

Use Main effects ANOVA to analyze the first-order (non-interactive) effects of multiple categorical independent variables (factors).

OK

Cancel

Options

Open Data

SELECT CASES

Weighted moments

DF =

W-1 N-1

ANOVA/MANOVA Main Effects ANOVA: тигры и еда

Quick | Options

Variables

Dependent variables: масса тела

Categorical factors: **тип еды-пол**

Factor codes: selected

Between effects: "тип еды" + "пол"

Syntax editor

OK

Cancel

Options

Univariate Tests of Significance for масса тела (тигры и еда)

Univariate Tests of Significance for МАССА ТЕЛА (тигры и еда)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	696490,1	1	696490,1	5949,825	0,000000
ТИП ЕДЫ	34621,2	2	17310,6	147,877	0,000000
ПОЛ	4,1	1	4,1	0,035	0,852701
Error	5150,7	44	117,1		

Tukey HSD test; variable масса тела (тигры и еда)

Tukey HSD test; variable МАССА ТЕЛА (тигры и еда)				
Probabilities for Post Hoc Tests				
Error: Between MS = 117,06, df = 44,000				
Cell No.	ТИП ЕДЫ	{1}	{2}	{3}
1	овощи	133,75	83,000	144,63
2	фрукты	0,000130	0,018280	0,000130
3	мясо	0,018280	0,000130	

Tukey HSD test; variable масса тела (тигры и еда)

Tukey HSD test; variable МАССА ТЕЛА (тигры и еда)			
Probabilities for Post Hoc Tests			
Error: Between MS = 117,06, df = 44,000			
Cell No.	ПОЛ	{1}	{2}
1	самец	120,75	120,17
2	самка	0,852808	0,852808

Тип еды оказывал достоверное влияние на массу тигров;  
 пол – не оказывал достоверного влияния на массу.

---

# Factorial ANOVA

Мы изучали земляных белок из Африки. Ловили их, взвешивали, измеряли зубы, голову. Определяли пол, возраст; хотим знать, как разные факторы влияют на массу белок.

1. Мы исследуем действие на выборку **ДВУХ** (трёх, четырёх) категориальных **факторов** (independent variables).
2. ~~Факторы НЕЗАВИСИМЫ.~~
3. Зависимая переменная **ОДНА**.

**У нас МНОГО факторов, и они могут быть СВЯЗАНЫ.**

---

# Factorial ANOVA

	1 год	2 года	≥3 года
самцы	440	892	1575
	438	868	849
	429	855	759
	502	866	1602
	602	932	1327
самки	308	737	1000,5
	328	798,5	901
	326	876	958
	326	810	1032
	325	861	883

У нас **ТРИ** нулевых гипотезы:

$$H_{0R} : \mu_{males} = \mu_{females}$$

$$H_{0C} : \mu_1 = \mu_2 = \mu_{\geq 3}$$

и для каждой ячейки таблички:

$$H_{0RC} : \mu_{RowColumn} - \mu_{row} - \mu_{column} + \mu_G = 0$$

среднее в  
ячейке

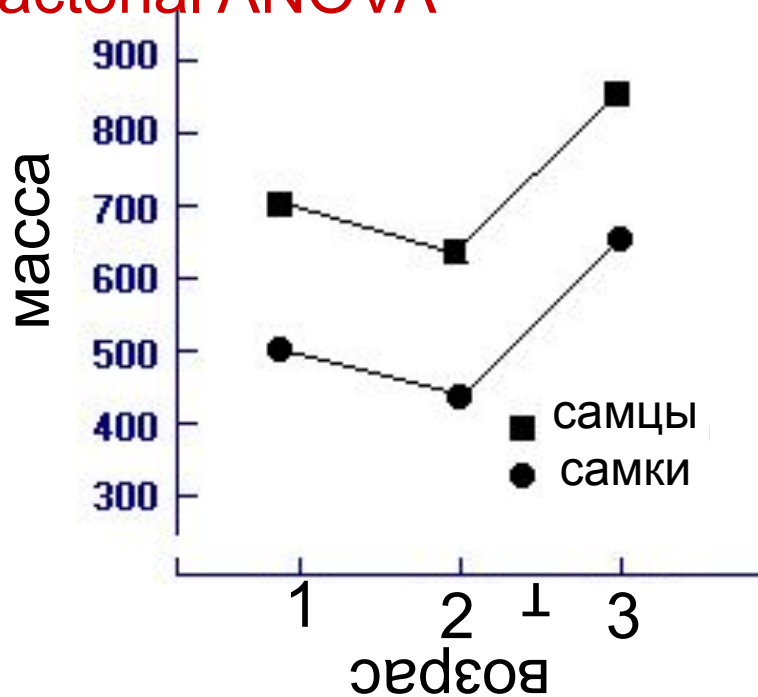
среднее в  
столбце

среднее  
в строке

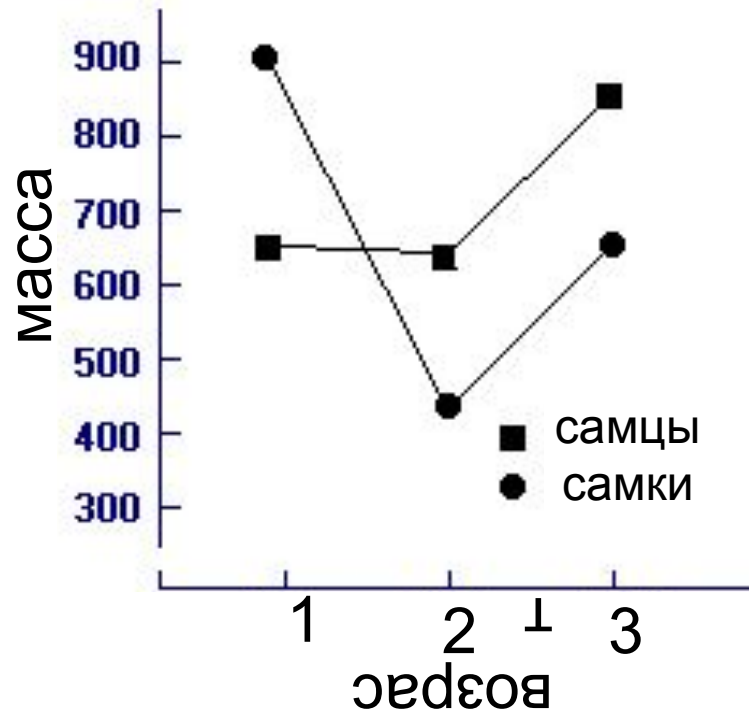
общее  
среднее

**это гипотеза о наличии связи между факторами** (она состоит у нас из 6-и гипотез, по числу ячеек)

## Factorial ANOVA



и пол, и возраст влияют на массу;  
взаимодействия факторов НЕТ



возраст влияет на массу, пол – нет;  
взаимодействие ЕСТЬ

если линии на рисунке ПАРАЛЛЕЛЬНЫ, взаимодействия факторов НЕТ.

если НЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ, взаимодействие ЕСТЬ.

(насколько они параллельны, решает ANOVA)



## Factorial ANOVA

Для каждой из гипотез рассчитывается своё значение F-статистики.

$$F_{R_{\text{obs}}} = \frac{MS_R}{MS_W}$$

Изменчивость между строками

Средняя по ячейкам  
внутригрупповая изменчивость

$$F_{C_{\text{obs}}} = \frac{MS_C}{MS_W}$$

Изменчивость между столбцами

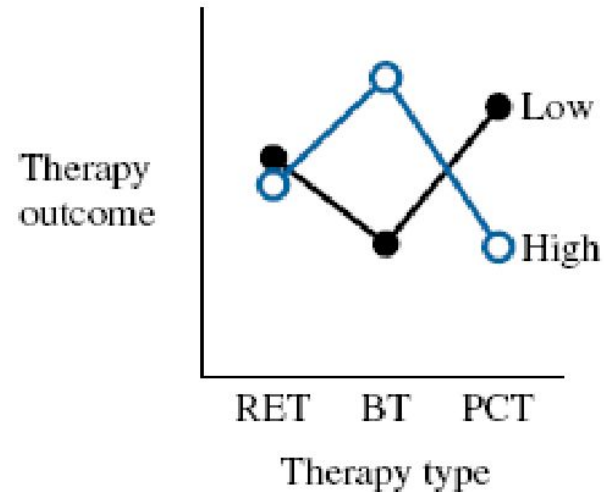
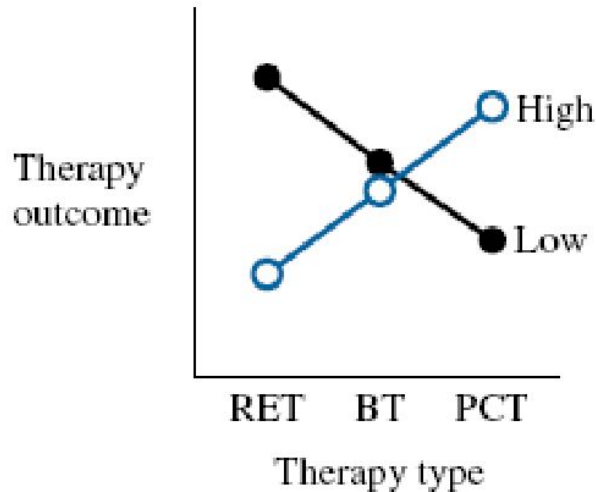
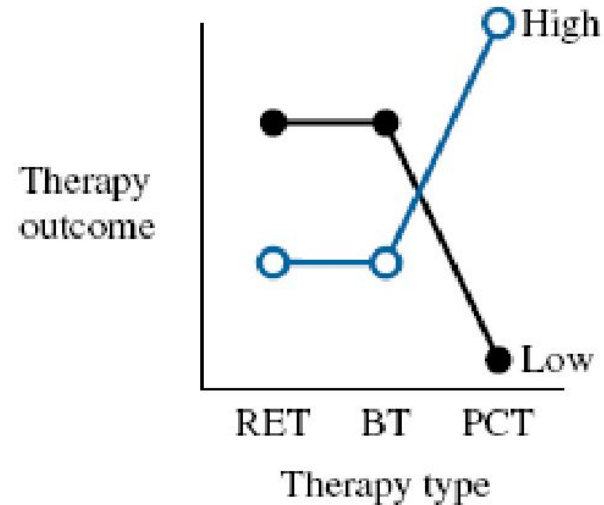
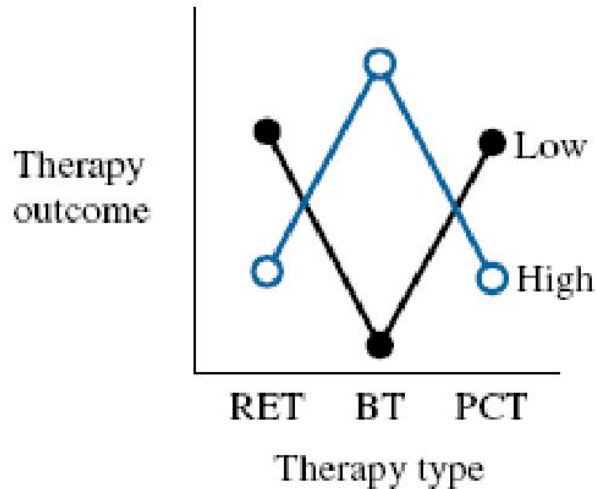
$$F_{RC_{\text{obs}}} = \frac{MS_{RC}}{MS_W}$$

«взаимодействие» факторов

Наличие взаимодействия факторов: например, изменение массы тела с возрастов отличается у самцов и самок

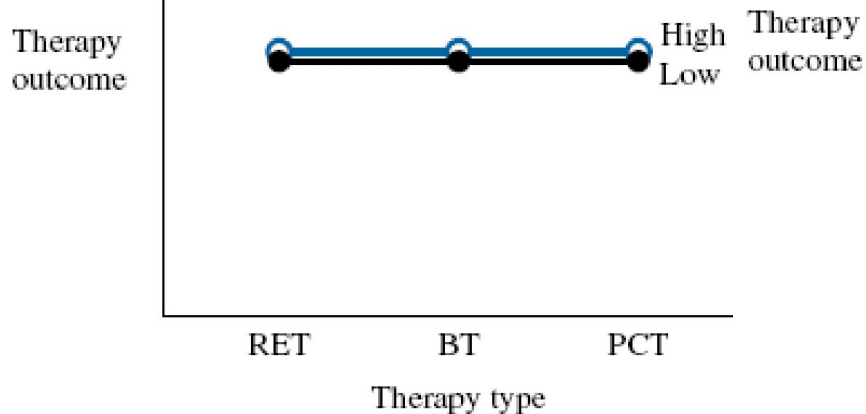
# Factorial ANOVA

Возможные варианты графиков для таблицы 2x3  
(пример про 3 типа лечения у опытных и неопытных врачей):

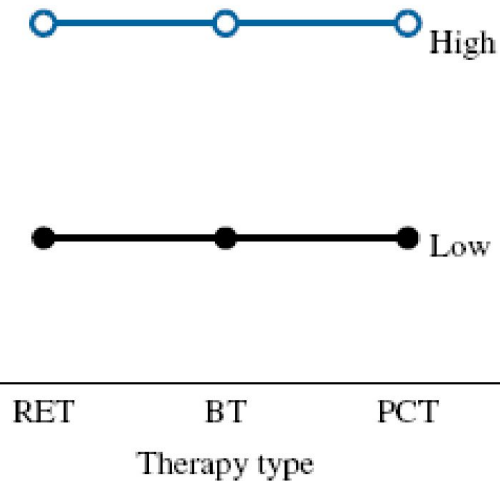


Оба эффекта незначительны, но есть взаимодействие факторов

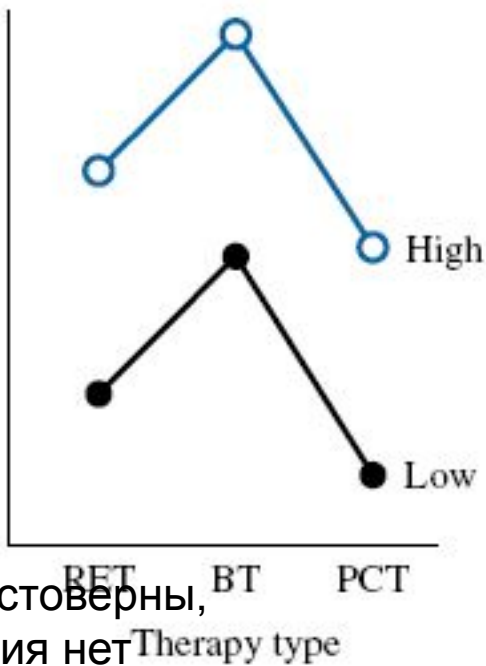
эффекты не  
достоверны,  
взаимодействия нет



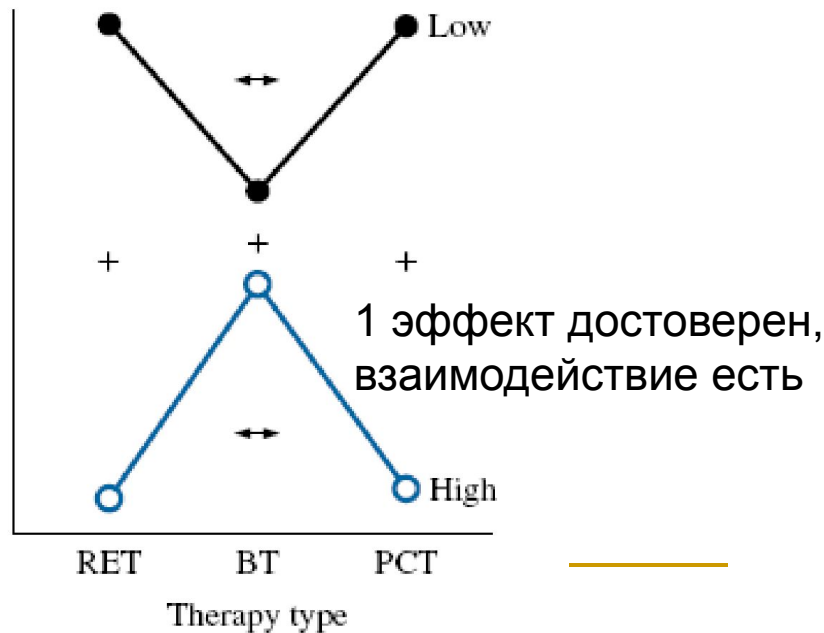
1 эффект достоверен,  
взаимодействия нет



Therapy outcome



Therapy outcome

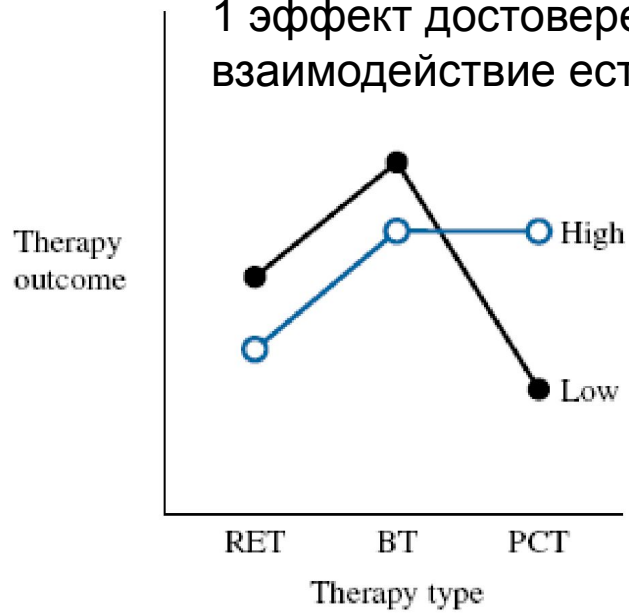


1 эффект достоверен,  
взаимодействие есть

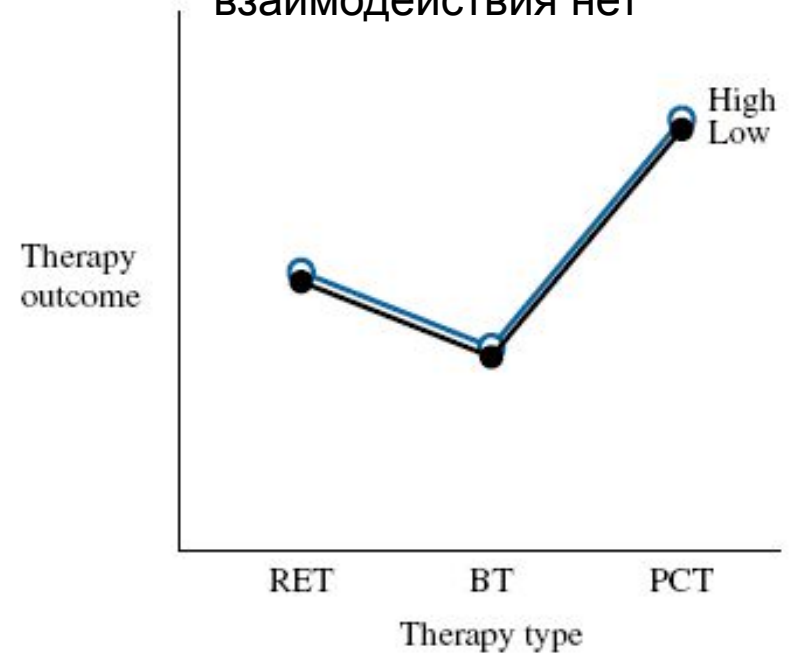
2 эффекта достоверны,  
взаимодействия нет

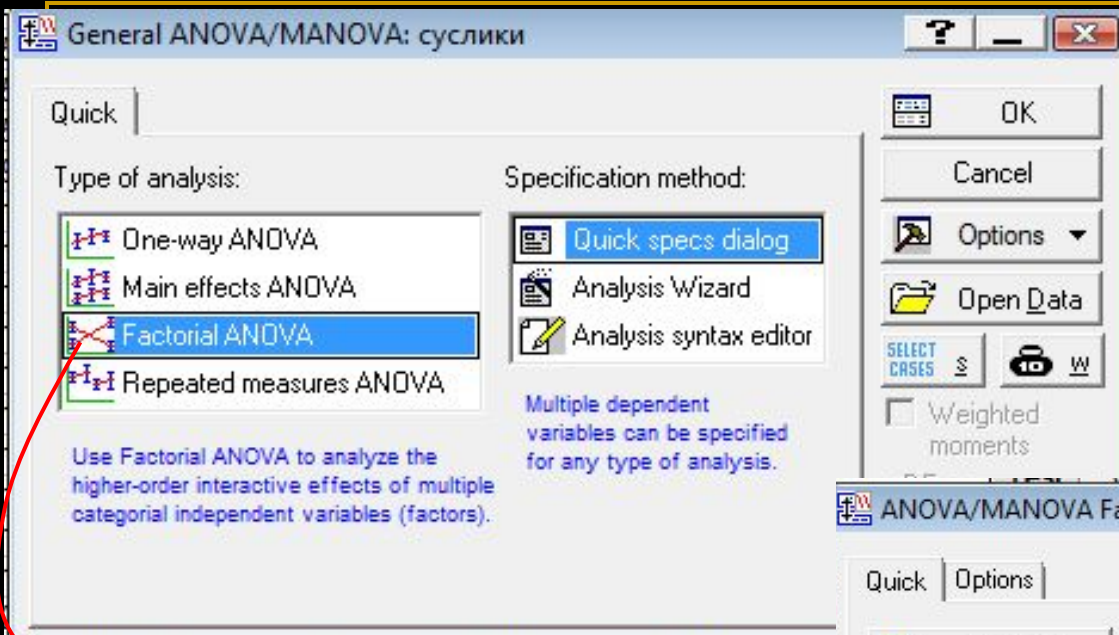
# Factorial ANOVA

1 эффект достоверен,  
взаимодействие есть

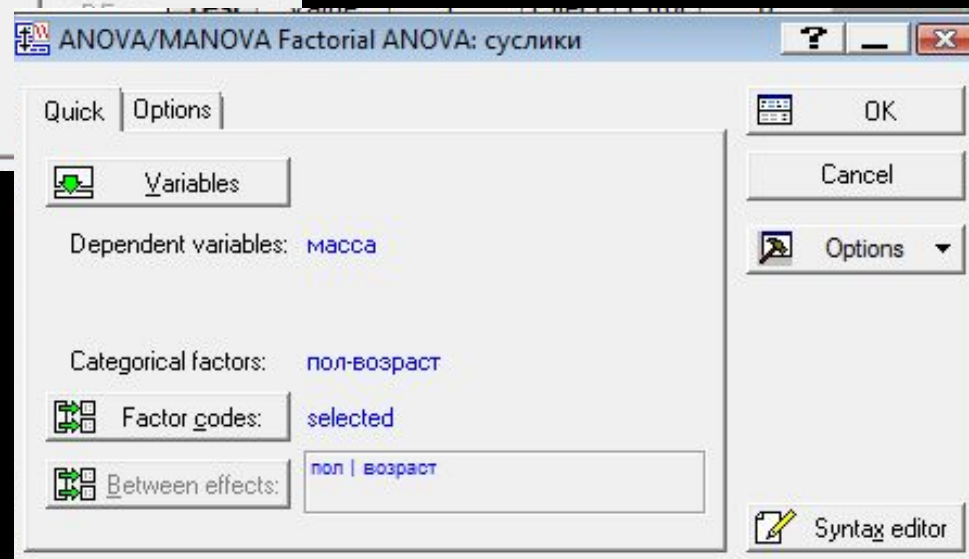


1 эффект достоверен,  
взаимодействия нет





даже здесь линии пересекаются



Univariate Tests of Significance for масса (суслики)

Univariate Tests of Significance for масса (суслики)  
Sigma-restricted parameterization  
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	97234968	1	97234968	1171,993	0,000000
пол	1901243	1	1901243	22,916	0,000004
возраст	700892	2	350446	4,224	0,016126
пол*возраст	44962	2	22481	0,271	0,762953
Error	14850820	179	82965		

ANOVA Results 1: суслики

Profiler Resids Matrix Report  
Quick Summary Means Comps

All effects/Graphs

All effects

Alpha values  
Confidence limits: .950  
Significance level: .050

More results Modify Close  
Options

Table of All Effects: суслики

Sigma-restricted parameterization  
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	D...	MS	F	p
пол	190E4	1	190E4	22,92	,000*
возраст	701E3	2	350E3	4,22	,016*
пол*возраст	450E2	2	225E2	,27	,763

Close dialog on OK

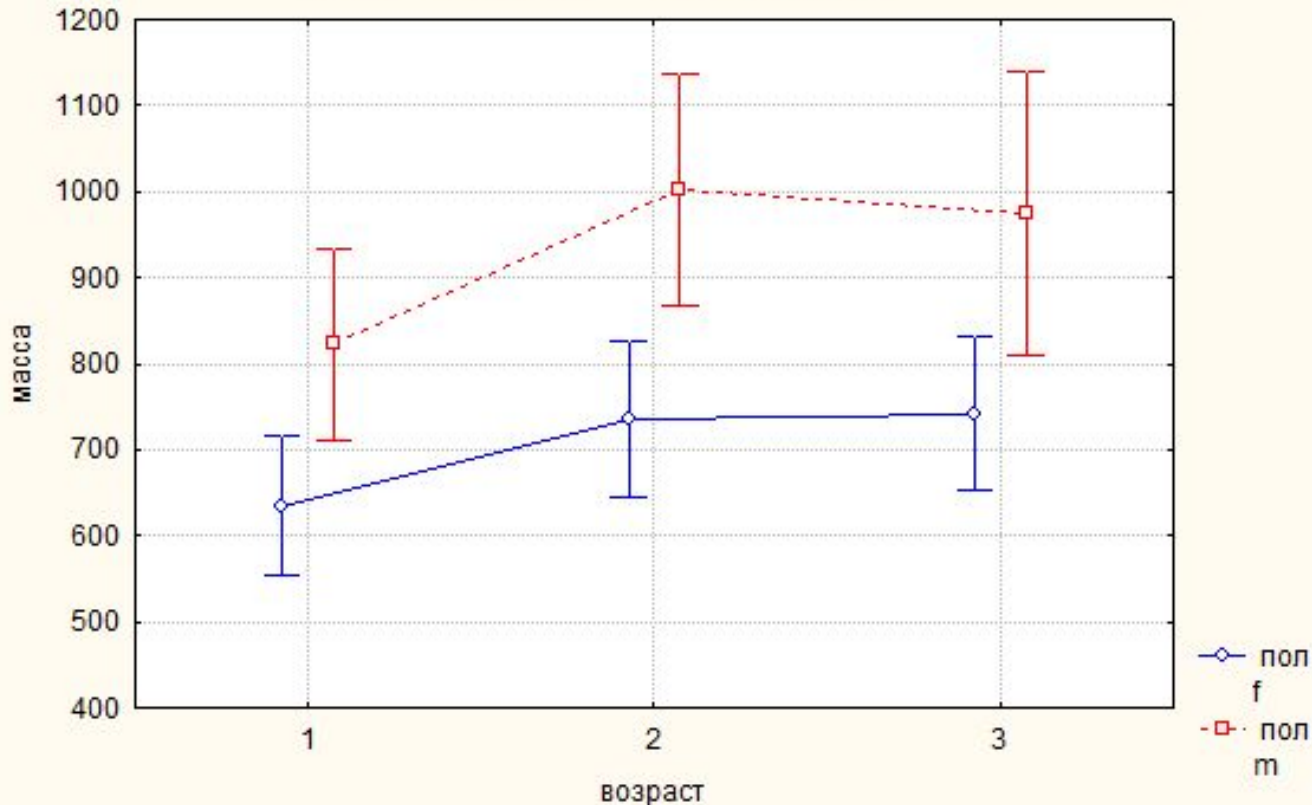
Display  
Graph  
Spreadsheet

Means:  
Unweighted  
Weighted  
Least squares

Compute std. errors

Double-click on an effect to produce a graph or a Spreadsheet of means.  
Copy to Clipboard

пол\*возраст; LS Means  
Current effect:  $F(2, 179)=,27097$ ,  $p=,76295$   
Effective hypothesis decomposition  
Vertical bars denote 0,95 confidence intervals



первые две гипотезы мы отвергаем: и пол, и возраст влияют на массу белок.

третью не отвергаем: **взаимодействия факторов НЕТ!**

# Factorial ANOVA

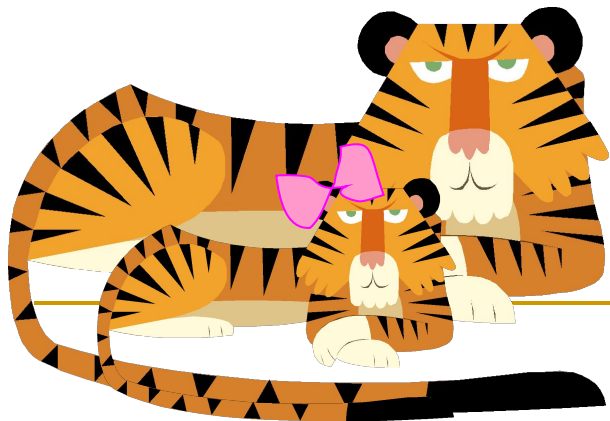
<i>Source of variation</i>	<i>Sum of squares (SS)</i>	<i>Degrees of freedom (df)</i>	<i>Mean square (MS)</i>	<i>F</i>
Row	$SS_R$	$R - 1$	$SS_R/df_R$	$MS_R/MS_W$
Column	$SS_C$	$C - 1$	$SS_C/df_C$	$MS_C/MS_W$
RC interaction	$SS_{RC}$	$(R - 1)(C - 1)$	$SS_{RC}/df_{RC}$	$MS_{RC}/MS_W$
Within cell	$SS_W$	$RC(n - 1)$	$SS_W/df_W$	
Total	$SS_T$	$n_G - 1$		



## Multivariate factorial ANOVA

У нас есть **НЕСКОЛЬКО ЗАВИСИМЫХ** переменных, или мы провели несколько повторных измерений, и проверяем действие **НЕСКОЛЬКИХ ФАКТОРОВ**.

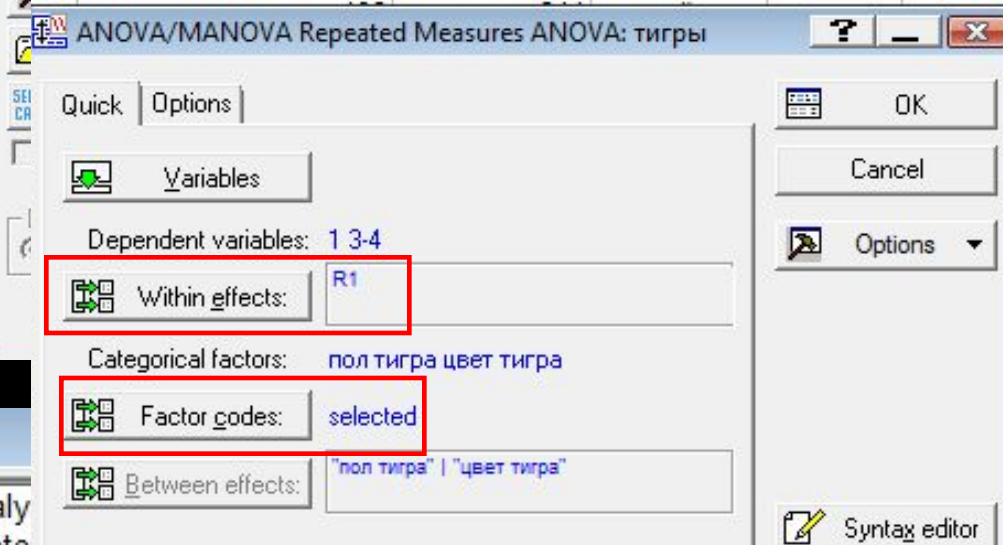
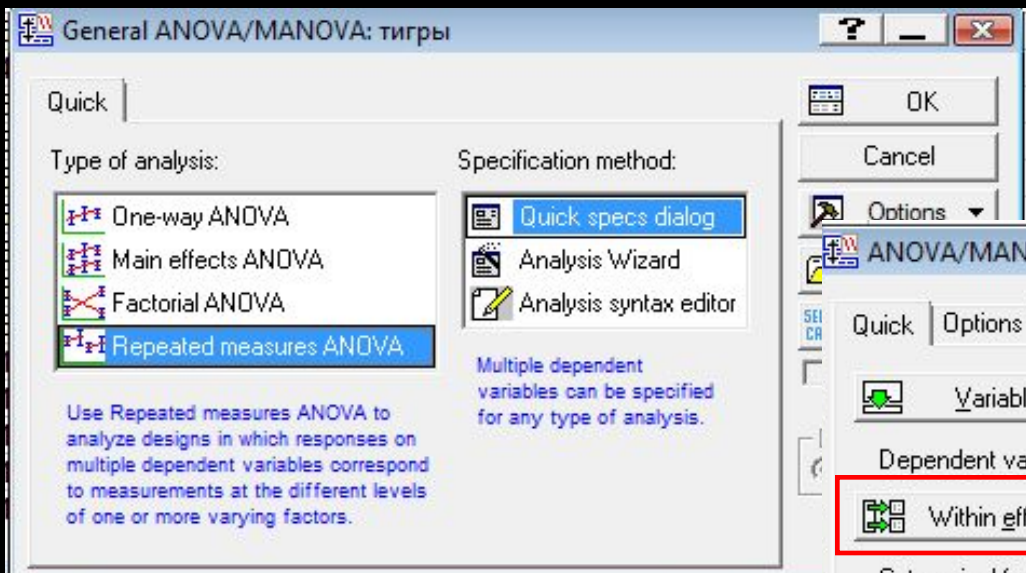
*Повторные измерения:* 1. масса до служителя; 2. со служителем; 3. с новой уборщицей.



*фактор 1:* пол

*фактор 2:* цвет



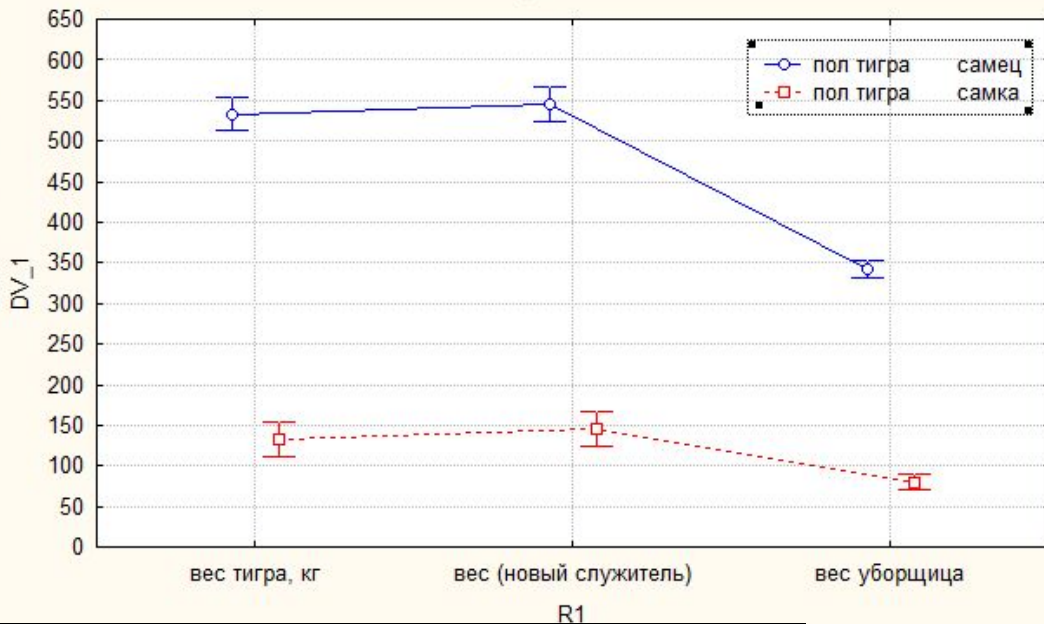


### Repeated Measures Analysis of Variance (тиграы)

Repeated Measures Analysis of Variance  
Sigma-restricted parameterization  
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	8433647	1	8433647	2876,394	0,000000
пол тигра	3016086	1	3016086	1028,671	0,000000
цвет тигра	145	1	145	0,049	0,825606
пол тигра*цвет тигра	294	1	294	0,100	0,753852
Error	82097	28	2932		
R1	352664	2	176332	462,480	0,000000
R1*пол тигра	102676	2	51338	134,648	0,000000
R1*цвет тигра	684	2	342	0,897	0,413529
R1*пол тигра*цвет тигра	206	2	103	0,270	0,764505
Error	21351	56	381		

R1\*пол тигра; LS Means  
 Current effect:  $F(2, 56)=134,65$ ,  $p=0,0000$   
 Effective hypothesis decomposition  
 Vertical bars denote 0,95 confidence intervals



R1\*цвет тигра; LS Means  
 Current effect:  $F(2, 56)=,89710$ ,  $p=,41353$   
 Effective hypothesis decomposition  
 Vertical bars denote 0,95 confidence intervals

